数理解析研究所講究録
第47巻 1968年 46-56

Burgers Modelに於ける相関量の特性汎函数による計算方法

航宇技術　細　川　巌

§1. 統計流体力学の特性汎函数

確率変数としての非圧縮流体の速度場 $u(x)$（一般にはベクトルであるが，Burgers Modelを念頭においてスカラーとして扱う。）の分布は，特性汎函数によって記述されてもよい。x は物理空間の座標（$-\infty < x < \infty$ としよう。）。特性汎函数は一般に時間的に変化し，t 時刻に於ける特性汎函数は，初期 $t=0$ に於ける u の確率分布 $P_0(u)$ と次のように関係することが，Hopf[1]によって証明されている。

$$\phi(y, t) = \int_\Omega \exp\left\{ i \int y(x) T^t u(x) dx \right\} \delta P_0(u) \tag{1.1}$$

Ω は考えている函数 $u(x)$ の凡てから成る集合，従って，$\int_\Omega \delta P_0(u)$ は測度 $P_0(x)$ による Ω 全体にわたるルベツグ積分を示し，$T^t u(x)$ は，力学法則，即ち，ナヴイエ．ストークス方程式に従って，$u(x)$ が t 時刻後に発展する場を示す。従って，$T^t u$ は，力学方程式の初期値問題の一般解で陽に与えられてもよい。

（1.1）の汎函数微分[1]によって，t 時刻に於ける u の相関量が容易に与えられることは，次の例で理解される。

$$\left.\frac{\delta^2 \phi}{i^2 \delta y(x_1) \delta y(x_2)}\right|_{y=0} = \int_\Omega T^t u(x_1) T^t u(x_2) \delta P_0(u) \tag{1.2}$$

$$\equiv \langle u(x_1) u(x_2) \rangle_t$$

この小論の目的は，汎函数積分（1.2）を直接計算するスキームを与えることである。（1.2）は2点相関であるが，$T^t u$ の沢山の積を作れば，容易に多点相関は作り得る。

§2. 汎函数積分

（1.2）を計算するためには，抽象積分の形（$\int_\Omega \cdot\cdot \delta P_0$）をもっと具体的な形に変えた方が操作上有利である。先ず，xを変数とする完備正規直交函数系$\{s_i(x)\}$を考え，これによってユークリッド空間の無限次元への延長R^∞と等価な函数集合[2]を，次のようにして作る。

$$y(x) \leftarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_k(x) \qquad (2.1)$$

a_kは任意の実数。物理的に実現される速度場の成分が凡てこの集合－Aと呼ぶ－の中に含まれるかどうか問題であるが，これは十分いゝ近似で肯定されると仮定し，そこでΩ＝A（uが3次元ならΩ＝A³）とする。いうまでもなく，AはR^∞の構造をそのまゝ引継ぐことになる。従って，Aにわたる汎函数積分は，ユークリッド空間の中の体積々分によって具体化される可能性が出てくる。この場合，積分される汎函数は変数$\{a_k\}$に依存する函数と考えてよい。所で，空間の次元が∞の時にユークリッドの体積々分の操作が意味を持つには条件があり，たとえば，被積分函数の中に各成分につき正規化されたガウスの因子$(2\pi\sigma)^{-1/2}\exp(-a_k^2/2\sigma)$が含まれるというようなことが必要である。[2]（ガウス測度の汎函数積分。[3]この他いろいろな形の因子も考えられる。）然し，物理学では，被積分函数を陽に表わさないまゝで議論を進めることも多く，そういう場合には積分を意味あらしめるべく必要な条件は具備されたものとして，被積分函数を考えておくのが最も便利である。このような立場から，測度としてはそれ自体では意味をなさない記号[2]

$$\delta y = \prod_{k=1}^{\infty} (da_k/\sqrt{2\pi}) \qquad (2.2)$$

を導入し，$\int_A \delta y$ は $k=1$ に始まるa_kについての積分の無限回繰り返し操作を意味するも

のとしよう。このような積分は，被積分函数の中に前述した測度を構成するための因子があり，被積分函数からそれを除いたものが有界であるなら，確かに存在する。

（1.2）の場合，

$$\delta P_0 = p(u\ ,\ t_0)\ \delta u \tag{2.3}$$

と書かれるような汎函数 $p\ (u\ ,\ t_0)$が与えられ，そして$\Omega = A$であるならば，これが正規化された（定義上$\int_A p\,\delta u = 1$）測度因子となるので，問題なく積分は存在する。pは普通確率密度と呼ぶ所のものであるが，これは期待通り

$$p\ (u\ ,\ t_0) = \int_A \exp\left\{-i\int u(x) y_0(x) d\,x\right\}\phi\ (y_0\ ,\ t_0)\ \delta y_0 \tag{2.4}$$

