数理解析研究所講究録
第46巻 1968年 29-46

Adequacy and Sufficiency

大阪市大 理学部 杉浦 誠

§1. 序

この小論はBahadur [1] の Sufficiency - Transitivity, Hall - Wijsman - Ghosh [2]の Conditional independence, そして Skibinsky [3]の Adequacyの相互関係をはっきりさせることを目的としている。従って十分統計量の性質などには触れていない。

§2では記号の説明及び諸定義, §3では[1], [2], [3]の関係を示し最後にある条件のもとで, Adequacy に関する因子分解定理を証明した。§4では Adequacy の予測問題への応用を竹内啓[4] に従って示し, Adequate 統計量の例をいくつか示した。

§2. 諸定義, 記号

$(\mathcal{X}, \mathfrak{A})$を標本空间, $\mathcal{P} = \{P\}$を$\mathfrak{A}$上の確率測度の集合とする。$\mathcal{B}$を$\mathcal{X}$の部分集合のつくるσ-fieldとして, $\mathcal{B}$の

元がすべて$\mathfrak{A}$の元であるならば，$\mathfrak{B}$は$\mathfrak{A}$のsub-fieldといい$\mathfrak{B}\subseteq\mathfrak{A}$とかく。$x\in\mathfrak{X}$に対して$\Pi(x)$を$x$を含むある命題とする。ある$\mathfrak{A}$-$\mathfrak{P}$-零集合$N$があって$\Pi(x)$は$x\in\mathfrak{X}-N$で真であるとき，$\Pi(x)\ [\mathfrak{A},\mathfrak{P}]$とかく。

$\mathfrak{B}_1,\ \mathfrak{B}_2\subseteq\mathfrak{A}$とする。そこでどんな$B_1\in\mathfrak{B}_1$に対しても$B_2\in\mathfrak{B}_2$が存在して$(B_1-B_2)\cup(B_2-B_1)$が$\mathfrak{A}$-$\mathfrak{P}$-零集合であるならば$\mathfrak{B}_1\leq\mathfrak{B}_2\ [\mathfrak{A},\mathfrak{P}]$とかく。またこの逆が成り立てば$\mathfrak{B}_1=\mathfrak{B}_2\ [\mathfrak{A},\mathfrak{P}]$と定義する。

$\mathfrak{B}\subseteq\mathfrak{A}$であって，$P$を$\mathfrak{A}$上の確率測度，$f(x)$を$\mathfrak{A}$-$P$-可積分とする。Radon-Nikodym theoremからどんな$B\in\mathfrak{B}$に対しても，$\int_B g(x)\,dp=\int_B f(x)\,dp$を満足する$g(x)$（$\mathfrak{B}$-$P$-可積分）が存在する。（この$g(x)$は$\mathfrak{B}$-$P$-零集合を除いて一意である。）上で存在した$g(x)$を$E_p[f(x)|\mathfrak{B}]$とかき，$\mathfrak{B}$が与えられたときの$P$に関する$f(x)$の条件付期待値という。なお$f(x)=\chi_A(x)$（$A\in\mathfrak{A}$）のときは，$E_p[\chi_A(x)|\mathfrak{B}]$（$=P(A|\mathfrak{B})$）を$A$の条件付確率という。

§3. Adequacy, Sufficiency, Transitivity & Conditional independence.

$\mathfrak{B},\ \mathfrak{C}\subseteq\mathfrak{A}$，$\mathfrak{B}_0\subseteq\mathfrak{B}$，$\mathfrak{P}$を$\mathfrak{A}$上の確率測度の集合とする。

定義1.[3]. ① どんな$B\in\mathfrak{B}$に対しても，$\mathfrak{B}_0$-可測$\varphi_B(x)$が

存在して，どんな$P \in \mathcal{P}$に対しても，$\varphi_B(x) = E_P[\chi_A(x) \mid \mathcal{B}_0]$ $[\mathcal{O}, P]$

②どんな$C \in \mathcal{C}$，$P \in \mathcal{P}$に対しても　$E_P[\chi_C(x) \mid \mathcal{B}] = E_P[\chi_C(x) \mid \mathcal{B}_0]$ $[\mathcal{O}, P]$

上の①，②が成り立つとき，$\mathcal{B}_0$は$\mathcal{B}$に対して$\mathcal{C}$，$\mathcal{P}$に関して adequateであるといい$\mathcal{B}_0\, \mathrm{adq}\, [\mathcal{B} : \mathcal{C}, \mathcal{P}]$とかく。

また$\mathcal{O}_0 = \{\phi, \mathcal{X}\}$とすれば，$\mathcal{B}_0\, \mathrm{adq}\, [\mathcal{B} : \mathcal{O}_0, \mathcal{P}]$は$\mathcal{B}_0$が$\mathcal{P}$に対して$\mathcal{B}$の十分sub-field であることの定義と一致する。（これを$\mathcal{B}_0 \mathrm{suf}[\mathcal{B} : \mathcal{P}]$とかくことにする。）

