数理解析研究所講究録
第48巻 1968年 23-38

制御系の可観測性について

京大工　得丸英勝
〃　足立紀彦

§1. はしがき

内部の構造が不明なシステム，いわゆる Black Box があり，我々が観測できる量は入力および出力とよばれる量だけであるとする．この入力と出力の関係を記述するためにシステムの状態という概念を導入する．"状態"はシステムの過去の挙動を集約したものであり，現時点での状態と以後の入力が与えられるならば出力は一意的に決定される．この状態・入力・出力の関係を表現するものがいわゆる制御系の方程式である．この表現形式は系の特性と実際上の要求によって種々考えられる．入力と出力に関する情報によって，与えられた系は一定の方程式に Identify される．今，何らかの方法で制御方程式が得られたとする．このとき，得られた方程式が与えられたシステムを表現するのに必要十分なものであるかということが問題となる．

"十分性"は状態方程式の解の一意性によって保証される．他方，"必要性"を検討するための一つの有効な概念が制御系の可制御性（Controllability），可観測性といった概念であると考えられる．これらはともに，システムを記述するのに導入された状態空間が必要以上に広くとられていないかを問題とするものである．簡単にいえば可制御性ということは状態空間のうちに過去の入力の情報を含んでいない部分が存在するか否かを問題とし，可観測性は状態空間のうちに出力に影響を及ぼさない部分が存在するか否かを問題とするものである．状態方程式の解の一意性と，可制御性，可観測性が成立しているならば制御方程式は与えられたシステムを表現するのに"必要十分"であることが保証されるのである．

この可制御性，可観測性の概念は R.E. Kalman によって導入されたもので現在では System theory の重要な分野となっている[1]．これらの概念，手法が非線型系，あるいは Stochastic システムにどのような意義をもち，拡張されるべきかということは問題であるが，ここでは主として可観測性をとり上げて，最初に線型系について知られている結果を簡単に紹介して，つぎに非線形系への拡張の試みを述べることにする．以後取扱うシステムは常微分方程式によって表わされているものとする．

§2 線形系の可観測性

制御方程式は以下の如くである。

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \qquad (2.1)$$

$$y = C(t)x \qquad (2.2)$$

ここに $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$，$x \in R^n$ は状態ベクトル，$u \in R^r$ は操作入力，$y \in R^p$ は出力ベクトルである。可観測性を考える場合操作入力の項は本質的な問題とならないので以下

$$\dot{x} = A(t)x \qquad (2.3)$$

$$y = C(t)x \qquad (2.4)$$

なるシステムについて考える。観測時間は一定として $T = \{t ; t_0 \le t \le t_1\}$ において出力 $y(\cdot)$ が観測された時このデータによってシステムの $t = t_0$ における状態を決定できるか否かを考える。(2.3) の初期条件 $x(t_0) = \xi$ のもとでの解を $x(t;\xi)$ と表わすと

$$x(t;\xi) = X(t)\xi \qquad t \in T$$

ただし $n \times n$ 行列 $X(t)$ は (2.3) の基本行列である。すなわち

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) \quad , \quad X(t_0) = I$$

によって定義される。

システム (2.3)，(2.4) の可観測性をつぎの如く定義する。

定義1　与えられた状態ξにたいしてある$\bar{\xi}$が存在して

$$C(t)x(t;\xi) = C(t)x(t;\bar{\xi}) \qquad t\in T$$

が成立すれば $\xi=\bar{\xi}$ なるとき状態ξは（Tに於て）可観測であるという．全ての $\xi\in R^n$ が可観測であるときシステム(2.3), (2.4)は可観測であるという．

この定義よりただちに，線形系に於ては原点0が可観測ならばシステムは可観測であることが分る．すなわち，システムは　$C(t)X(t)\xi=0$　$t\in T$ が成立するのは $\xi=0$ に限るときその時のみ可観測である．行列 $C(t)X(t)$ の n 個の列ベクトルが T 上で一次独立であることが可観測であるための必要十分条件である．この条件を別の形で述べれば $n\times n$ 行列　$M(t_0,t_1)$ を

$$M(t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1} X'(t)C'(t)C(t)X(t)\,dt \qquad (2.5)$$

