

操作量を線型に含む非線型制御系の最適制御
(動最適と静最適との関係)

京大工 布川 昊

1. 序

現場においては、多くのプロセスは定常状態で運転されている。そのため、実在のプロセスの動最適問題は、定常(静)最適点への最短時間制御問題という形で取扱われがちである。この最短時間問題への還元という考えの背後には、運転開始後の過渡状態が終熄すれば、プロセスは定常状態へ移行するのであるから、もし運転時間が十分長ければ、動最適軌道は静最適点へ移行する、したがって静最適操作は、近似的には、動最適操作になっている、という素朴な確信があるように思われる。本稿の目的は、この現場技術者の確信を数学的に検討することである。

2. 基本的な定義と問題

2.1 記号、以下ベクトル x は常に列ベクトルを表わす。

(1)

$$x = \text{col}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

x の転置行列は ${}^t x$ で、したがって ${}^t x$ は行ベクトルを表わす。
 ${}^t x y$ は内積を意味する。行列 A は $\det A$ で、 A' は A の転置を、 A^{-1} は $\det A \neq 0$ のとき A の逆行列を表わすものとする。

ベクトル変数 x のスカラー関数に対して、

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \text{grad } f = \text{col}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

と書く。 $f(x)$ の 2 階微分は Hesse の行列

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right), \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

を、また、ベクトル関数 $g(x)$ の x による微分は Jacobi の行列

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right), \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n$$

を表わすものとする。以上の準備のもとに基本的な定義と問題を述べる。

2.2 定義と問題：以下において動最適制御問題および静最適制御問題は定義 1 および定義 2 の意味であると解釈する。

[定義 1] プロセスの基本方程式を

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \quad u \in U \quad (2.1)$$

とする。ただし、 x は n -ベクトル、 u は r -ベクトル、 U

は R_n のコンパクトな部分集合で、操作 u の許容範囲を表わすものである。このとき、つぎの汎関数

$$J = \int_0^T f_0(x, u) dt \quad (2.2)$$

を最大ならしめる u を求める問題を動最適制御問題という。この解を $u_{op}(t)$ 、これに対応する応答を $x_{op}(t)$ と書くことにする。

[定義2] 定常状態 $\dot{x} = 0$ においては、上の動最適問題は、つぎの条件付最大値問題となる。すなわち、付帯条件

$$f(x, u) = 0, \quad u \in U \quad (2.3)$$

のもとに、

$$f_0(x, u) \quad (2.4)$$

を最大にせよ。この問題を静最適制御問題とよぶことにする。この解を u^* 、 x^* と書く。

以上の定義のもとにおいては、序に述べた現場技術者の確信はつぎのようにまとめられる。

[問題] T が十分大きければ、 $u_{op}(t)$ 、 $x_{op}(t)$ は u^* 、 x^* で代用できる。つまり

$$u_{op}(t) = u^*, \quad x_{op}(t) = x^*, \quad t \in [T_1, T_2] \quad (2.5)$$

ここで $[\tau, \tau]$ は $[0, T]$ の部分区間で、 T が大きければ、その主要部分を占める。あるいは

$$f_0(x^*, u^*) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f_0(x_{op}(t), u_{op}(t)) dt \quad (2.6)$$

が成立する。(2.5)式または(2.6)式が成立するための条件を求めよ。

2.3. 問題解決の手掛り、解決の糸口を見出すために、動最適制御問題と静最適制御問題とに対する代表的な解法である、最大原理と未定乗数法との比較を行なう。最大原理によれば、 ψ を補助変数ベクトルとするとき、 $u_{op}(t)$ はつぎのハミルトニアン

$$H(x, \psi, u) = f_0(x, u) + \psi^T f(x, u) \quad (2.7)$$

を U において最大にする。また $x_{op}(t)$ とそれに対応する $\psi_{op}(t)$ は正準方程式

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi}, \quad \frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (2.8)$$