<u>定義2.[1]</u>　$\mathcal{B}_m^0 \subseteq \mathcal{B}_m$，$\mathcal{B}_m \subseteq \mathcal{B}_{m+1}$，$\mathcal{B}_m \subseteq \mathcal{O}$，$m = 1, 2, 3, \cdots\cdots$ とする。①$\mathcal{B}_m^0\, \mathrm{suf}[\mathcal{B}_m : \mathcal{P}]$，$m = 1, 2, \cdots\cdots$，②どんな$C \in \mathcal{B}_{m+1}^0$ $P \in \mathcal{P}$に対しても，$E_P[\chi_C(x) \mid \mathcal{B}_m] = E_P[\chi_C(x) \mid \mathcal{B}_m^0]$，$[\mathcal{O}, P]$，$m = 1, 2, \cdots$

上の①，②が成り立つとき，$\{\mathcal{B}_m^0\}$は$\{\mathcal{B}_m\}$の十分，transitive な列という。（注意。②の条件をtransitiveという。）

なお定義2を定義1を使って云えば，$\mathcal{B}_m^0\, \mathrm{adq}\, [\mathcal{B}_m : \mathcal{B}_{m+1}^0, \mathcal{P}]$，$m = 1, 2, \cdots\cdots$　である。

<u>定義3.[2]</u>　$\mathcal{B}_1$，$\mathcal{B}_2$，$\mathcal{B}_3 \subseteq \mathcal{O}$とする。どんな$B_1 \in \mathcal{B}_1$，$B_2 \in \mathcal{B}_2$，$P \in \mathcal{P}$に対しても，$E_P[\chi_{B_1}(x) \cdot \chi_{B_2}(x) \mid \mathcal{B}_3] = E_P[\chi_{B_1}(x) \mid \mathcal{B}_3] \cdot E_P[\chi_{B_2}(x) \mid \mathcal{B}_3]$，$[\mathcal{O}, P]$　が成り立つならば，$\mathcal{B}_1$，$\mathcal{B}_2$は$\mathcal{B}_3$に関して条件付独立であるという。

<u>定理1.[2]</u>　定義1の条件②の必要十分条件は$\mathcal{B}$，$\mathcal{C}$が$\mathcal{B}_0$

に関して条件付独立であることである。

（証明），（必要性）． $B \in \mathcal{B}$, $C \in \mathcal{C}$, $P \in \mathcal{P}$ に対して

$$\int_{B_0} E_p[\chi_B \cdot \chi_C \mid \mathcal{B}_0]\,dp = \int_{B_0} \chi_B \cdot \chi_C\,dp = \int_{B_0 \cap B} \chi_C\,dp = \int_{B_0 \cap B} E_p[\chi_C \mid \mathcal{B}]\,dP$$

$$= \int_{B_0} \chi_B\, E_p[\chi_C \mid \mathcal{B}_0]\,dp = \int_{B_0} E_p[\chi_B \mid \mathcal{B}_0] \cdot E_p[\chi_C \mid \mathcal{B}_0]\,dp, \ \forall B_0 \in$$

（十分性） $B \in \mathcal{B}$, $C \in \mathcal{C}$, $P \in \mathcal{P}$ に対して

$$\int_B E_p[\chi_C \mid \mathcal{B}]\,dp = \int \chi_B \cdot \chi_C\,dp = \int E_p[\chi_B \cdot \chi_C \mid \mathcal{B}_0]\,dp$$

$$= \int E_p[\chi_B \mid \mathcal{B}_0] \cdot E_p[\chi_C \mid \mathcal{B}_0]\,dp = \int_B E_p[\chi_C \mid \mathcal{B}_0]\,dp \quad \blacksquare$$

次に $P \in \mathcal{P}$, $C \in \mathcal{C}$, （ $P(C) > 0$ ），なる（ P, C ）に対して， $P^C(A) = \dfrac{P(A \cap C)}{P(C)}$ （ $A \in \mathcal{O}$ ）で P^C を定義すれば P^C は $\mathcal{O}$ 上の確率測度になる。そこで $\mathcal{P}(\mathcal{C}) = \{ P^C ;\ P \in \mathcal{P}, C \in \mathcal{C}, P(C) > 0 \}$ とおくならば次の定理が成り立つ。

<u>定理2.[3]</u> 次の i)～iv) は同値である。

i) $\mathcal{B}_0 \text{ suf } [\mathcal{B} : \mathcal{P}(\mathcal{C})]$

ii) どんな $B \in \mathcal{B}$ に対しても， $\mathcal{B}_0$ －可測 $\varphi_B(x)$ が存在して，

$E_p[\chi_{B_0} \cdot \varphi_B \mid \mathcal{C}] = E_p[\chi_{B_0 \cap B} \mid \mathcal{C}]$, $[\mathcal{C}, P]$, $\forall B_0 \in \mathcal{B}, P \in \mathcal{P}$

iii) どんな $B \in \mathcal{B}$ に対しても， $\mathcal{B}_0$ －可測 $\varphi_B(x)$ が存在して，

$\varphi_B(x) = E_p[\chi_B \mid \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}]$, $[\mathcal{O}, P]$, $\forall P \in \mathcal{P}$

iv) $\mathcal{B}_0 \text{ adq } [\mathcal{B} : \mathcal{C}\mathcal{P}]$

（証明）， i) ⇒ ii) i より どんな $B \in \mathcal{B}$ に対しても，

$\mathcal{B}_0$ー可測 $\varphi_B(x)$ が存在して,

$P^G(B_0 \cap B) = \int_{B_0} \varphi_B \, dP^G \qquad \forall B_0 \in \mathcal{B}_0,\ P \in \mathcal{P},\ G \in \mathcal{C}$ である。