と定義するとき，

補題1　制御系(2.3), (2.4)が可観測であるための必要十分条件は行列 $M(t_0,t_1)$ が Nonsingular なることである．

もし可観測でないならば R^n の部分空間 N を

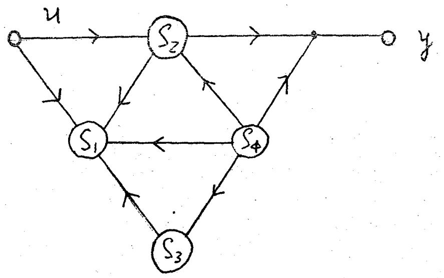
$$N\equiv\{x;\ C(t)X(t)x=0 \quad t\in T\}$$

と定義し N による商空間 R^n/N を新しく $t=t_0$ における状態空間とすることができる．てきとうな条件のもとで R^n/N を状態空間とした制御方程式を考えることができる．

同様のことは可制御性についても考えることができる．たとえば time-Invariant なシステムについては状態空間は可制御，可観測の組合せによって

$$R^n = S_1 \oplus S_2 \oplus S_3 \oplus S_4$$

と表わされ，これらの関係は図式的に下の様に示される．[1]



この図より入－出力関係を記述するに必要十分な空間は R^n の部分空間 S_2 であることが分る．なお可制御性と可観測性については双対的関係があることが知られており，もとのシステムにたいして dual System が定義されて，もとのシステムの可制御，可観測という性質は dual System の可観測，可制御という性質になる．

§3　線型系の $\{\tau_j\}$－可観測性

前節では $y(t)$ は $[t_0, t_1]$ において連続的に観測可能なものと仮定してきたが実際の問題としては $y(t)$ は特定の瞬間にサンプリングによって観測可能な場合がある．このような $y(t)$ のサンプリングによってシステムの状態を決定できるかという問題を考える．

Tにおける連続なn次元ベクトル関数による空間をC^nとしてC^nからR^mへの変換$P: C^n \to R^m$を

$$Px(\cdot) = \{y(\tau_1), \cdots, y(\tau_m)\} \quad (3.1)$$

と定義する. ただし$\tau_i \in T$ $(i=1,2,\cdots,m)$は与えられたサンプリングの時刻である.

<u>定義2</u> $\xi \in R^n$を与えられた状態として, ある$\bar{\xi} \in R^n$にたいして

$$Px(\cdot;\xi) = P(x(\cdot;\bar{\xi}))$$

ならば$\xi = \bar{\xi}$の時ξは$\{\tau_i\}$-可観測であるという. 全ての$\xi \in R^n$が$\{\tau_i\}$-可観測ならばシステムが$\{\tau_i\}$-可観測であるという.

ある$n \times n$行列$Q(t)$と定数ベクトル$c \in R^n$にたいして

$$\bar{P}: C^{n \times n} \to R^n$$

を

$$(\bar{P}Q(\cdot))c = P(Q(\cdot)c)$$

によって定義すると上の定義よりただちに次の結果を得る.

<u>補題2</u> 制御系(2.3), (2.4)が$\{\tau_i\}$-可観測なための必要十分条件は

$$\mathrm{Det}\ \bar{P}X(\cdot) \neq 0 \quad (3.2)$$

なることである.

$\bar{P}X$の具体的な形は

$$\bar{P}X = \begin{pmatrix} c(\tau_1)X(\tau_1) \\ \vdots \\ c(\tau_m)X(\tau_m) \end{pmatrix}$$

となる.

先の定義では $\{\tau_i\}$ は与えられたものと考えたが，逆に，$\{\tau_i\}$-可観測なる τ_j $(j=1\cdots n)$ が存在するか否かという問題が残るがこれは n-可観測という概念で取扱われている[(2)].

