数理解析研究所講究録
第 47 巻 1968 年 30-37

直交関数系展開によるHopf方程式の解法

東大　理学部　物理　桑　原　真　二

§ 1. Burgers モデル

我々はこゝで流体力学の方程式を簡単化したBurgers モデル：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \bar{\nu}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.1}$$

について統計流体力学の初期値問題を論ずることにする。この方程式は現実の流体の運動を表わしていないが，一次元の速度 $u\ (x, t)$ （x , t は座標と時間）だけについての方程式で三次元乱流を論ずるよりずっと簡単であるが，数学的特性は十分保存しているものである。$\bar{\nu}$ は Reynolds 数の逆数で，上の方程式は無次元形で書かれている。

$u\ (x, t)$ のFourier 変換

$$v\ (k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i k x} u\ (x, t)\ dx \tag{1.2}$$

で表わせば，（1.1）は

$$\frac{\partial v(k)}{\partial t} + 2\pi i \int k'\ v\ (k-k')\ v\ (k')\ dk' = -4\pi^2\ \bar{\nu}\ k^2\ v(k) \tag{1.3}$$

となる。

§ 2. Hopf 方程式

統計流体力学は，連続無限次元自由度の力学系の統計力学であるから，位相空間は必然的に関

数空間となり，統計分布は分布汎函数で表わされる。すなわち $v(k)$ −空間が位相空間となり

$$P=P\,[v(k)\,;\,t] \tag{2.1}$$

のような分布汎函数を導入しなければならない。分布汎関数のFourier 変換：

$$\Phi\,[z(k)\,;\,t]=\int\cdots\int e^{i\,(z,\,v)}\,P\,[v(k)\,;\,t]\,\delta v \tag{2.2 a}$$

$$(z\,,\,v)=\int z\,v^{*}\,d\,k \tag{2.2 b}$$

は特性汎関数とよばれる。$z(k)$ は

$$z\,(-k)=z^{*}(k) \tag{2.3 a}$$

$$|\,k\,|\to\infty \text{ に対して } z(k)=0 \tag{2.3 b}$$

を満足しているものとする。

特性汎関数に対していわゆるHopf 方程式：

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=\int\int k\,z\,(k+k')\,\frac{\partial^{2}\Phi}{\partial z\,d\,k\,\partial z'\,d\,k'}\,d\,k\,d\,k'$$
$$-4\pi^{2}\,\bar{\nu}\int k^{2}\,z\,\frac{\partial\Phi}{\partial z\,d\,k}\,d\,k \tag{2.4}$$

が成立することが証明できる。この方程式は副条件：

$$\Phi\,[0]=1 \tag{2.5 a}$$

$$|\,\Phi\,[z]\,|\leqq| \tag{2.5 b}$$

および一様性の条件：

$$\Phi\,[e^{2\pi i k a}\,z(k)]=\Phi\,[z] \qquad a=\text{任意} \tag{2.6}$$

の下に解かれねばならない。こゝで $\partial\Phi/\partial z\,d\,k$ は汎関数微分である。すなわち，$z(k)$ を $z(k)+$

$\delta z(k)$ だけ変えるとΦが$\Phi+\delta\Phi$だけ変る時，$\delta\Phi$が

$$\delta\Phi=\int A(k)\delta z(k)dk+O((\delta z)^2) \tag{2.7}$$

で表わされるならば，汎関数微分は

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z dk} = A(k) \tag{2.8}$$

によって定義される。

§3. 直交関数展開による解法

今 $z(k)$ を適当な直交関数系$\varphi_n(k)$：

$$\varphi_n(-k)=\varphi_n^*(k) \tag{3.1 a}$$

$$\int\varphi_\ell^*(k)\varphi_m(k)dk=\delta_{\ell m} \tag{3.1 b}$$

で展開したものとする：

$$z(k)=a_n\varphi_n(k) \tag{3.2}$$

$\Phi[z]$が z の汎関数ということは無限個の係数 a_n の関数であるということと同等である：

$$\Phi[z;t]=\Phi(a_0, a_1, \cdots\cdots ; t) \tag{3.3}$$

そうすると，汎関数微分は無次元個の a_nによる微分の和

$$\frac{\partial}{\partial z dk}=\varphi_\ell^*(k)\frac{\partial}{\partial a_\ell} \tag{3.4}$$

となることが証明される。

(3.4) を用いてHopf 方程式 (2.4) を書きかえると

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\frac{1}{i}A_{\ell mn}a_n\frac{\partial^2\Psi}{\partial a_\ell\partial a_n}-\bar{\nu}A_{\ell m}a_m\frac{\partial\Psi}{\partial a_\ell} \tag{3.5}$$

$$A_{\ell mn}=i\int\int\varphi^*_\ell(k)k'\varphi_m(k')\varphi_n(k+k')\,dk\,dk' \tag{3.6 a}$$

$$A_{\ell m}=4\pi^2\int k^2\varphi^*_\ell(k)\varphi_m(k)\,dk \tag{3.6 b}$$

となる。

§4. 初期値問題

初期において，特性汎関数がGauss形：

$$\Phi_0=\Phi[z,o]=\exp\left\{-\frac{1}{2}\int E(k)zz^*dk\right\} \tag{4.1}$$

であったとする。こゝで$E(k)$は初期のエネルギー・スペクトルであり，我々は

1) $$E(k)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\exp(-k^2/2) \tag{4.2 a}$$