を満足する。もし $u_{op}(t) \in U^\circ$ (U° は U の内核) ならば $u_{op}(t)$ は

$$\frac{\partial H(x, \psi; u)}{\partial u} = 0 \quad (2.9)$$

を満たす。さて、一方、(2.7)式において、 ψ を Lagrange の

未定乗数とみなせば、 $u^* \in U^0$ なるとき、 u^*, x^*, ψ^* は

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial \psi} = 0 \quad (2.10)$$

を満足しなければならない。以上の簡単な考察から、つぎの命題が得られる。

[命題1] 関数 H の最大値が U の内部に存在するならば、静最適値 x^* およびそれに対応する ψ の値 ψ^* は、正準方程式 (2.8) の定値となる。したがって、 (x, ψ) 空間において、 $x_{op}(t), \psi_{op}(t)$ は決して有限時間内では、 x^*, ψ^* に達することはない。もし $x_{op}(t), \psi_{op}(t)$ が有限時間で x^*, ψ^* に達するならば、その時の操作は U の境界上になければならない。つまり、 $u_{op} \in \partial U$, (∂U は U の境界)。

この命題は (x, ψ) 空間で成立するものであるから、 x 空間では $x_{op}(t)$ は x^* に有限時間で達するかもしれない。そのような結果は有用ではない。それ故、さらにすゝんだ結果を引き出すために、対象を表題の系に限定する。すなわち

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + G(x)u, \quad u \in U \quad (2.11)$$

$$J = \int_0^T \{ f_0(x) + {}^t g_0(x)u \} dt \quad (2.12)$$

ここで x, u はともに n -ベクトル、 $f_0(x)$ はスカラー関数、

$f(x)$, $g_0(x)$ はベクトル関数. $G(x)$ は正則な行列であるとし、これらの関数はすべて適当に滑らかであるとする.

3. 変分法からの接近

3.1 Euler の方程式と静最適. (2.11) 式と (2.12) 式とから、 u を消去すれば、

$$J = \int_0^T \{ q(x) + {}^t p(x) \dot{x} \} dt, \quad \dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} \quad (3.1)$$

ただし

$$q(x) \equiv f_0(x) - {}^t g(x) G^{-1}(x) f(x), \quad p(x) \equiv {}^t G^{-1}(x) g_0(x), \quad (3.2)$$

となる. ここで、静最適 x^* は $q(x)$ 最大点であることを注意しておく. このとき、(3.1) 式の Euler の方程式は

$$\left\{ \frac{\partial p}{\partial x} - {}^t \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \right\} \dot{x} = \frac{\partial q}{\partial x} \quad (3.3)$$

で与えられる. あきらかに、 $\partial q(x^*) / \partial x = 0$ であるから、つぎの命題を得る.

[命題 2] 静最適 x^* は Euler の方程式 (3.3) の定常点である. まって、 x 空間においても、命題 1 と同様の結果が得られる. とくに、 $u_{op}(t) \in U^0$ ならば、 $x_{op}(t)$ は無限時間経っても x^* に近づかない.

[証明] 最後に述べた事実は、 $q(x) = \text{const.}$ が (3.3) 式のオ

積分であるという事実から導かれる。(QED):

3.2. 基本的な結果

(3.3) 式において、 $\partial p / \partial x$ が対称行列、つまり

$$\frac{\partial p(x)}{\partial x} = {}^t \left(\frac{\partial p(x)}{\partial x} \right) \quad (3.4)$$

ならば、(3.3) 式はもはや微分方程式ではなくなる。この場合には、つぎの Pfaff 形式

$${}^t p(x) \dot{x} dt \quad (3.5)$$

が完全微分となる。そこで、(3.5) 式を $dW(x)$ 、ただし $W(x)$ はスカラー関数、とおけば、積分 (3.1) は、

$$J = \int_0^T q(x) dt + W[x(T)] - W[x(0)] \quad (3.6)$$

となる。(3.6) 式から分かるように、積分 (3.1) の第 1 項のみが、途中の積分路に関係し、第 2 項は $x(t)$ の端点のみに関係する。さて、 x^* は $q(x)$ の最大点であったから、積分 (3.1) または (3.6) を最大にする軌道 $x_{op}(t)$ は、 T が十分大きいときには、できるだけ早く x^* に達し、そこで静止しているようなものとなる筈である。よって、つぎの定理を得る