§4　非線形系の局所的可観測性

簡単のため time-invariant な系

$$\dot{x} = f(x) \tag{4.1}$$

$$y = c(x)\ ,\quad f(0)=0,\ c(0)=0 \tag{4.2}$$

x: n vector , y: p vector , $f(x)$, $c(x)$ は連続微分可能な関数とする。

定義3　ある定数 $\varepsilon>0$ が存在して $|\xi|<\varepsilon$, $|\bar{\xi}|<\varepsilon$ にたいする (4.1) の解を $x(t;\xi)$, $x(t;\bar{\xi})$ とおくとき $t\in T$ にたいして

$$c(x(t;\xi)) = c(x(t;\bar{\xi}))$$

ならば $\xi=\bar{\xi}$ なるときシステム (4.1), (4.2) は局所的可観測であるという。

補題3　システム (4.1), (4.2) は

$$\mathrm{rank}\,[\,H',\ A'H',\ \cdots,\ A'^{\,n-1}H'\,] = n$$

ならば局所的可観測である。

ただし　$H=\dfrac{\partial c(0)}{\partial x}$,　$A=\dfrac{\partial f(0)}{\partial x}$ である。

これは (4.1), (4.2) を原点のまわりで線形化したシステムが可観測ならばもとのシステムは局所的可観測なることを意味する。

§5 準線形系の可観測性

$$\dot{x} = A(t)x + \varepsilon\psi(x,t) \qquad (5.1)$$

$$y = C(t)x, \qquad (5.2)$$

によって表わされるシステムを考える.

記号を以下の如く定める.

$$|x| = \sum_{1}^{n} |x_i|, \qquad |A| = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|x(\cdot)\| = \max_t \{|x(t)| \,;\, t \in T\}, \quad \|A(t)\| = \max_t \{|A(t)| : t \in T\}$$

C^n ; 連続な n 次元ベクトル関数の空間 ノルムは $\|x(\cdot)\|$ によって定義される.

$C^{n\times n}$: T にて定義された連続な $n\times n$ 行列の空間 ノルムは $\|A(\cdot)\|$ によって定義.

$D_0 \subset R^n$ をある領域として, D_0 における可観測性をつぎのように定義する.

<u>定義4.</u> ξ を与えられた状態として, ある $\bar{\xi} \in D_0$ にたいして

$$C(t)x(t;\xi) = C(t)x(t;\bar{\xi}) \qquad t \in T$$

ならば $\xi = \bar{\xi}$ の時 ξ は D_0 に於て可観測であるという.
任意の $\xi \in D_0$ が D_0 に於て可観測のときシステムは D_0 に於て可観測であるという.

<u>定理1</u>

システム (5.1), (5.2) の初期状態の領域を D_0 とし,
領域 D を任意 $\xi \in D_0$ にたいして $x(t;\xi) \in D$ $t \in T$ なるよう

にとる．(5.1)，(5.2) は以下の条件を満足するものとする．

(i) ある定数 L が存在して，任意の $x_1, x_2 \in D$ において，$|\psi(x_1, t) - \psi(x_2, t)| \leq L\,|x_1 - x_2| \quad t \in T$,

(ii) 線形系
$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x \\ y = C(t)x \end{cases}$$
は T において可観測である．

この時
$$\varepsilon \cdot \eta < \frac{2}{abdm\tau_0^2 L} \tag{5.3}$$
ならばシステム (5.1), (5.2) は D_0 において可観測である．ただし，定数 η, a, b, d, m τ_0，はつぎの如く定義されている．

$$\|X(\cdot)\| = a, \quad \|X^{-1}(\cdot)\| = b \quad \int_T |X^{-1}(t)|\,dt = c, \quad \tau_0 = t_1 - t_0$$

$$|M(t_0, t_1)^{-1}| = m \qquad \|H(\cdot)\| = d, \quad \eta = \exp(\varepsilon a c L)$$

$$H(t) = X'(t)\,C'(t)\,C(t)\,X(t)$$

<u>証明</u> (5.1) の線形部分の基本行列を $X(t)$ とすると $x(t_0) = z$ なる解は
$$x(t; z) = X(t)\left\{ z + \varepsilon \int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)\,\psi(x(s; z), s)\,ds \right\} \tag{5.4}$$
と表わされる．今 $z, \bar{z} \in D_0$，$z \neq \bar{z}$ が存在して $z, \bar{z}$ に対応する $y(t)$ が T に於て一致していると仮定する．

$$C(t)X(t)\left\{ z + \varepsilon\int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)\,\psi(x(s:z),s)\,ds \right\}$$
$$= C(t)X(t)\left\{ \bar{z} + \varepsilon\int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)\,\psi(x(s:\bar{z}),s)\,ds \right\} \qquad t\in T \tag{5.5}$$