従って, $\int_G E_p[\chi_{B_0 \cap B} \mid \mathcal{C}] \, dp = \int_G \chi_{B_0 \cap B} \, dp = \int_G E_p[\chi_{B_0} \cdot \varphi_B \mid \mathcal{C}] \, dp$

ii) ⇒ iii)　ii) より $B \in \mathcal{B},\ B_0 \in \mathcal{B}_0,\ G \in \mathcal{C},\ P \in \mathcal{P}$ に対して

$\int_G E_p[\chi_{B_0 \cap B} \mid \mathcal{C}] \, dp = \int_G E_p[\varphi_B \cdot \chi_{B_0} \mid \mathcal{C}] \, dp$ である ―①

① の左辺 $= \int_{B_0 \cap G} \chi_B \, dp = \int_{B_0 \cap G} E_p[\chi_B \mid \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}] \, dp$

① の右辺 $= \int_G \varphi_B \chi_{B_0} \, dp = \int_{B_0 \cap C} \varphi_B \, dp$

従って $\varphi_B(x) = E_p[\chi_B \mid \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}]$. $[\Omega, P]$

iii) ⇒ iv)　iii) よりどんな $B \in \mathcal{B}$ に対しても $\mathcal{B}_0$ー可測 $\varphi_B(x)$ が存在して, どんな $P \in \mathcal{P}$ に対しても

$\varphi_B(x) = E_p[\chi_B \mid \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}] = E_p[\chi_B \mid \mathcal{B}_0]$. $[\Omega, P]$ であるから

$\mathcal{B}_0 \, \mathrm{adq}[\mathcal{B} : \mathcal{C}, \mathcal{P}]$ の定義の① が云えた。

次に $B_0 \in \mathcal{B}_0,\ B \in \mathcal{B},\ G \in \mathcal{C},\ P \in \mathcal{P}$ に対して

$P(B_0 \cap B \cap G) = \int_{B_0 \cap C} \varphi_B \, dp = \int_{B_0 \cap C} E_p[\chi_B \mid \mathcal{B}_0] \, dp = \int_{B_0 \cap B} E_p[\chi_G \mid \mathcal{B}_0] \, dp$

従って, $B_0 = \mathcal{X}$ とおくならば $\int_B E_p[\chi_G \mid \mathcal{B}_0] \, dp = \int_B E_p[\chi_G \mid \mathcal{B}] \, dp$

故に$\mathcal{B}_0$adq$[\mathcal{B}:\mathcal{C}\ \mathcal{P}]$の定義の②がいえた。

iv)$\Rightarrow$i)　$B_0\in\mathcal{B}_0$, $B\in\mathcal{B}$, $C\in\mathcal{C}$, $P\in\mathcal{P}$に対して

$$P(B_0\cap B\cap C)=\int_{B_0\cap B}E_P[\chi_C|\mathcal{B}]dP=\int_{B_0\cap B}E_P[\chi_C|\mathcal{B}_0]dP$$

$$=\int_{B_0\cap C}E_P[\chi_B|\mathcal{B}_0]dP=\int_{B_0\cap C}\varphi_B\,dP,$$ （iii)の$\mathcal{B}_0$adq$[\mathcal{B}:\mathcal{C}\ \mathcal{P}]$の定義のから）

従って　$P(C)>0$に対して

$$\frac{P(B_0\cap B\cap C)}{P(C)}=\int_{B_0}\varphi_B\cdot\frac{\chi_C}{P(C)}dP\quad\therefore P^C(B_0\cap B)=\int_{B_0}\varphi_B\,dP^C$$ ┘

系2.1　$\mathcal{B}\perp\mathcal{C}$とするならば，$\mathcal{B}_0adq[\mathcal{B}:\mathcal{C}\ \mathcal{P}]$と$\mathcal{B}_0suf[\mathcal{B}:\mathcal{P}]$とは必要十分である。

（証明）　$\mathcal{B}$上では$\mathcal{P}(\mathcal{C})=\mathcal{P}$である。従って定理のi)$\Leftrightarrow$iv)より結論を得る。

定義4.[3].　$P\in\mathcal{P}$に対して，$\mathcal{X}\times\mathcal{B}$上の関数$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$が次の①，②を満足するならば$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$は$\mathcal{C}$，$\mathcal{P}$に関する$\mathcal{B}$のregularな条件付確率という

$$\begin{cases}① & P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\cdot,B)\ (\forall B\in\mathcal{B}) \text{ は } E_P[\chi_B|\mathcal{C}] \text{ の version}\\ ② & P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(x,\cdot)\ (\forall x\in\mathcal{X}) \text{ は } \mathcal{B} \text{ 上の確率測度}\end{cases}$$

今どんな$P\in\mathcal{P}$に対しても，regularな条件付確率$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$が存在すると仮定して，その全体を$\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}=\{P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(x,\cdot);\ P\in\mathcal{P},\ x\in\mathcal{X}\}$

とおく。そうすれば次の定理が成り立つ。

定理3. [3]　i) どんな $P\in\mathcal{P}$ に対しても regular な条件付確率が存在するとする。

$\mathcal{B}_0\ \mathrm{suf}\,[\mathcal{B};\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}] \Longrightarrow \mathcal{B}_0\ \mathrm{adq}\,[\mathcal{B}:\mathcal{C},\mathcal{P}]$

ii) また $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{B}$ が可分ならば定義4の①, ②を満足する regular な条件付確率が存在して, i) の逆が成り立つ。