[定理 1] 2.2 節に述べた問題の十分条件は、(3.4) 式が

成立すること、つまり

$$\frac{\partial p(x)}{\partial x} \quad \text{たゞし} \quad p(x) = {}^t G(x)^{-1} g_0(x) \quad (3.7)$$

が R_n で対称行列となることである。

この条件は、つぎに示すように、ほとんど必要である。

[定理2] 問題の必要条件は、静最適のある近傍において、(3.4)式が成立することである。

[証明] いま区間 $\tau_1 \leq t \leq \tau_2$ において、 $x_{op}(t) = x^*$ が成立しているものとする。ここで $[\tau_1, \tau_2] \subset [0, T]$ である。いま定数 x^* の変分を $\xi(t)$ とすれば、(3.1)式の第2変分は

$$\delta^2 J = \int_0^T \left\{ {}^t \xi \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right)^* \xi + {}^t \xi \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^* - {}^t \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^* \right] \xi \right\} dt \quad (3.8)$$

と書くことができる。ここで *印は、 $x=x^*$ における値であることを示すものとする。さて、 $\partial p / \partial x$ が対称行列でなければ、 $\xi(t)$ を適当に選んで、(3.8)式が正負いずれの符号をもとり得ることを示そう。一般性を失うことなく、 $\partial p_1 / \partial x_2$ キ $\partial p_2 / \partial x_1$ と仮定してよい。ここで $p_1(x)$, $p_2(x)$ はそれぞれベクトル $p(x)$ の第1, 第2成分である。このとき $\xi(t)$ として、区間 $[\tau_1, \tau_2]$ に含まれるある区間 $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ にお

いて、

$$\begin{aligned} \xi_1(t) &= \pm \sin \frac{\pi}{\alpha} (t-t_0), \quad \xi_2(t) = 1 + \cos \frac{\pi}{\alpha} (t-t_0) \\ \xi_3(t) &= \xi_4(t) = \dots = \xi_n(t) = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

とし、その他では $\xi(t)=0$ となる関数を選ぶは、(3.8) 式は

$$\delta^2 J = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} + 3 \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} \right)^* \alpha \pm 2\pi \left(\frac{\partial p_1}{\partial x_2} - \frac{\partial p_2}{\partial x_1} \right)^*$$

となることを示すことができる。ここで α を十分小さくとれば、 $\delta^2 J$ は正負いずれともなり得る。 $u^* \in U^0$ と仮定しているから、変分(3.8)は許容範囲内の操作量で構成できることは明らかである。よって、 $\partial p / \partial x$ が対称行列でなければ、 x^* に止まる軌道は最適ではない(QED)。

3.3 化学プロセスへの応用

$\partial p / \partial x$ が対称であるという条件の実際的意味を示すために、Fig. 1 に図示した、完全混合型流通反応槽の最適制御問題を取上げよう。反応は

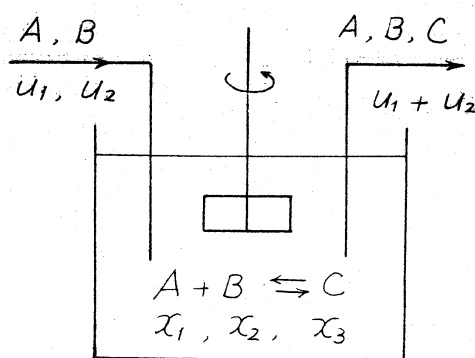


Fig. 1



なる型であるとする。以下 (i) 体積変化なし, (ii) 温度変化なし、と仮定する。したがって、プロセスの基礎方程式は、反応物値 A, B, C の濃度 x_1, x_2, x_3 だけによって記述できる。 A, B, C のモル比容を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ とすれば、

$$\frac{x_1}{\alpha_1} + \frac{x_2}{\alpha_2} + \frac{x_3}{\alpha_3} = 1 \quad (3.11)$$

なる関係が成立するから、方程式は x_1, x_2 だけで表わすことができる。 A と B との物値収支の式はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= r_1(x_1, x_2) + (\alpha_1 - x_1)u_1 - x_1u_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= r_2(x_1, x_2) - x_2u_1 + (\alpha_2 - x_2)u_2 \end{aligned} \quad (3.12)$$