(5.5) を書き直して

$$C(t)X(t)\left[(z-\bar{z}) + \varepsilon\int^{t} X^{-1}(s)\left\{ \psi(x(s:z),s) - \psi(x(s:\bar{z}),s)\right\} ds \right] = 0$$

両辺に $X'(t)C'(t)$ をかけて $t_0 \to t_1$ で積分すると

$$M(t_0,t_1)(z-\bar{z}) + \varepsilon\int_{t_0}^{t_1} X'(\sigma)C'(\sigma)C(\sigma)X(\sigma)\int^{\sigma} X^{-1}(s)\left\{ \qquad \right\} ds\,d\sigma = 0$$

定理の条件 (ii) によって $M(t_0,t_1)$ は Nonsingular だから（補題1）

$$\bar{z} - z = \varepsilon M^{-1}(t_0,t_1)\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{\sigma} H(\sigma)X^{-1}(s)\left\{ \psi(x(s:z),s) - \psi(x(s:\bar{z}),s)\right\} ds\,d\sigma$$

条件 (i) によって

$$|\bar{z}-z| \le L\varepsilon\, |M^{-1}(t_0,t_1)| \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{\sigma} |H(\sigma)|\,|X^{-1}(s)|\,|x(s:z) - x(s,\bar{z})|\,ds\,d\sigma$$

一方 $|x(t:z) - x(t:\bar{z})|$ を評価すると

$$|x(t:z) - x(t:\bar{z})| \le a|z-\bar{z}| + \varepsilon\int^{t} La|X^{-1}(\sigma)|\,|x(\sigma:z) - x(\sigma:\bar{z})|\,d\sigma$$

より，
$$|x(t:z) - x(t:\bar{z})| \le a|z-\bar{z}|\ \exp\left\{ \varepsilon La \int^{t} |X^{-1}(\sigma)|\,d\sigma \right\}$$
$$\le a|z-\bar{z}|\ \exp(\varepsilon Lac)$$
$$= \eta a|z-\bar{z}| \tag{5.6}$$

(5.6) より

$$|z-\bar{z}| \le \varepsilon La\eta m\ |z-\bar{z}| \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{\alpha} |H(\sigma)|\,|X^{-1}(s)|\,ds\,d\alpha$$

$\leq \frac{1}{2} m \varepsilon \eta \cdot a b d L \tau_0^2 \; |z - \bar{z}|$

$= \alpha |z - \bar{z}|$　　ただし　$\alpha = \frac{1}{2} m \varepsilon \eta a b d L \tau_0^2$

結局　$|z - \bar{z}| \leq \alpha |z - \bar{z}|$

(iii) によって $0 < \alpha < 1$ 、これは $z \neq \bar{z}$ という最初の仮定に反する.　証明終り.

<u>Ex. 1.</u>

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 + \varepsilon (x_1^3/3) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 + \varepsilon (x_2^3/3) \end{cases} \tag{5.7}$$

$$y = x_1 \quad , \quad |\varepsilon| < 10^{-2}$$

$T = \{ t : 0 \leq t \leq 2\pi \}$ とする.

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t, & \cos t \end{pmatrix}, \quad X^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \cos t, & -\sin t \\ \sin t, & \cos t \end{pmatrix}$$

$$M(0, 2\pi) = \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \pi \end{pmatrix}$$

$D_0 = \{ x : |x| < 0.2 \}$, $D = \{ |x| < 1 \}$ とすると

$a = b = 2\sqrt{2}$　$c = 16$, $m = \frac{2}{\pi}$, $d = 2$, $\tau_0 = 2\pi$, $L = 1$

$\eta \equiv \exp(\varepsilon a c L) < 1.57$

これより

$|\varepsilon| < 3.2 \times 10^{-3}$

ならば $D_0 = \{ x : |x| < 0.2 \}$ に於て (5.7) は可観測となる.