(証明)　i) $f(x)$ を $\mathcal{B}$-P-可積分とする。regular な条件付確率 $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ が存在するならば $E_P[f|\mathcal{C}]=\int_{\mathcal{X}} f\,dP_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\ [\mathcal{C},P]$ である。いま $\mathcal{B}_0\mathrm{suf}\,[\mathcal{B}:\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}]$ から, どんな $B\in\mathcal{B}$ に対しても $\mathcal{B}_0$-可測 $\varphi_B(x)$ が存在して, $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\cdot, B_0\cap B)=\int_{B_0}\varphi_B(x)\,dP_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$, $(\forall B_0\in\mathcal{B}_0,\ P\in\mathcal{P})$ —①

①の左辺 $=E_P[\chi_{B_0\cap B}|\mathcal{C}]\quad[\mathcal{C},P]$

①の右辺 $=E_P[\chi_{B_0}\cdot\varphi_B|\mathcal{C}]\quad[\mathcal{C},P]$

であるから定理2の ii) が云えた。

ii) i) の逆を仮定することは定理2の ii) を仮定することである。$B_0\in\mathcal{B}$, $B\in\mathcal{B}$, $P\in\mathcal{P}$ に対して, $\mathcal{C}$-P-零集合 $N_{B_0B}(P)$ が存在して, どんな $x\in\mathcal{X}-N_{B_0B}(P)$ に対しても

$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(x, B_0\cap B)=\int_{B_0}\varphi_B\,dP_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(x,\cdot)$　である。

$\mathcal{B}_0$, $\mathcal{B}$ が可分であることより $\hat{\mathcal{B}}_0=\{B_{0i}: i=1,2,\cdots\}$ $\hat{\mathcal{B}}=\{B_j: j=1,2,\cdots\}$ を $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{B}$ を生成する $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{B}$ の可付番

部分集合族とする。そこで $N(p)=\bigcup_{i,j} N_{B_{0i}B_j}(p)$ $(\forall p\in\mathcal{P})$ とおく。$N(p)$ は $\mathcal{C}$-$\mathcal{P}$-零集合であって $x\in\mathcal{X}-N(p)$ に対して

$$P^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(x, B_0\cap B)=\int_{B_0}\varphi_B\, dP^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(x,\cdot)\quad(\forall B_0\in\hat{\mathcal{B}}_0,\ B\in\hat{\mathcal{B}}) \quad —② $$

である。

従って②はどんな $B_0\in\mathcal{B}_0$, $B\in\mathcal{B}$ に対しても成り立つ。このことは $\mathcal{B}_0$ が $\{P^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(x,\cdot)\ ;\ p\in\mathcal{P},\ x\in\mathcal{X}-N(p)\}$ に対して十分であることを意味している。

今 $Q=\{Q_{p,x}\ ;\ p\in\mathcal{P},\ x\in\mathcal{X}\}$

但し
$$Q_{p,x}=P^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(x,\cdot)\qquad ;\ x\in\mathcal{X}-N(p)$$
$$\quad =P^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(\zeta_p,\cdot)\qquad ;\ x\in N(p)\quad(\zeta_p\text{ は }\mathcal{X}-N(p)\text{ の任意の点})$$

とすれば $Q_{p,x}$ は定義4の①，②を満足し $\mathcal{B}_0$ suf $[\mathcal{B}:Q]$ である。 ┛

定義5.[3]　$\mathcal{B}^*\subseteq\mathcal{B}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}\subseteq\mathcal{A}$ とする。

① $\mathcal{B}^*$ adq $[\mathcal{B}:\mathcal{C},\mathcal{P}]$

② $\mathcal{B}_0$ adq $[\mathcal{B}:\mathcal{C},\mathcal{P}]$ 　ならば　$\mathcal{B}^*\subseteq\mathcal{B}_0\ [\mathcal{A},\mathcal{P}]$

上の①，②が成り立つとき $\mathcal{B}^*$ を $\mathcal{B}$ に対して，$\mathcal{C}$，$\mathcal{P}$ に関して最小な adequate であるといい，$\mathcal{B}^*$ min adq $[\mathcal{B}:\mathcal{C},\mathcal{P}]$ とかく。

今 $\mathcal{P}$ を dominated であるとすれば，$\mathcal{P}(\mathcal{C})$ も dominated であり定理2の i)⇔iii) と[3]の定理6.2から次の系を得る。

系2.2　どんな $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{A}$ に対しても，$\mathcal{B}_0$ min adq $[\mathcal{B}:\mathcal{C},\mathcal{P}]$ で

ある$\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$が存在する。

次に条件付独立性に関する定理，補題を[2]に従っていくつかあげる。

<u>定理4.</u> $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$が$\mathcal{B}_3$に関して条件付独立であるための必要十分条件は，どんな$B_2 \in \mathcal{B}_2$に対しても

$E_p[\chi_{B_2} | \mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_3] = E_p[\chi_{B_2} | \mathcal{B}_3]$ $[\Omega, p]$, $\forall p \in \mathcal{P}$ である。

(証明)(必要性) $B_1 \in \mathcal{B}_1$, $B_2 \in \mathcal{B}_2$, $p \in \mathcal{P}$に対して

$E_p[\chi_{B_1} \cdot \chi_{B_2} | \mathcal{B}_3] = E_p[\chi_{B_1} E_p[\chi_{B_2} | \mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_3] | \mathcal{B}_3]$, $[\Omega, p]$ —① が成立つ。