ここで、 $r_1(x_1, x_2), r_2(x_1, x_2)$ は反応速度、 u_1, u_2 は A, B の供給速度で、これが操作量である。また反応槽の容積は単位にとつてある。さて、目的関数として、このプロセスからの総収益を採ることにしよう。いま b_1, b_2, b_3 を A, B, C の混合状態における、単位モルあたりの価格; a_1, a_2, a_3 を分離された純粋状態の A, B, C の単価であるとする。分離のための費用が無視できない場合には $a_i > b_i, (i=1, 2, 3)$ であり、 $\alpha_i(a_i - b_i) (i=1, 2, 3)$ は A, B, C の単位体積を分離するに要する費用である。さて総収益はつぎのように書ける。

$$J = \int_0^T \left\{ \left(\sum_{i=1}^3 b_i x_i - a_1 \alpha_1 \right) u_1 + \left(\sum_{i=1}^3 b_i x_i - a_2 \alpha_2 \right) u_2 \right\} dt. \quad (3.13)$$

(3.12)式より行列 $G(x)$ は

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 - x_1 & , & -x_1 \\ -x_2 & , & \alpha_2 - x_2 \end{pmatrix}$$

であり、その行列式は、(3.11)式を用いれば、

$$\det G(x) = \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_1 x_2 - \alpha_2 x_1 = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_3} x_3$$

となる。よって $x_3 \neq 0$ 、つまり C が槽内に存在すれば、 $G^{-1}(x)$ が存在し

$${}^t G^{-1}(x) = \frac{\alpha_3}{\alpha_1 \alpha_2 x_3} \begin{pmatrix} \alpha_2 - x_2 & , & x_2 \\ x_1 & , & \alpha_1 - x_1 \end{pmatrix}$$

と書ける。一方 (3.13)より、ベクトル $g_0(x)$ は

$${}^t g_0(x) = \left(\sum_{i=1}^3 b_i x_i - a_1 \alpha_1, \sum_{i=1}^3 b_i x_i - a_2 \alpha_2 \right)$$

であるから、 $\forall p \in \mathbb{R}^2$, $p = {}^t G^{-1} g_0$ が対称行列であるための条件は、

$$\alpha_1 (a_1 - b_1) = \alpha_2 (a_2 - b_2) \quad (3.14)$$

となる。よって、つぎの結果が得られた。

[定理3] 化学プロセスの最適制御 (3.12), (3.13) において

は、AとBとの単位体積を分離するための費用が等しいとき、
 静最適制御はまた動最適制御にもなっている。

4. 最大原理による検討

4.1 特異解 最適制御の具体的手順を決めるため、つまり、アルゴリズムを決めるためには、操作の許容範囲 U の境界 ∂U 上をも吟味しなければならない。そのためには最大原理が有用である。3節の結果は最大原理を用いてつぎのように述べることができる。(2.11)式, (2.12)式からハミルトニアンを作れば、

$$H = f_0(x) + {}^t g_0(x)u + {}^t \psi \{ f(x) + G(x)u \} \quad (4.1)$$

となる。(4.1)式は u に関して1次式である。よって u の係数を A とおく。すなわち、

$$H = {}^t A u + f_0(x) + {}^t \psi f(x), \quad A = {}^t G(x) \psi + g_0(x) \quad (4.2)$$

と書いておく。もし $A \neq 0$ ならば、関数 H の最大値は ∂U 上にある。一方 $A = 0$ ならば、 U の内点を吟味しなければならない。そのような場合は、特異であると呼ばれる³。この場合について、つぎの定理が得られる。

[定理 4] $A=0$ の状態が持続する場合には、つぎの関係式が成立する。

$$\begin{aligned} (i) \quad \psi &= -p(x) \quad , \quad (ii) \quad H = q(x) \\ (iii) \quad \frac{dA}{dt} &= {}^tG \left[\left\{ \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) - {}^t \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \right\} \dot{x} - \frac{\partial q}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (4.3)$$