2) $$E(k)=\frac{1}{2\sqrt{2}}k^2\exp(-k^2/2) \tag{4.2 b}$$

を考える。第一のスペクトルはつりがね形，第二のスペクトルは二重つりがね形である。

まず，初期条件 (4.1) と副条件 (2.5) をにらみ合わせて

$$\Phi=\exp\{-Z[z;t]\} \tag{4.3}$$

の形におく。$Z[z]$ はzについてTaylor展開できて

$$Z[z]=Z[o]+\int\left.\frac{\partial Z}{\partial z\,dk}\right|_{z=o}z\,dk+\frac{1}{2!}\int\int\left.\frac{\partial^2 Z}{\partial z\,dk\,\partial z'\,dk'}\right|_{z=z'=o}zz'\,dk\,dk'$$

$$+\frac{1}{3!}\int \frac{\partial^3 Z}{\partial z dk \partial z' dk' \partial z'' dk''}\bigg|_{z=z'=z''=o} z z' z'' dk dk' dk'' + \cdots \tag{4.4}$$

一様性の条件（2.6）を考慮すると

$$\frac{\partial Z}{\partial z d k}\bigg|_{z=o}=0$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z d k \partial z' d k'}\bigg|_{z=z'=o} = A(k, k', t)\,\delta(k+k')$$

$$\frac{\partial^3 Z}{\partial z d k \partial z' d k' \partial z'' d k''}\bigg|_{z=z'=z''=o} = B(k, k', k'', t)\,\delta(k+k'+k'')\ \text{等} \tag{4.5}$$

となる。こゝで$A(k, k', t)$等を直交関数φ_nで展開して

$$A(k, k', t) = c_{\ell m}(t)\,\varphi_{\ell}(k)\,\varphi_m(k')$$

$$B(k, k', k'', t) = c_{\ell m n}(t)\,\varphi_{\ell}(k)\,\varphi_m(k')\,\varphi_n(k')\ \text{等} \tag{4.6}$$

と書くとZは

$$Z=\hat{c}_{qr}\,a_q a_r+\hat{c}_{qrs}\,a_q a_r a_s+\hat{c}_{qrst}\,a_q a_r a_s a_t+\cdots \tag{4.7}$$

$$\hat{c}_{qr}=\alpha_{qr\ell m}\,c_{\ell m}$$

$$\alpha_{qr\ell m}=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_q(k)\,\varphi_r^*(k)\,\varphi_{\ell}(k)\,\varphi_m^*(k)\,dk \tag{4.8 a}$$

$$\hat{c}_{qrs}=\alpha_{qrs\ell mn}\,c_{\ell mn}$$

$$\alpha_{qrs\ell mn}=\iint_{-\infty}^{\infty}\varphi_q(k)\,\varphi_r(k')\,\varphi_s^*(k+k')\,\varphi_{\ell}(k)\,\varphi_m(k')\,\varphi_n(k+k')\,dk\,dk' \tag{4.8 b}$$

$$\hat{c}_{qrst}=\alpha_{qrst\ell mnp}\,c_{\ell mnp}$$

$$\alpha_{qrst\ell mnp}=\iiint_{-\infty}^{\infty}\varphi_q(k)\,\varphi_r(k')\,\varphi_s(k'')\,\varphi_t^*(k+k'+k'')$$

$$\varphi_{\ell}(k)\varphi_m(k')\varphi_n(k'')\varphi_p^*(k+k'+k'')\,dk\,dk'\,dk'' \qquad (4.8\,c)$$

とかける。

今

$$\tilde{c}_{\ell m}=P_2(\hat{c}_{\ell m})=\hat{c}_{\ell m}+\hat{c}_{m\ell}$$

$$\tilde{c}_{\ell mn}=P_3(\hat{c}_{\ell mn})=\hat{c}_{\ell mn}+\hat{c}_{mn\ell}+\hat{c}_{n\ell m}+\hat{c}_{nm\ell}+\hat{c}_{m\ell n}+\hat{c}_{\ell nm} \qquad (4.9)$$

$$\tilde{c}_{\ell mnp}=P_4(\hat{c}_{\ell mnp})$$

とおく。こゝでP_nは始めのnケのサブスクリプトについてのおきかえ（permutation）をして和をとることを示す。$\tilde{c}$についての方程式は（3.5）より得られ