また $E_p[\chi_{B_1} | \mathcal{B}_3] \cdot E_p[\chi_{B_2} | \mathcal{B}_3] = E_p[\chi_{B_1} E_p[\chi_{B_2} | \mathcal{B}_3] | \mathcal{B}_3]$ $[\Omega, p]$ —②

仮定より①，②の左辺が等しい。

$$\therefore \int_{B_3} \chi_{B_1} E_p[\chi_{B_2} | \mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_3] \, dp = \int_{B_3} \chi_{B_1} E_p[\chi_{B_2} | \mathcal{B}_3] \, dp \qquad \forall B_3 \in \mathcal{B}_3$$

$$\therefore \int_{B_3 \cap B_1} E_p[\chi_{B_2} | \mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_3] \, dp = \int_{B_3 \cap B_1} E_p[\chi_{B_2} | \mathcal{B}_3] \, dp$$

(十分性) 上の証明を逆にたどればよい。 ┘

<u>系4.1</u> $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$が$\mathcal{B}_3$に関して条件付独立であるための必要十分条件は$\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_3$, $\mathcal{B}_2$が$\mathcal{B}_3$に関して条件付独立である。 ┘

<u>系4.2</u> $\mathcal{B}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{B}_2$であるための必要十分条件は，どんな$\mathcal{B}_2$－可測$f(x)$に対しても，$E_p[f | \mathcal{B}_1] = E_p[f]$ $[\Omega, p]$ $(\forall p \in \mathcal{P})$である。┘

<u>補題1.</u> $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$は$\mathcal{B}_3$に関して条件付独立で，$\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}_1$とするならば$\mathcal{B}_0$, $\mathcal{B}_2$は$\mathcal{B}_3$に関して条件付独立である。 ┘

<u>系4.3</u> $\mathcal{B}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}_1$ ならば $\mathcal{B}_0 \perp\!\!\!\perp \mathcal{B}_2$ である。┘

<u>補題2.</u> $\mathcal{B}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3 \subseteq \mathcal{B}_1$ ならば $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$は$\mathcal{B}_3$に関して条件付独立である。┘

<u>定理5.[2].</u> $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \cdots$ を互に独立な$\mathcal{A}$のsub-fieldとする。$\mathcal{B}_m = \mathcal{C}_1 \vee \cdots \vee \mathcal{C}_m$ として、$\{\mathcal{B}_m^0\}$を$\mathcal{B}_m^0 \subseteq \mathcal{B}_m$, $\mathcal{B}_{m+1}^0 \subseteq \mathcal{B}_m^0 \vee \mathcal{C}_{m+1}$ $m=1,2,\cdots$ なる列とする。すると$\{\mathcal{B}_m^0\}$は$\{\mathcal{B}_m\}$に対して transitive である。

（証明） $\{\mathcal{B}_m\}$の作り方より $\mathcal{B}_m \perp\!\!\!\perp \mathcal{C}_{m+1}$である。補題2より $\mathcal{B}_m$, $\mathcal{C}_{m+1}$は$\mathcal{B}_m^0$に関して条件付独立である。また系4.1より$\mathcal{B}_m$, $\mathcal{C}_{m+1} \vee \mathcal{B}_m^0$は$\mathcal{B}_m^0$に関して条件付独立である。また補題1より$\mathcal{B}_{m+1}^0$, $\mathcal{B}_m$は$\mathcal{B}_m^0$に関して条件付独立である。従って定理1より結論を得る。┘

<u>補題3.</u> $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{A}$, $\mathcal{B}_1^0 \subseteq \mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2^0 \subseteq \mathcal{B}_2$ として、$\mathcal{B}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{B}_2$とする。そこで$\mathcal{B}_1^0$ suf$[\mathcal{B}_1 : \mathcal{P}]$, $\mathcal{B}_2^0$ suf$[\mathcal{B}_2 : \mathcal{P}]$ であるならば $\mathcal{B}_1^0 \vee \mathcal{B}_2^0$ suf$[\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2 ; \mathcal{P}]$ が成り立つ。┘

<u>定理6.[1].</u> $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \cdots\cdots$ を互に独立な$\mathcal{A}$のsub-fieldとする。$\mathcal{B}_m = \mathcal{C}_1 \vee \cdots \vee \mathcal{C}_m$ として、$\mathcal{P}$を$\mathcal{B}_m$上でdominatedであるとする。($m=1,2,\cdots\cdots$) そうすれば$\{\mathcal{B}_m\}$に対してnecessary, sufficient, transitive なる列$\{\mathcal{B}_m^0\}$が存在する。

（証明） まず$\mathcal{P}$がdominated であることにより定理6-2[1]から、$\mathcal{B}_m$のnecessary, sufficient, sub-field $\mathcal{B}_m^0$が存在する。($m=1,2,\cdots$)

これが transitive であることを云えばよい。

いま、$\mathcal{B}_m^0 \ \mathrm{suf}\,[\mathcal{B}_m : \mathcal{P}]$　$m=1,2,\cdots$　である。

また　$\mathcal{C}_{m+1}\ \mathrm{suf}\,[\mathcal{C}_{m+1} : \mathcal{P}]$　$m=1,2,\cdots$　は明らかである。