[証明] (i), (ii) は自明であるから、(iii) のみを証明する。
 A を t で微分すれば、

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial A}{\partial \psi} \dot{\psi} \quad , \quad A = {}^tG(x)\psi + g_0(x) \quad (4.4)$$

である。 $\partial A / \partial \psi = {}^tG(x)$ であるから、(4.3) (iii) を示すためには、(4.4) において

$$(a) \quad \left[\frac{\partial A}{\partial x} \right]_{A=0} = {}^tG \frac{\partial p}{\partial x} \quad , \quad (b) \quad [\dot{\psi}]_{A=0} = - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \dot{x} - \frac{\partial q}{\partial x} \quad (4.5)$$

なることを示せばよい。まず (4.5), (a) を証明する。 $\partial A / \partial x$ の i 列ベクトルは $\partial A / \partial x_i$ であるから、(4.3), (i) によつて

$$\left[\frac{\partial A}{\partial x_i} \right]_{A=0} = \left[\frac{\partial {}^tG\psi}{\partial x_i} + \frac{\partial g_0}{\partial x_i} \right]_{\psi=-p} = \frac{\partial {}^tG}{\partial x_i} p + \frac{\partial g_0}{\partial x_i} \quad (4.6)$$

一方 $\partial p / \partial x$ の i 列ベクトルは

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial ({}^tG^{-1}g_0)}{\partial x_i} = {}^tG^{-1} \left[- \frac{\partial {}^tG}{\partial x_i} {}^tG^{-1}g_0 + \frac{\partial g_0}{\partial x_i} \right] \quad (4.7)$$

である。 $p = {}^tG^{-1}g_0$ であるから、(4.5), (a) が成立する。

(4.5), (b) の証明はつぎの通りである。

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -{}^t\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)u - \left[\frac{\partial f_0}{\partial x} + {}^t\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\psi\right] \quad (4.8)$$

において、(4.5), (a), (4.3), (i) および

$${}^t\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)p = \frac{\partial({}^t p f)}{\partial x} - {}^t\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)f$$

に留意すれば、

$$[\dot{\psi}]_{A=0} = -{}^t\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)(Gu+f) - \frac{\partial}{\partial x}(f_0 - {}^t p f) \quad (4.9)$$

を得る。 $\dot{x} = Gu+f$ であり、また (3.2) 式より $g(x) = f_0(x) - g(x)G^{-1}(x)f(x) = f_0(x) - {}^t p(x)f(x)$ であったから、(4.9) は (4.5), (b) に等しいことが分かる (QED)。

定理 4 は、つぎの 1 次元問題を解くのに大変役に立つ。

4.2 1次元の問題

1次元の最適制御問題を取扱う。

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad |u| \leq 1 \quad (4.10)$$

$$J = \int_0^T \{f_0(x) + g_0(x)u\} dt \quad (4.11)$$

ここで、変数および関数はスカラー量である。1次元の場合は、 $\partial p / \partial x = {}^t(\partial p / \partial x)$ は自動的に満たされ、つぎの結果を証

明することができる。

[定理5] T が十分大きいとき、最適軌道は、 $u = \pm 1$ によって、静最適点へ最短時間で達し、それ以後そこに止まるような軌道である。さらに、この結果は、初期値が固定されている場合には、終端値が自由であっても、固定されていても、変らない。

[証明] 自律系においては、よく知られているように、

$$\max_{u \in U} H(x, \dot{x}, u) = \text{const.} \quad (4.12)$$

が成り立つ。したがって、1次元の問題に対しては、(4.12)式は最適軌道の候補となるところの停留軌道群を表わしている。この軌道群の様相を図示することができれば、問題は解ける。以下においては、簡単化するため、 $g(x) > 0$ 、 $u(x) = -f(x)/g(x)$ は単調増加関数であるとする。さらに $u = \pm 1$ とこの関数との交点の x 座標を $x = x^\pm$ とする。このとき $-1 \leq u \leq +1$ の各点は $x^- \leq x \leq x^+$ の各点に 1:1 に対応し、 $u = u^0$ を一つ固定すれば、それに対応する $x = x^0$ は微分方程(4.10)の安定な唯一の定常点となる。明らかに

