数理解析研究所講究録
第47巻 1968年 6-10

Random Field の確率論的定義

津田塾大　　小野山　卓　爾

§1. 準　　備

1. Differentiable manifold M^m $\longleftrightarrow$ (1)Locally compact Hausdorf space. 次元m. (2)C^∞ structure.即ち $\forall a \in M^m$. $U(a)$はaの近傍。$\forall p$ $U(a)$に対して$U(a)$の2点を分離するm個の実数値連続函数の組

$$(u_1^a(p), \cdots , u_m^a(p))$$

が存在する（局所座標）。 $\forall p$ $U(a)$ $U(b)$に対し$U(a)$, $U(b)$での局所座標をそれぞれ

$$(u_1^a(p), \cdots , u_m^a(p)) \quad , \quad (u_1^b(p), \cdots , u_m^b(p))$$

とすると

$$u_i^b(p) = F_i \; (u_1^a(p), \cdots , u_m^a(p)) \quad , \quad i = 1 \; , \cdots , m \; .$$

但しF_iはC^∞ functionとなっている。

2. C^∞ 写像f $\longleftrightarrow$(1) fはM^mからM^nへの写像。(2) $\forall a \in M^m$に対しfはaで連続。即ち$U(a) \supset U \ni p$となるあるUがあって$f(U) \subset V(f(a))$。ここで$V(f(a))$ はM^nの$f(a)$近傍。又，$f(p)$の局所座標が

$$(v_1(f(p)) \quad , \cdots , \; v_n \; (f(p)) \;)$$

の時，各$v_i(f(p))$は$p=a$でC^∞。

3.　<u>Tangent space T^m_a</u>，$a\in M^m$．(1) $p=p(t)$，$(\alpha<t<\beta)$ はM^mの上のグラフで$p(0)=a$とし，また〔α，β〕$\to M^m$の写像としてC^∞写像とする。$p(t)$をC^∞motion starting at aと呼びその全体を$\mathfrak{M}_a$とする。(2) 2つのmotionの同値$p(t)\sim q(t)$とは

$$p(0)=q(0)=a$$

$$\frac{d}{dt}u^a_i(p(t))\Big|_{t=0}=\frac{d}{dt}u^a_i(q(t))\Big|_{t=0},\quad i=1,\cdots,m$$

を意味する。つまり～は2次の微小量を除いての一致を意味する。(3) $\mathfrak{M}_a$を同値関係～で割る。$T^m_a\equiv\mathfrak{M}_a/\sim$。$T^m_a$は$a$における$M^m$の tangent space。これは$m$次元ベクトル空間である。(4) $p(t)$に同値なmotion全体の表わすT^m_aの点を$\{p(t)\}$と記す。

4.　<u>Tangent space</u>の座標。(1) $p_i(t)$を

$$p_i(t)\equiv(\underbrace{0,\cdots,0,t}_{i},0,\cdots,0)$$

で定める。

$$p(t)\sim\sum_{i=1}^{m}\frac{d}{dt}u^a_i(p(t))\Big|_{t=0}p_i(t)$$

であるから，$\{p_i(t)\}\equiv e_i(a)$，$i=1,\cdots,m$なる基底によりT^m_aに座標を導入することができて，

$$\{p(t)\}=\sum_{i=1}^{m}\frac{d}{dt}u^a_i(p(t))\Big|_{t=0}e_i(a).$$

(2) M^mからM^nへのC^∞写像S，$Sa=b$，によりT^m_aからT^n_bへの写像∂S：

$$\partial S\{p(t)\}=\{S\,p(t)\}$$

を定義する。(3) M^nのbでの局所座標をv^b_jとし，T^n_bでの基底を$e_j(b)$，$j=1,\cdots,n$，と記す。

$$\{p(t)\} \equiv x = \sum x_i e_i(a),$$

$$\{q(t)\} \equiv \{Sp(t)\} \equiv y = \sum y_j e_j(b)$$

とおけば，

$$v_j^b(Sp) = F_j(u_1^a(p), \cdots, u_m^a(p)),\ j = 1, \cdots, n$$

であるから写像∂Sが次で直接定義される：

$$y_j = \sum \partial F_j / \partial u_i^a |_{p=a}\, x_i \quad .$$

(4)特にM^mがRiemannian manifold（T_a^mが内積をもった空間）とすれば（$e_i(a)$，$e_j(a)$）≡ g_{ij} はC^∞函数となり，リーマン計量を与える。

§2. 定　　義

1. Random vector field $x(P, \omega)$ ⟷ 上で定義した$x(P)$，$P \in M^n$がrandom element ωに依存するとき⟷ $x(P, \omega)$は確率空間（Ω，$\underline{\underline{B}}$，$P$）とRiemannian manifold M^nの積$M^n \times \Omega$上に定義されたT^n valued random variable.

2. Temporal homogeneity（強定常性）⟷ $x(P, \omega)$と$\partial S x(S^{-1}P, \omega)$が同じ確率法則に従うこと。

3. 特別な場合（強定常）。(1)$M^n = R^n$（n次元ユークリッド空間）。Sはh（h_1，…，h_n）shift $T_h \cdot P = (u_1, \cdots, u_n)$なら

$$(T_h P)_i \equiv u_i(T_h P) = u_i(P) + h_i,\ i = 1, \cdots, n.$$

$x(P, \omega)$を

$$x(P, \omega) = \sum_i x_i(P, \omega)\ e_i(P)$$

とすれば

$$\partial T_h x(T_h^{-1}P, \omega)$$

$$= \partial T_h \sum_i x_i((u_1-h_1, \cdots, u_n-h_n), \omega)\ e_i\ (T_h^{-1}P)$$

$$= \sum_i x_i((u_1-h_1, \cdots, u_n-h_n), \omega)\ \partial T_h e_i (T_h^{-1}P)$$

$$= \sum_i x_i(T_h^{-1}P, \omega)\ e_i(P) \ .$$

そこで強定常性は $x_i(T_h^{-1}P, \omega)$ と $x_i(P, \omega)$ が同じ確率法則に従うことを意味する。(2) $M^n = R^n$，Sが原点のまわりの回転 S_g の場合，$Q = S_g(P)$ とすれば直交行列 $\{g_{ij}\}$ により

$$u_i(Q) = \sum_j g_{ij} u_j(P)$$

と書ける。そこで

$$\partial S_g x(S_g^{-1}P, \omega) = \partial S_g \sum_i x_i(Q, \omega)\ e_i(Q)$$

$$= \sum_i x_i(S_g^{-1}P, \omega) \sum_j g_{ij} e_j(P) \ .$$

従って定常性は，$\sum_i x_i(Q, \omega)\ g_{ij}$ と $x_j(P, \omega)$ とが同法則ということになる。

4. 弱定常性　$M^n = R^n$とし，C_u は$R^n \to T_u$ で

$$C_u a = \{ u + at \}, \quad a \in R^n$$

とする。またτはtranslation，σはrotation とし，

$$\partial\tau : T_u \to T_{\tau u},$$

$$\partial\sigma : T_u \to T_{\sigma u}$$

とおく。量

$$R_x(u, v, a, b) \equiv E[(C_u^{-1} x(u, \omega), a)(C_v^{-1} x(v, \omega), b)]$$

に関して

$$R_x(u, v, a, b) = R_x(u-v, a, b)$$

が成り立つ時，x を弱定常と呼べば，R_x に対する標準スペクトル表現ができる。