$\mathcal{B}_m \perp\!\!\!\perp \mathcal{C}_{m+1}$ であるから補題3より

$\mathcal{B}_m^0 \vee \mathcal{C}_{m+1}\ \mathrm{suf}\ [\mathcal{B}_m \vee \mathcal{C}_{m+1} : \mathcal{P}]$ が成り立つ。

一方　$\mathcal{B}_{m+1}^0\ \mathrm{min\ suf}\,[\mathcal{B}_{m+1} : \mathcal{P}]$　であるから

$\mathcal{B}_{m+1}^0 \leq \mathcal{B}_m^0 \vee \mathcal{C}\ \ [\mathcal{A}.\mathcal{P}]$　となる。

従って定理5の条件を満足することにより $\{\mathcal{B}_m^0\}$ は $\{\mathcal{B}_m\}$ の transitive な列である。（注意：定理5の条件で $\mathcal{B}_{m+1}^0 \leq \mathcal{B}_m^0 \vee \mathcal{C}$ $[\mathcal{A}.\mathcal{P}]$ であっても定理5は成り立つ。）

定理7.　$\mathcal{Y}$ を点 y の集合，$\mathcal{Z}$ を点 z の集合，$\mathcal{B}'$，$\mathcal{C}'$ をおのおの $\mathcal{Y}$，$\mathcal{Z}$ の部分集合のつくる σ-field とする。また $\mathcal{X}=\mathcal{Y}\times\mathcal{Z}$ とし，$\mathcal{B}=\mathcal{B}'\times\mathcal{Z}$，$\mathcal{C}=\mathcal{Y}\times\mathcal{C}'$，$\mathcal{B}_0' \subseteq \mathcal{B}'$ に対しては $\mathcal{B}_0=\mathcal{B}_0'\times\mathcal{Z}$ とする。そこで $\mathcal{A}=\mathcal{B}\vee\mathcal{C}\ (=\mathcal{B}'\times\mathcal{C}')$ として $\mathcal{P}$ を $\mathcal{A}$ 上の確率測度の集合で，直積，確率測度 $\lambda=\lambda_1\times\lambda_2$ に関して $\mathcal{P}\ll\lambda$ であると仮定する。

そうすれば $\mathcal{B}_0\,\mathrm{adq}\,[\mathcal{B} ; \mathcal{C}.\mathcal{P}]$ と，どんな $P\in\mathcal{P}$ に対しても，$\dfrac{dP}{d\lambda}=g(x)\,h_P(x)$（但し $g(x)$ は非負，$\mathcal{B}$-λ-可積分，$h_P(x)$ も非負で $\mathcal{B}_0\vee\mathcal{C}$-可測）と分解されることとは必要十分である。

（証明）（必要性）　$\mathcal{P}$ は dominated であるから，$\mathcal{P}\equiv\mathcal{P}_0$ なる $\mathcal{P}$ の可付番部分集合 $\mathcal{P}_0=\{P_1, P_2, \cdots\}$ が存在する。

$C_1, C_2, \cdots$ を $\sum C_i = 1$ なる正の定数として次の様に $\mathcal{B}'$ 上に確率測度 λ_{01} を定義する。$\mathcal{P} \ll \lambda$ であるから，$\frac{dP}{d\lambda} = k_p(x)$ $(\forall p \in \mathcal{P})$ とおくことにして，

$$d\lambda_{01}(y) = \sum C_i \int_{z} k_{P_i}(y,z)\, d\lambda_2(z)\, d\lambda_1(y) \quad \left(\begin{array}{l} P_i \in \mathcal{P}_0 \quad i=1,2,\cdots \\ x=(y,z) \end{array} \right)$$

そして $\mathfrak{X}$ 上の確率測度 λ_0 を $\lambda_{01} \times \lambda_2$ で定義する。このようにして定義された λ_0 に関して $\lambda_0 \ll \lambda$ である。従って $\frac{d\lambda_0}{d\lambda} = g(x)$ $(\geqq 0)$ が Radon-Nikodym 定理から存在する。一方 $\frac{d\lambda_0}{d\lambda} = \frac{d\lambda_{01}}{d\lambda_1} \times \frac{d\lambda_2}{d\lambda_2}$ から $g(x) = \frac{d\lambda_{01}(y)}{d\lambda_1(y)}$ となり z には無関係に決る。従って $g(x)$ は $\mathcal{B}-\lambda-$ 可積分である。

次に上で定義した λ_0 について $\mathcal{P} \ll \lambda_0$ である。このことからどんな $P \in \mathcal{P}$ に対しても $\frac{dP}{d\lambda_0} = h_p(x)$ $(\geqq 0)$ が存在する。もしこれが $\mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}-$ 可測であるならば，$\frac{dP}{d\lambda} = \frac{dP}{d\lambda_0} \cdot \frac{d\lambda_0}{d\lambda}$ から結論を得る。

そこでどんな $B \in \mathcal{B}$，$C \in \mathcal{C}$，$P \in \mathcal{P}$ に対しても

$$\int_{B \cap C} h_p(x)\, d\lambda_0 = P(B \cap C) = \int_C \chi_B(x)\, dp = \int_C E_p[\chi_B(x) \mid \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}]\, dp \quad \text{—①}$$

しかるに仮定（$\mathcal{B}_0\ \mathrm{adq}\ [\mathcal{B} : \mathcal{C}, \mathcal{P}]$）から定理２の(ii)を使えば $\mathcal{B}_0-$ 可測 $\varphi_B(x)$ が存在して，$\varphi_B(x) = E_p[\chi_B(x) \mid \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}]$ $[\mathfrak{X}, \mathcal{P}]$ である。