$$[\dot{x}]_{u=1} = f(x) + g(x) > 0, \quad x < x^+ \quad (4.13)_1$$

$$[\dot{x}]_{u=-1} = f(x) - g(x) < 0, \quad x > x^- \quad (4.13)_2$$

が成り立つ。さらに x^* を

$$\bar{g}(x) = f_0(x) - g_0(x) f(x) / g(x) \quad (4.14)$$

の孤立最大点とし、 $x^- < x^* < x^+$ と仮定する。さて、この場合のハミルトニアンは

$$H = f_0(x) + g_0(x)u + \psi \{ f(x) + g(x)u \} \quad (4.15)$$

であり、 H における u の係数は

$$A(x, \psi) = g(x)\psi + g_0(x) \quad (4.16)$$

となる。ここで、

$$A^+ \equiv \{x, \psi \mid A(x, \psi) > 0\}$$

$$A^- \equiv \{x, \psi \mid A(x, \psi) < 0\}$$

$$A^0 \equiv \{x, \psi \mid A(x, \psi) = 0\}$$

と定義すれば、 $g(x) > 0$ であるから、(4.16)式より、領域 A^+ は曲線 A^0 の上方 (ψ の正の方向) に位置し、領域 A^- は下方に位置する (Fig. 2 参照)。このとき停留軌道群 $\max H = \text{const.}$ は、 A^\pm, A^0 において、次式で記述される。

$$\begin{aligned}
 H(x, \psi, +1) &= \text{const.} \quad \text{in } A^+ \\
 H(x, \psi, -1) &= \text{const.} \quad \text{in } A^- \\
 dq(x)/dx &= 0 \quad \text{in } A^0
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

上式の最後の関係式はつぎの議論から導かれる。スイッチング曲線 A^0 上においては、特異解を調べなければならぬが、定理4, (iii)によれば、つぎの関係が成立している。

$$[\dot{A}]_{A=0} = -g(x) \frac{dq(x)}{dx} \tag{4.18}$$

よって特異解は $dq(x)/dx = 0$ を保持するものである。以後 $q(x)$ の停留点を特異点と呼ぶことにしよう。停留軌道の模様を決定するために、(4.18)式は重要な働きを演じる。曲線 A^0 上の軌道の挙動は(4.18)式によって定まるからである。

その理由は、 $dq/dx > 0$ は $\dot{A} < 0$ を意味し、このとき軌道は曲線 A^0 を A^+ から A^- の方へと横切る、 $dq/dx < 0$ ならばその反対である、また特異点では A^0 に接する方向に走る、という事が分かるからである。さらに、(4.13)式から知れる通り、特異点においては、軌道は領域 A^+ においては x^+ の向きつまり $\dot{x} > 0$ の向きに (Fig. 2 においては右方)、領域 A^- においては $\dot{x} < 0$ の向き (Fig. 2 で左方) に走る。そのため $q(x)$ の停留点が極大か極小かによって特異点近傍の軌道の様子が二通

りに分れる、それを補題として示せば、

[補題] $q(x)$ の極大点に対応する特異点の近傍の軌道は、鞍部点の近傍の軌道の模様に似、 $q(x)$ の極小点に対応する特異点の近傍の軌道は、渦心点の近傍の軌道の模様に似ている。

この A^0 近傍での軌道の局所的な模様は、定理4, (ii) によつて全 (x, ψ) 平面に延長できる、その理由は

$$[H]_{A=0} = q(x) \quad (4.19)$$

により、曲線 $H(x, \psi, \pm 1) = \text{const.}$ は曲線 A^0 と同じ $q(x)$ の値を持つ点で交わるからである。したがって、もし

$H(x, \psi, \pm 1) = \text{const.} > q(x^*)$ ならば、これらの曲線は、曲線 A^0 と決して交わらない。このようにして、停留軌道群は、 $q(x)$ の形状によつて定まってしまうのである (Fig. 2 参照)。