によって，その時刻の特性汎函数$\phi\ (y_0\ ,\ t_0)$と関係づけられてもよい。こゝで勿論，ϕが然るべき測度の因子をもつこと，いゝ換えれば$\int_A |\phi|\ \delta y_0 < \infty$ が前提されている。（pはϕのFourier 逆変換。[2] これに関連して，デルタ函数と同じような性質を持つデルタ汎函数なども扱うことができる。）

（2.3）－（2.4）を（1.1）に入れると，それは特性汎函数の初期値問題の一般解の形になっている。初期に於いて，速度場の平均量U(x)と２点相関量Q（x ，x'）だけが知れている場合には，

$$\phi\ (y_0\ ,\ t_0) = \exp\left\{i\int U(x) y(x) d\,x - \frac{1}{2}\int\int Q\ (x\ ,\ x')\ y(x) y\ (x')\ d\,x\,d\,x'\right\} \tag{2.5}$$

とするのが最も簡単な方法である。情報理論によると，そのような場合，上の如きGaussの分布が情報エントロピーを最大にする，即ち，最も偏見のない（unbiased）分布であることがいえる。以上の結果，われわれは，（1.2）を実際の場合にあてはめて計算できる具体的な目途を得たといえるだろう。

§3. 確率密度の計算

Burgersの乱流では，平均流は考えないから$U(x)=0$とした（2.5）を仮定し，（2.4）を解析的に計算することを考える。

今，R^{∞}の代りにR^{2N}を取り，

$$y^{2N}(x)\leftarrow \sum_{i=1}^{2N} a_i s_i(x) \tag{3.1}$$

によって，集合$\{y^{2N}(x)\}$を作り，次に，適当な$2N$個の$x=x_m$について

$$y^{2N}(x_m)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{j=1}^{N}\{\eta(k_j)\cos k_j x_m+\varsigma(k_j)\sin k_j x_m\}\triangle k_j \tag{3.2}$$

と置く。但し，$\triangle k_j$は区間（0，∞）から抜き出した互いに重ならないj番目の微小区間で，k_jはその区間の平均座標とする。$2N$個の方程式（3.2）によって，一組の$(a_1,\cdots,a_{2N})$に対する一組の$(\eta(k_1),\cdots,\eta(k_N),\varsigma(k_1),\cdots,\varsigma(k_N))$が定まるが，この一次変換のヤコビアンを調べて見よう。この場合，後の変数の組を$(\eta(k_1)\sqrt{\triangle k_1},\cdots,\eta(k_N)\sqrt{\triangle k_N},\varsigma(k_1)\sqrt{\triangle k_1},\cdots,\varsigma(k_N)\sqrt{\triangle k_N})$とすると，はるかに便利になることが分るであろう。

$x=x_m$を含む微小区間を$\triangle x_m$で示し，mの各値に対する$\triangle x_m$は互いに重ならないように取るとして，（3.1）及び（3.2）の両辺に$s_n(x_m)\triangle x_m$をかけてmについて和を取ると，正規直交函数の性質によって，

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{j=1}^{N}\left\{\eta(k_j)\int_{-\infty}^{\infty}s_n(x)\cos k_j x\,dx+\varsigma(k_j)\int_{-\infty}^{\infty}s_n(x)\sin k_j x\,dx\right\}\triangle k_j+\varepsilon \tag{3.3}$$

となる。こゝでεは，$\sum_m \triangle x_m$が全区間（$-\infty$，∞）を隙間なく埋めて，$\triangle x_m\to 0$ $(2N\to\infty)$の極限で△に収束する量である。

これから，

$$\frac{\partial a_i}{\partial\{\eta(k_j)\sqrt{\triangle k_j}\}}=\sqrt{\frac{\triangle k_j}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}s_i(x)\cos k_jx\,dx+O(\varepsilon)\equiv t_{ij} \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial a_i}{\partial\{\varsigma(k_j)\sqrt{\triangle k_j}\}}=\sqrt{\frac{\triangle k_j}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}s_i(x)\sin k_jx\,dx+O(\varepsilon)\equiv t_{i,N+j} \tag{3.4$'$}$$