また $\varphi_B(x) = E_{\lambda_0}[\chi_B(x) \mid \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}]$ $[\mathfrak{X}, \mathcal{P}]$ である。——②

このことからどんな $C \in \mathcal{C}$ に対しても

$$\int_{C} E_P[\chi_B \mid \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}]\, dp = \int_{C} \varphi_B \, dp = \int_{C} \varphi_B \cdot h_p \, d\lambda_0$$

$$= \int_{C} E_{\lambda_0}[\varphi_B \cdot h_p \mid \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}]\, d\lambda_0$$

$$= \int_{C} \varphi_B \cdot E_{\lambda_0}[h_p \mid \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}]\, d\lambda_0$$

$$= \int_{C} E_{\lambda_0}[\chi_B \mid \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}] \cdot E_{\lambda_0}[h_p \mid \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}]\, d\lambda_0 \qquad (②より)$$

$$= \int_{C \cap B} E_{\lambda_0}[h_p \mid \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}]\, d\lambda_0 \quad —③$$

①と③より $h_p(x) = E_{\lambda_0}[h_p(x) \mid \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}]$ $[\Omega, P]$ 故に $h_p(x)$ は $\mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}$-可測である。

（十分性） どんな $B \in \mathcal{B}$ に対しても、$\mathcal{B}_0$-可測 $\varphi_B(x)$ が存在して、どんな $P \in \mathcal{P}$ に対しても $\varphi_B(x) = E_P[\chi_B(x) \mid \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}]$ $[\Omega, P]$ なることを示せば定理2の iii) より結論を得る。

それには測度 λ^* を次の様に定義する。$d\lambda^* = g(x)\, d\lambda$

$g(x)$ は $\mathcal{B}$-λ-可積分であることから λ^* も有限、直積測度である。（$\lambda^* = \lambda_1^* \times \lambda_2^*$ とおく） そこでどんな $B \in \mathcal{B}$, $B_0 \in \mathcal{B}_0$, $C \in \mathcal{C}$, に対しても

$$\int_{B_0 \cap C} E_P[\chi_B \mid \mathcal{B}_0 \vee \mathcal{C}]\, dp = \int_{B_0 \cap C} \chi_B \, g(x)\, h_p(x)\, d\lambda$$

$$= \int_{B_0 \cap C} \chi_B \cdot h_p \cdot d\lambda^* = \int_{C'} \int_{B_0'} \chi_B(y,z)\, h_p(y,z)\, d\lambda_1^*(y)\, d\lambda_2^*(z) \quad \begin{pmatrix} B_0 = B_0' \times \mathcal{Z} \\ C = \mathcal{Y} \times C' \end{pmatrix}$$

$$= \int_{C'} \int_{B_0'} E_{\lambda_1^*}[\chi_B(y,z) | B_0'] \, h_p(y,z) \, d\lambda_1^*(y) \, d\lambda_2^*(z)$$

$$= \int_{B_0 \cap C} E_{\lambda_1^*}[\chi_B | B_0'] \, h_p \, d\lambda^* = \int_{B_0 \cap C} E_{\lambda_1^*}[\chi_B | B_0'] \, dp$$

ここで $E_{\lambda_1^*}[\chi_B | B_0']$ は B_0-可測であるからこれを $\varphi_B(x)$ とおけば $\varphi_B(x) = E_p[\chi_B | B_0 \vee \ell]$ $[\Omega, P]$ ┘

なお $\mathcal{P}$ が直積，確率測度によって dominated でないならば，この定理が成り立たない例をあげる。

$\mathcal{Y} = [0,4]$，$\mathcal{Z} = [0,4]$ とし，B'，ℓ' をそれぞれ $\mathcal{Y}$，$\mathcal{Z}$ の Borel 集合の全体とする。$\Omega = B' \times \ell'$ で $\mathcal{P} = \{P_i : i=1,2,3,4\}$ を次の様に定義する。l' を1次元 Lebesgue 測度，L を $y = z$ なる直線として $\lambda(A) = l'(A \cap L)$ $(A \in \Omega)$ で λ を定義する。そして $\dfrac{dP_i}{d\lambda} = \dfrac{1}{i \cdot \sqrt{2}} \chi_{[0,i]}(y)$ で P_i を決める。$(i=1,\cdots 4)$

一方 $t(y) = [y]+1$ とすれば $\dfrac{dP_i}{d\lambda} = \dfrac{1}{i \cdot \sqrt{2}} \chi_{[0,i]}(t(y))$ となり t によって induce された σ-field は B' の sufficient sub-field であるが，定義1の②を満足しない。しかし P_i $(i=1,2,3,4)$ の定義からわかるように Radon-Nikodym 密度は分解されている。

§3. Adequacy の予測への応用

予測とは$\mathcal{X}$上の関数$Y=f(x)$の値を知って，別の関数$Z=g(x)$の値について何らかの判断を下すことである。そこで予測量Tは$Y=f(x)$の値域上で定義された関数である。