Fig. 2 は、 $q(x)$ が2つの極大点 (対応する特異点は S^* と S) と一つの極小点を持つ場合を示している。さて以上の準備のもとに、十分 T が大きいとき、最適軌道を決定することができる。 S^* を最大点に対応するものとする、つまり静最適点とする。また A^\pm は S^* を通る $u = \pm 1$ に対応する2つの軌道とする。さて、与えられた終端条件 $x = x(T)$ または横断性の条件 $\psi(T) = 0$ を、 T 度 $t = T$ なる時刻に満足するためには、どこかで時間待ちをしなければならない。それは、特異操作によ

つて、 S^* または S にとどめておくか、あるいは S を通る閉軌道 γ に沿ったの bang-bang 操作によつてのみ可能である。これら三者のうち、最適軌道は S^* を通る軌道 A^\pm であることが、つぎのようにして示せる。 S で止まるものが失格であることは自明である。 γ に沿うものが、 S で止まるものよりあることは次のようにして分る。そのためには

$$\int_0^\theta \{f_0(x_s) + g_0(x_s)u_s\} dt > \oint_\gamma \{f_0(x) + g_0(x)u\} dt \quad (4.20)$$

を示せばよい。ここで θ は閉軌道 γ を一周するに要する時間つまり周期である。また u_s は S に状態をとどめておくための特異制御の値である。さて

$$H = f_0(x) + g_0(x)u + \dot{x}\psi$$

であるから、(4.20) 式の右辺は、次式で与えられる。

$$\oint_\gamma \{f_0(x) + g_0(x)u\} dt = \oint_\gamma H dt - \psi(x) dx \quad (4.21)$$

ここで $\psi(x)$ は次式から定まり、

$$H = f_0(x) \pm g_0(x) + \{f(x) \pm g(x)\}\psi, \text{ in } A^\pm$$

また、(4.19) 式より、 H は、

$$H = \dot{q}(x_s) = f_0(x_s) + g_0(x_s)u_s$$

で定まるから、(4.20)式の差は：左辺 - 右辺は

$$\oint \psi(x) dx$$

となる。積分路 γ は時計廻りであるから、上の積分は γ で囲まれる図形の面積に等しく、したがって正值である。よって(4.20)式の不等号の向きが成立する。最後に Γ^+ または Γ^- は、どちらかは必ず x 軸と交る($\psi=0$)ことを確かめておこう。それは $x = x^*$ が正準方程式の分離枝であるから当然である。以上によつて、 S^* つまり静最適点を通る軌道が最適であることが知られた。とくに、 S^* が $\psi < 0$ の領域にあれば、弧 PS^*R と QS^*R が最適、反対に $\psi > 0$ の領域にあれば、弧 PS^*R と QS^*R が最適軌道となる。そのわけは、横断性の条件を満足するものが、 S^* の位置によつて、 Γ^+ か Γ^- のいずれかとなるからである。以上の考察から、最適制御のアルゴリズムは

- (i) $x > x^*$ ならば, $u = -1$
 - (ii) $x < x^*$ ならば, $u = +1$
 - (iii) $x = x^*$ ならば, $u = u^*$
- (4.22)