§6 非線形系の可観測性

記号は§5と同様に定義されているものとする。

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \qquad (6.1)$$

$$y = C(t)x \qquad t \in T \qquad (6.2)$$

<u>定義5</u>　$\xi \in R^n$, $\varepsilon > 0$ が与えられた時 ξ が領域

$D_0 = \{\bar{\xi} : |\xi - \bar{\xi}| < \varepsilon\}$ に於て可観測のとき ξ は

ε-可観測であるという。

<u>定理2</u>　(6.1) に於て

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}, \quad \left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}\right) \quad (i, j, k = 1 \cdots n)$$

は　$T \times R^n$ に於て連続、とする。

(i)

$$\alpha(t) = \sup\{|A(t,x)| : x \in R^n\} \qquad (6.3)$$

$$\beta_k(t) = \sup\{|b(t,x)| : |x| < k\} \qquad (6.4)$$

は T に於て積分可能、かつ

$$\liminf_{k \to \infty} \frac{1}{k} \int_T \beta_k(t)\, dt = 0 \qquad (6.5)$$

ただし、

$$A(t,x) \equiv \frac{\partial f}{\partial x}, \quad b(t,x) \equiv f(t,x) - A(t,x)x$$

(ii) ある τ_j $(j = 1 \cdots m)$ について、線形系

$$\frac{dx}{dt} = A(t, y(t))x \qquad (6.6)$$

$$z(t) = C(t)x(t) \qquad (6.7)$$

は任意の $y(\cdot) \in C^n$ にたいして $\{\tau_j\}$- 可観測である.

(iii)
$$\varepsilon < \frac{1}{M} \exp\left(-\int_T \alpha(t)\,dt\right)$$

ただし

$$M = \left\{ ab\,(1 + ac\|P\|)\right\} \int_T |\bar{\beta}_k|\,dt$$

$$\bar{\beta}_k^i(t) = \sup\left\{ \left| \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j, \partial x_k} \right| \; ; \; |x| < K \right\}$$

$$P \; : \; C^n \to R^m \qquad Px(\cdot) = (y(\tau_1), \cdots, y(\tau_m))$$

$$\|P\| = \sup\{ Px(\cdot) \; ; \; \|x\| \leqq 1 \}$$

$$\max_{y \in C^n} \|X(\cdot\,; y(\cdot))\| = a, \quad \max_{y \in C^n} \|X^{-1}(\cdot\,; y(\cdot))\| = b$$

$$\max_{y \in C^n} |(\bar{P}X(\cdot\,; y(\cdot)))^{-1}| = c.$$

$X(t\,; y(\cdot))$ は (6.6) の基本行列である.

また K は

$$ac|\gamma| + (1 + ac\|P\|)ab\int \beta_k(t)\,dt < K \qquad (6.8)$$

$$(\gamma_j = C(\tau_j)x(x_j\,; z) \qquad j = 1 \cdots, m)$$

なるようにとられているものとする.

以上の条件が満足されるならば状態 z は ε- 可観測である.

証明　$x(t;\beta) = x^*(t)$ と記す。

境界値問題

$$\left.\begin{array}{l}\dot{x} = A(t,x)x + b(t,x)\\ Px(\cdot) = \gamma\end{array}\right\} \qquad (6.9)$$

は $\|x^*(\cdot) - x(\cdot)\| < \frac{1}{M}$ なる領域に於て $x^*(\cdot)$ 以外に解を持たないことを示す。$y(\cdot) \in C^n$ に $x(\cdot) \in C^n$ を対応させる写像 $S : C^n \to C^n$ を

$$\left.\begin{array}{l}\dot{x} = A(t, y(t)) + b(t, y(t))\\ Px(\cdot) = \gamma\end{array}\right\} \qquad (6.10)$$

によって定義すると条件 (ii) によって S は任意 $y(\cdot) \in C^n$ にたいして定義される。(6.10) の解は

$$x(t) = X(t;y(\cdot))\left[PX(t)\right]^{-1}\left(\gamma - Px_0(t)\right) + x_0(t) \qquad (6.11)$$