更に，

$$\sum_{j=1}^{N}(t_{ij}t_{\ell j}+t_{i,N+j}t_{\ell,N+j})=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dx\,dx'\,s_i(x)s_\ell(x')$$

$$\cdot\sum_{j=1}^{N}(\cos k_jx\cos k_jx'+\sin k_jx\sin k_jx')\triangle k_j+O(\varepsilon)=\delta_{i\ell}+O(\varepsilon)+\varepsilon' \tag{3.5}$$

が得られる。こゝで，ε'は，$\sum_j\triangle k_j$ が区間〔0，∞）を隙間なく埋めて$\triangle k_j\to 0$ $(N\to\infty)$の極限で0に収束する量である。（3.4）－（3.5）は，変換$\{a_i\}\to\{\eta(k_j)\sqrt{\triangle k_j},\ \varsigma(k_j)\sqrt{\triangle k_j}\}$が，丁度直交変換に近いものになっていることを示している。

従って，（2.2）に相当して，

$$\delta y^{2N}=\prod_{k=1}^{2N}(da_k/\sqrt{2\pi})$$

$$\cong\prod_{i}^{N}\{d\eta(k_i)\sqrt{\triangle k_i/2\pi}\cdot d\varsigma(k_i)\sqrt{\triangle k_i/2\pi}\} \tag{3.6}$$

と書くことができ，この近似関係はε，$\varepsilon'\to 0$の時に厳密になるであろう。そのような極限では，$\delta y^{2N}\to\delta y$。そして殆んど凡てのxに対して，

$$y(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\{\eta(k)\cos kx+\varsigma(x)\sin kx\}\,dk \tag{3.7}$$

が成り立つ。そこで，便宜上，

$$\delta y = \overset{\infty}{\pi}\left\{ d\eta(k)\sqrt{dk/2\pi} \cdot d\varsigma(k)\sqrt{dk/2\pi} \right\} \tag{3.8}$$

という書き方を許すことにしよう。（3.7）は，

$$\eta(k)=\frac{z(k)+z\ (-k)}{\sqrt{2}}\ ,\ \varsigma(k)=\frac{i\left\{ z(k)-z\ (-k) \right\}}{\sqrt{2}} \tag{3.9}$$

を導入することによって，

$$y(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} z(k)e^{ikx}dk \tag{3.10}$$

と書かれてもよい。但し，$z^{*}(k)=z\ (-k)$ である。（＊は共役複素数。）

さて，（2.5）に戻り，Q が空間的に一様で，

$$Q\ (x-x')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma(k)e^{ik(x-x')}dk \tag{3.11}$$

とフーリエ分解される時は，ϕ の exp の肩は次のように簡単な形に帰着する。

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}Q\ (x-x')\ y_0(x)y_0(x')\,dx\,dx'=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma(x)z_0(k)z_0(-k)\,dk$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\mathrm{Re}\ [\sigma(k)]\left\{ \eta_0^{2}(k)+\varsigma_0^{2}(k) \right\}dk \tag{3.12}$$

（Re は実数部を示す。）次に

$$u(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}\sqrt{\mathrm{Re}\ [\delta(k)]}\left\{ A(k)\cos kx + M(k)\sin kx \right\}dk \tag{3.13}$$

という，やゝ技巧的なフーリエ分解を行なうと，

$$\int_{-\infty}^{\infty}y_0(x)u(x)\,dx=\int_{0}^{\infty}\sqrt{\mathrm{Re}\ [\sigma(k)]}\ \left\{ A(k)\eta(k)+M(k)\varsigma(k) \right\}dk \tag{3.14}$$

が得られる。（3.12）を（2.5）に入れ，これと（3.14）を（2.4）に入れて，（3.8）の内容を考えれば，（2.4）の積分は遂行でき，

$$p\ (u\ ,\ t_0)=\exp\ \left[-\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left\{\Lambda(k)^2+M(k)^2\right\}dk\right]\prod^{\infty}\left(1/\sqrt{\mathrm{Re}\,\sigma(k)}\right)^2 \tag{3.15}$$

となる。

以上でこの節の目的は終ったが，一方，（3.13）で示される$u(x)$について，（3.8）を用いると，

$$\delta u=\prod^{\infty}\left\{\sqrt{\mathrm{Re}\,[\sigma(k)]}\ d\Lambda(k)\sqrt{dk/2\pi}\cdot\sqrt{\mathrm{Re}\,[\sigma(k)]}\ dM(k)\sqrt{dx/2\pi}\right\} \tag{3.16}$$