定義6. Y, Zを統計量とする。$T(y)$（Yの値域$\mathcal{Y}$上の関数）を統計量とする。T, Y, Zによってinduceされたσ-fieldを$\mathcal{B}_0$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$とすれば，もし$\mathcal{B}_0 \mathrm{adq}[\mathcal{B}:\mathcal{C}, \mathcal{P}]$が成り立つときTはYに対するZ, $\mathcal{P}$に関するadequate統計量という。
（これを$T \mathrm{adq}[Y: Z, \mathcal{P}]$とかく）

なおこのTをZの予測に関して十分であるともいう.[4]

簡単のためZの値域がR^1である場合を考える。どんな$P\in\mathcal{P}$に対しても，$\gamma(Y)$が$E_P[Z-\gamma(Y)]=0$を満足するとき，$\gamma(Y)$を不偏予測量といい，$\gamma'(Y)$がどんな$P\in\mathcal{P}$に対しても$E_P[(Z-\gamma'(Y))^2]$を最小にするならばこの$\gamma'(Y)$を最小平均2乗誤差予測量という。

定理8.[4]（Rao-Blackwellの定理の拡張）

・$T \mathrm{adq}[Y: Z, \mathcal{P}]$であるとする。$\gamma(y)$を$E_P[\gamma^2(Y)]<\infty\ (\forall P\in\mathcal{P})$なる予測量とする。そこで$\gamma^*(t)=E[\gamma(Y)|T]$（これはPに無関係に決まる）とすれば，どんな$P\in\mathcal{P}$に対しても$E_P[(Z-\gamma^*(T))^2] \leqq E_P[(Z-\gamma(Y))^2]$が成り立つ。（但し$E_P[Z^2]<\infty$ $\forall P\in\mathcal{P}$と仮定する）。特に$\gamma(y)$が不偏予測量であるならば

$\gamma^*(t)$も不偏予測量である。

（証明）　省略.

定理9. $E_p[Z|T]$ がpに無関係であるとする。またどんな$p\in\mathcal{P}$に対しても　$E_p[Z|Y]=E_p[Z|T]$ であるとする。（但し $E_p[Y^2]<\infty\ \ \forall p\in\mathcal{P}$ とする）

そこで$E[Z|T]$ はZの不偏最小平均2乗誤差予測量である。

（証明）　省略

（注意：この定理は古典的回帰関数の方法にすぎない。）

最後に adequate統計量の例をあげておく。

例1[4]. $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ を独立，正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ に従うとする。Zもまた正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ で Y_iとZは独立でなく $Cov(Z,Y_i)=b_i$（既知）であるとする。μ, σ^2は未知で$\mathcal{P}=\{P_\theta,\ \theta=(\mu,\sigma^2),\ -\infty<\mu<\infty,\ 0<\sigma^2<\infty\}$

この場合 $T(y_1,\cdots,y_m)=(\Sigma b_i y_i,\ \Sigma y_i,\ \Sigma y_i^2)$ が adequate 統計量である。

例2.. $Y_1,\cdots,Y_m, Y_{m+1},\cdots,Y_{m+n}$ は互に独立，二項分布（$0<p<1$）に従うものとする。$Y=(Y_1,\cdots,Y_m)$とし $Z=\sum_1^{m+n}Y_i$ とする。このYに対しては$T(y)=\sum_1^m y_i$ が adequate 統計量である。

例3. $Y_1, \cdots, Y_m$を互に独立で，$(0, \theta)$上の一様分布に従うものとする。Zを$(0, y_m)$上の一様分布に従うものとすれば　Zの予測に対して，$T(y_1, \cdots, y_m) = (\max\{y_1, \cdots, y_{m-1}\}, y_m)$が adequate 統計量である。

例4. Y_1は正規分布$N(\mu, 1^2)$　$(-\infty < \mu < \infty$　は未知$)$

Y_2は正規分布$N(y_1, 1^2)$

－－－－－－－－－－－－－－

Y_mは正規分布$N(y_{m-1}, 1^2)$

Zは正規分布$N(y_m, 1^2)$　に従うものとする。

このZの予測に関しては，$T(y_1, \cdots, y_m) = (y_1, y_m)$がadequate統計量である。

例5. $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m, Z = Y_{m+1}$は二項変数とする。

$$P_r\{Y_1 = 1\} = r, \quad P_r\{Y_{i+1} = 1\} = \begin{cases} p & : Y_i = 1 \\ 1-p & : \text{その他} \end{cases}$$

$$P_r\{Y_{i+1} = 0\} = \begin{cases} q & : Y_i = 0 \\ 1-q & : \text{その他} \end{cases}$$

$i = 1, 2, \cdots, m$とする.

$\theta = (r, p, q)$，$0 < r, p, q < 1$　は未知であるとする。一方$y_1, \cdots, y_m$に於て1，1と続いた回数をs，0，0と続いた回数をtとすれば，このZの予測に関して

$T(y_1, \cdots, y_m) = (y_1, t, s, n, y_m)$がadequate統計量で

である。（但し $n=\sum_{1}^{m} y_i$ ）

References

[1] Bahadur. R. R (1954). Sufficiency and Statistical decision functions. Ann Math Stat. 25 423−462

[2] Hall. W. J, Wijsman. R. A and Ghosh. J. K (1965) The relationship between sufficiency and invariance with applications in sequential analysis. Ann. Math Stat 36. 575−614

[3] Skibinsky. M (1967). Adeqaate subfield and sufficiency Ann. Math Stat 38. 155−161

[4] 竹内 啓 (1966). 統計的予測の形式と方法について。経済学論集第32巻 第3号、23−31