$$\frac{\partial\tilde{c}_{\ell m}}{\partial t}=\frac{1}{i}(A_{qr\ell}\tilde{c}_{qrm}+A_{qrm}\tilde{c}_{qr\ell})-\bar{\nu}(A_{q\ell}\tilde{c}_{qm}+A_{qm}\tilde{c}_{q\ell}) \qquad (4.10\,a)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tilde{c}_{\ell mn}}{\partial t}=&\frac{1}{i}[A_{qr\ell}\tilde{c}_{qrmn}+A_{qrm}\tilde{c}_{qrn\ell}+A_{qrn}\tilde{c}_{qr\ell m}\\&-A_{qr\ell}(\tilde{c}_{qm}\tilde{c}_{rn}+\tilde{c}_{qn}\tilde{c}_{rm})-A_{qrm}(\tilde{c}_{qr}\tilde{c}_{r\ell}+\tilde{c}_{q\ell}\tilde{c}_{rm})\\&-A_{qrn}(\tilde{c}_{q\ell}\tilde{c}_{rm}+\tilde{c}_{qm}\tilde{c}_{r\ell})]-\bar{\nu}(A_{q\ell}\tilde{c}_{qmn}+A_{qm}\tilde{c}_{qn\ell}+A_{qm}\tilde{c}_{q\ell m})\end{aligned} \qquad (4.10\,b)$$

等となる。

§5. Hermite多項式による展開

（4.2）を初期値とする初期値問題において，我々はHermite多項式による直交関数系

$$\varphi_0(k)=\frac{1}{(2\pi)^{1/4}}e^{-k^2/4},\quad \varphi_1(k)=\frac{1}{(2\pi)^{1/4}}ike^{-k^2/4}$$

$$\varphi_2(k)=\frac{1}{\sqrt{2}\,(2\pi)^{1/4}}(k^2-1)\,e^{-k^2/4}$$

$$\varphi_3(k)=\frac{1}{\sqrt{3!}\,(2\pi)^{1/4}}\,i\,(k^3-3k)\,e^{-k^2/4}\quad \text{等} \tag{5.1}$$

をとる。これらは（3.1）の条件を満足している。

φ_0，φ_1 だけをのこし，又，$A(k,k')$，$B(k,k',k'')$までをのこす一番簡単な場合，すなわち $\tilde{c}_{00}$，$\tilde{c}_{11}$，$\tilde{c}_{001}$ 及び $\tilde{c}_{111}$．までをのこす近似において（4.10）は

$$\frac{\partial\tilde{c}_{00}}{\partial t}=\frac{8\,(2\pi)^{1/4}}{i\,3^{3/2}}\tilde{c}_{001}-2\,(2\pi)^2\,\bar{\nu}\,\tilde{c}_{00} \tag{5.2 a}$$

$$\frac{\partial\tilde{c}_{11}}{\partial t}=-\frac{8\,(2\pi)^{1/4}}{i\,3^{3/2}}\tilde{c}_{001}-6\,(2\pi)^2\,\bar{\nu}\,\tilde{c}_{11} \tag{5.2 b}$$

$$\frac{\partial\tilde{c}_{001}}{\partial t}=\frac{8\,(2\pi)^{1/4}}{i\,3^{3/2}}\tilde{c}_{00}\,(\tilde{c}_{00}-\tilde{c}_{11})-5\,(2\pi)^2\,\bar{\nu}\,\tilde{c}_{001} \tag{5.2 c}$$

$$\frac{\partial\tilde{c}_{111}}{\partial t}=-9\,(2\pi)^2\,\bar{\nu}\,\tilde{c}_{111} \tag{5.2 d}$$

となり，初期値はつりがね形1），二重つりがね形2）各々に対して

1）$\tilde{c}_{00}=2\pi^{3/2}$，$\tilde{c}_{11}=\pi^{3/2}$，$\tilde{c}_{001}=\tilde{c}_{111}=0$ （5.3 a）

2）$\tilde{c}_{00}=\pi^{3/2}$，$\tilde{c}_{11}=\frac{3}{2}\pi^{3/2}$，$\tilde{c}_{001}=\tilde{c}_{111}=0$ （5.3 b）

である。

又，$\tilde{c}_{00}$ 等は $A(k,k')$，$B(k,k',k'')$ 等の展開係数 c_{00} 等に

$$c_{00} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}(3\tilde{c}_{00} - 2\tilde{c}_{11}) \quad (5.4\,a)$$

$$c_{11} = -\sqrt{\pi}(\tilde{c}_{00} - 2\tilde{c}_{11}) \quad (5.5\,b)$$

$$c_{001} = -\frac{\sqrt{3\pi}}{17}(15\tilde{c}_{001} + \tilde{c}_{111}) \quad (5.5\,c)$$

$$c_{111} = -\frac{3\sqrt{3}\,\pi}{17}(\tilde{c}_{001} - \tilde{c}_{111}) \quad (5.5\,d)$$

で関係ずけられる。これらからエネルギー・スペクトルおよびエネルギー・伝達関数が計算できる。

今，上記の数値計算を遂行中である。