であるから，（3.15）と合わせて，

$$p\ (u\ ,\ t_0)\ \delta u=\exp\ \left[-\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left\{\Lambda(k)^2+M(k)^2\right\}dk\right]\prod^{\infty}\left\{d\Lambda(k)\sqrt{dk/2\pi}\,dM(k)\sqrt{dk/2\pi}\right\} \tag{3.17}$$

を得る。これはまさに変数$\left\{\Lambda(k)\sqrt{dk},\ M(k)\sqrt{dk}\right\}$が標準正規分布に従うことを意味する。

§4. モンテカルロ法の適用

（1.2）の$\delta P_0(u)$は（3.17）によって具体化されたので，次に$T^t u$を考察する。Burgers' modelの場合は，xを（$-\infty$，∞）の中に取った時，Hopf[4]とCole[5]によって，

$$T^t u=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}(x-x')\ \exp\left\{-\frac{R}{2}\int_0^{x'}u(x'')\,dx''-\frac{R\,(x-x')^2}{4t}\right\}dx'}{t\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{R}{2}\int_0^{x'}u\ (x'')\ dx''-\frac{R\ (x-x')^2}{4t}\right\}dx'} \tag{4.1}$$

と陽の表現が得られている。念の為，$u(x)$の時間的発展を律するBurgers の基礎方程式は無次元型で

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4.2}$$

と書かれ，Rは乱流の初期スケールM，初期速度の自乗平均$\sqrt{Q(0)}$を使ったレイノルズ数であることを注意する。

従って，u の単位は$\sqrt{Q(0)}$，x の単位はM，時間 t の単位は$M/\sqrt{Q(0)}$である。

（3.1 3）を（4.1）に代入すると，$T^t u$ はΛ及びMの陽に与えられた汎函数となる。従って，（1.2）は，この場合，（3.1 7）から見られる通り一種のガウス測度の汎函数積分になっているわけである。$T^t u$ が有界なら積分が存在するのは明らかであるが，実際の計算は，（4.1）の複雑さのために容易でない。そこで，なんらかの近似が要求される。特にRの大きい所に興味がある。（そこでは，（4.2）から見られるように，非線型効果が相対的に優越する故。）

高度の多重積分が本質的な働きをしているような現在の問題には，モンテカルロ法が有望のように思われる。今の場合には，モンテカルロ法の操作は甚だ簡単であって，$\{\Lambda(k)\sqrt{dk}$，$M(k)\sqrt{dk}\}$ の値として，夫々独立な標準正規乱数を与えて，$T^t u(x)$　$T^t u(x')$を計算し，これを多数繰り返えして，その平均値を取れば（1.2）を近似的に計算したことになるのである。実際には，$\triangle k_j$ 有限で計算するから，このための誤差（ε，$\varepsilon' \neq 0$）も入ってくる。従って，精度については，適当なチエックをする必要があろう。

今の場合，誤差について概していえることを列記しておこう。

(1)　モンテカルロ法の誤差

イ）試行回数によるもの。これは回数の平方根の逆数に比例する。importance sampling などいろいろな改善策もある。

ロ）擬似乱数によるもの。完全な乱数は存在しないので，試行回数を或る数以上上げても結果は或る範囲で振動し，それ以上の精度は得られない。

(2)　$\triangle k_j$ 有限の誤差

（3.1 3）の中に$\sigma(k)$があるが，通常これは，kに対して強い減衰性をもっているので，これを考慮して

$$u(x) \cong \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=1}^{N} \sqrt{\mathrm{Re}\,[\sigma(k_j)]}\,\{\Lambda(k_j)\cos k_j x + M(k_j)\sin k_j x\}\triangle k_j \qquad (4.3)$$

とすることができる。Nを適当に（大きく）取ると，これが有限であることに基く誤差は，$\triangle k_j$

有限による台形法則の誤差よりも小さくすることができる。こうすると，$T^t u$ には$\{A(k)\sqrt{dk}, M(k)\sqrt{dk} \mid k > k_N\}$ が含まれないことになり，これらの変数についての積分は（3.17）によって凡て独立に実行できて，常に1になり，（3.1 7）は実質的に，

$$p\delta u \cong \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\{A(k)^2+M(k)^2\}\triangle k_j\right]\prod_{j=1}^{N}\{dA(k_j)\sqrt{\triangle k_j/2\pi}\,dM(k_j)\sqrt{\triangle k_j/2\pi}\} \qquad (4.4)$$