となり、これは静最適点への最短時間制御である。また、 T が長くなるにつれ、 x^* に止まる時間も長くなる(QED)。 +

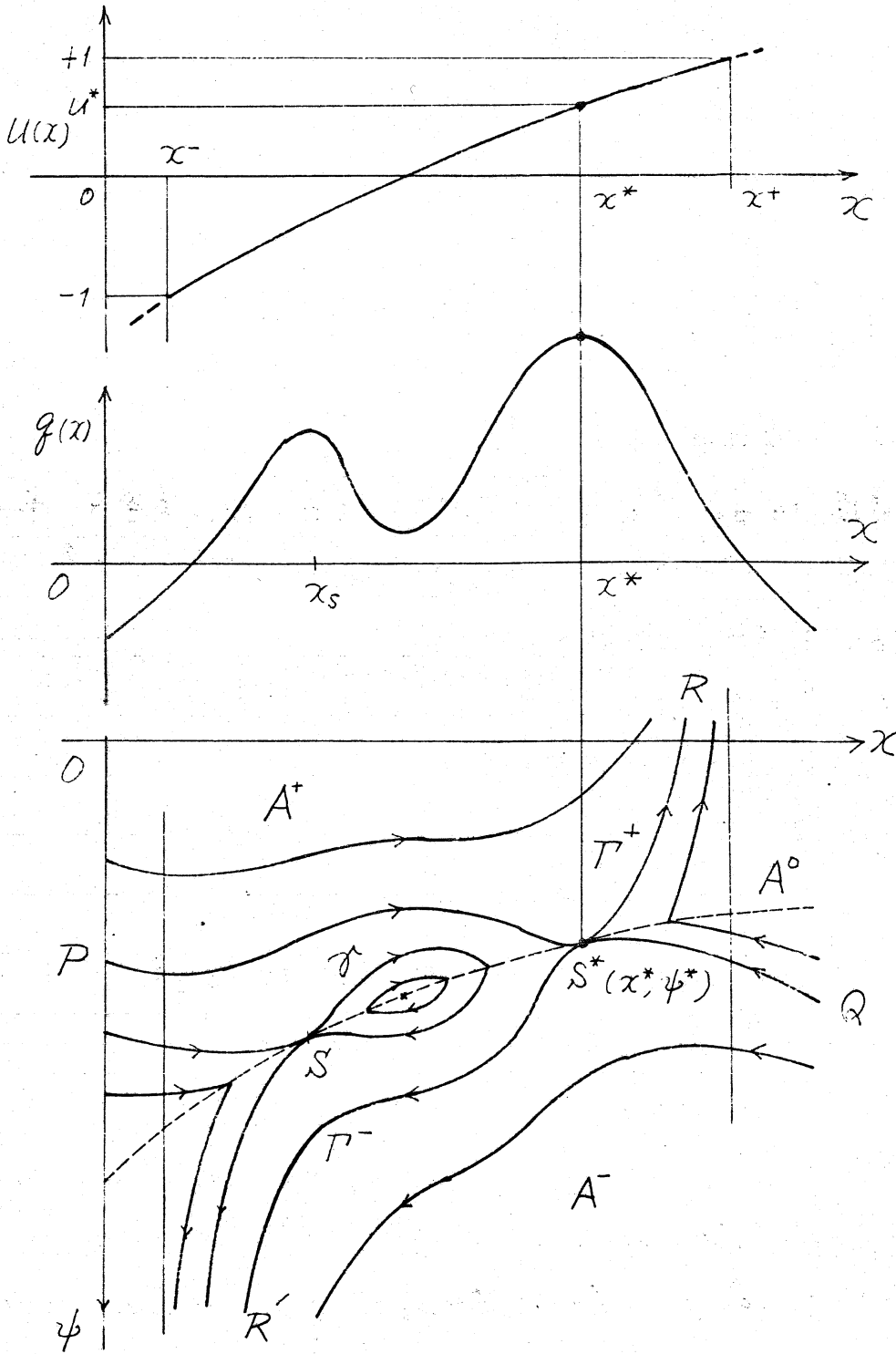


FIG. 2

5 結 言

操作量を線型に含む非線型制御系の最適制御問題を論じ、つぎの結果を得た。

- (i) 運転時間が十分長いときには、静最適操作を動最適操作と見做してもよい条件は (3.4) 式が成立することである。
- (ii) 特に1次元の問題では、動最適制御問題の解は、静最適への最短時間制御である。

最近 Shima によつて、(3.4) 式が成立しない場合は、動最適制御は、境界制御: $u_p(t) \in \Gamma$ なることが示された⁴。

終りに臨み、本研究に色々御指示、御協力を戴いた、京大、工、榎木善一教授、京教大、勝向昭一郎助教授、阪大基礎工島助手に深甚なる謝意を表する。

参考文献

- (1) L. S. Pontryagin et al: *The Mathematical Theory of Optimal Processes*; John Wiley, (1962).
- (2) G. D. Birkhoff: *Dynamical Systems*; Amer. Math. Soc. (1927)
- (3) C. D. Johnson: *Singular Solutions in Problems of Optimal Control*; *Advances in Control Systems*, 2, Academic Press (1965).
- (4) K. Shima: *On the Optimality of the Boundary Control*; (to be published).