と考えてもよいことになる。こゝには，$\triangle k_j$ 有限による ε，$\varepsilon' \doteqdot 0$ の誤差だけが含まれており，それは$\triangle k_j$ の定差による台形法則の誤差の程度である。

(3) $T^t u$ の計算誤差

研究会の講演では，適当にQを与えた計算の実例を示し，結果についての討論も行ったが，ここでは省略し，別の機会に詳しく述べることにする。

§5. 補　足

以上に述べた方法は，$T^t u$ の形が陽に与えられる時には，いつでも使える。そうでない場合は，特性汎函数の方法は駄目かというと，必ずしもそうではない。実際初期値uを与えて，$T^t u$を近似的に計算する一般的手段があれば，目的は達するのである。たとえば，初期値問題を解くのにuの基礎方程式に於いて，$u(x,t) = \sum_{j=1}^{N} b_i(t)s_i(x)$と展開し，$\{b_i(t)\}$ についての連立常微分方程式を作って，これをRunge−Kutta法で解くというやり方が考えられる。（一種のGalerkin 法といえるかも知れない。）

前節に関連させて，使い易い形でいうならば，（講演で述べたものと少し異なるが，）

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{j=1}^{N'}\{\lambda(k_j,t)\cos k_j x + \mu(k_j,t)\sin k_j x\}\triangle k_j \qquad (5.1)$$

と置く。$t = t_0$ では，これは（4.3）と一致する。但し，$N' > N$ である。従って，

$$\lambda(k_j, t_0) = \begin{cases} \sqrt{\mathrm{Re}\,[\sigma(k_j)]}\, A(k_j), & j \leqq N \\ 0 & , j > N \end{cases} \tag{5.2}$$

$$\mu(k_j, t_0) = \begin{cases} \sqrt{\mathrm{Re}\,[\sigma(k_j)]}\, M(k_j) & , j \leqq N \\ 0 & , j > N \end{cases} \tag{5.3}$$

uの基礎方程式に（5.1）を入れれば，λ，μを支配する（非線型の）常微分方程式は簡単に得られる。k_jと$\triangle k_j$を適当に択ぶと（5.1）はフーリエ級数の形になることを利用する。これを（5.2）（5.3）を初期条件としてRunge−Kutta法で解いたものを通して，$u(x, t)$は常に$\{A(k_j)\sqrt{\triangle k_j}, M(k_j)\sqrt{\triangle k_j}\}$の函数として与えられ，これを$T^t u$と見れば，もはや，前節のスキームはそのまゝ通用する筈である。始めにN有限であっても，時間と共に$u(x, t)$の中に高調波成分が発生する可能性を容れて，$N' \geqq N$としたのであるが，N'が有限であることは，この場合，もう一つの誤差の原因として，列記されなければならない。精度の判定は，N'を変えた場合の解の変り方によって得られる。

tが余り大きくない限り，一組の正規乱数に対してRunge−Kutta法を実行する計算時間は，（4.1）に与えられた$T^t u$の表現を数値計算する時間と比べ得る程度なので，将来性はあると見てよいだろう。

文　　献

1) E. Hopf : J. Rat. Meth. Anal. 1 (1952) 87.

2) I. Hosokawa : J. Math. Phys. 8 (1967) 221.

3) K.O. Friedrichs et al : Integration of Functionals, lecture notes, Inst. Math. Sci., New York Univ. (1957).

4) E. Hopf : Commun. Pure Appl. Math. 3 (1950) 201.

5) J. D. Cole : Quart. Appl. Math. 9 (1951) 225.

― 後　　記 ―

本論でやゝheuristic（formalというべきか？）に扱った汎函数積分の操作については，数学者による明快な解説がない限り，納得しない方も多いかも知れない。モスクワの数理物理学者Yaglom教授（大気物理研究所，1966）も，無限次元ベクトルの分布を与える確率密度をいきなり出して来るEdwards（J. Fluid MeCh. 18（1964），239）の乱流理論に疑問を抱いている一人であった。これについての，私の意見は次のPeierls教授の発言に代弁される。“..... For many years Dirac's use of the delta function was frowned upon by some mathematicians as inconsistent. So it was, of course, but no more so than Newton's use of the coefficient dy/dx with infinitely small numerator and denominator. It would have been a correct but unconstructive approach to tell Newton his equations were meaningless. It was more constructive to develop concepts that made them meaningful.” - Analysis in Function Space (M. I. T., 1964).