$$x_0(t) = X(t;y(\cdot))\int_0^t X^{-1}(s;y(\cdot))\,b(s,y(s))\,ds$$

と表わされる。また条件 (i), (ii) によって

$$\max\|X(\cdot,y(\cdot))\|,\quad \max\|X^{-1}(\cdot,y(\cdot))\|$$

$\max|[PX]^{-1}|$ は存在することが証明できる[3]。

したがって (6.11) より

$$\|x(\cdot)\| \le ac|\gamma| + (1+ac)ab\int_T |b(s,y(s))|\,ds$$

条件 (i) より (6.8) が成立するように選ぶことができてそのような K にたいして S は

$$D \equiv \{y(\cdot) \in C^n ;\ \|y\| \le K\}$$

をそれ自身に移す写像となる。

$x^*(\cdot) = x(\cdot\,;\xi) \in D$ として　$x^0(\cdot) \in D$ にたいして

$x^1 = Sx^0,\ \cdots,\ x^n = Sx^{n-1}(\cdot),\ \cdots,$ と定義する。

$$\dot{x}^n = A(t, x^{n-1}(t))x^n + b(t, x^{n-1}(t)),\quad Px^n(\cdot) = \gamma$$

$$\dot{x}^* = A(t, x^*(t))x^* + b(t, x^*(t)),\quad Px^* = \gamma$$

$\Delta x^n(t) = x^*(t) - x^n(t)$　と定義すると

$$\left.\begin{aligned} \Delta\dot{x}_n(t) &= A(t, x^{n-1}(t))\,\Delta x^n(t) + \bar{b}^{n-1}(t, \Delta x^{n-1}) \\ P\Delta x^n(\cdot) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (6.12)$$

が成立する。ただし

$$\bar{b}_i^{n-1}(t, \Delta x^{n-1}) = \sum_{k,j} \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j \partial x_k}\right|_{x=\theta_i} (x_j^* - x_j^{n-1})(x_k^* - x_k^{n-1})$$

$$\theta_i = x^{n-1} + h_i(x^* - x^{n-1})$$

$$|h_i| \leq 1,$$

(6.12) の解は，

$$\Delta x^n(t) = X(t\,;x^{n-1}(\cdot))\Big\{[\bar{P}X(t\,;x^{n-1}(\cdot))]^{-1}[-P\int_{t_0}^{t} X(t\,;x^{n-1}(\cdot))$$

$$X^{-1}(s\,;x^{n-1}(\cdot))\,\bar{b}^{n-1}(s\,;\Delta x^{n-1}(s))]ds\Big\}$$

$$+\int^{t} X(t\,;x^{n-1}(\cdot))X^{-1}(s\,;x^{n-1}(\cdot))\,\bar{b}^{n-1}(s\,;\Delta x^{n-1}(s))\,ds$$

$$\|\Delta x^n\| \leq \Big\{(1+ac\|P\|)\,ab\int_T |\bar{\varphi}_k|\,dt\Big\}\|\Delta x^{n-1}\|^2$$

$$= M\,\|\Delta x^{n-1}\|^2$$

$$\|\Delta x_n(\cdot)\| \le M\|\Delta x_{n-1}\|^2 \cdots < \frac{1}{M}\{M\|x^0(\cdot)-x^*\|\}^{2n}$$

したがって $\|x^0-x^*\| < \frac{1}{M}$ ならば $x^0(\cdot), \cdots x^n(\cdot) \cdots$ は $x^*(\cdot)$ に収束する。(6.9) の解は S の不動点であるから $\|x^*-x\| < \frac{1}{M}$ なる領域に於ては $x^*(\cdot)$ が Unique な解である。

さて (6.9) の解 $x(t:\xi)$, $x(t:\bar{\xi})$ が存在し $|\xi-\bar{\xi}| < \varepsilon$ が成立しているとする。

$$|x(t:\xi)-x(t:\bar{\xi})| \le |\xi-\bar{\xi}| + \int^t \alpha(t)\,|x(t:\xi)-x(t:\bar{\xi})|\,dt$$

よって
$$\|x(\cdot:\xi)-x(\cdot:\bar{\xi})\| \le |\xi-\bar{\xi}|\exp\int_T \alpha(t)dt$$
$$\le \varepsilon\exp\int_T \alpha(t)dt$$
$$\le \frac{1}{M}$$

これは先の $\|x^*-x(\cdot)\| < \frac{1}{M}$ なる領域での解は一意的であるという結果に反する。　　証明終り

References

(1) R. E. Kalman Canonical Structure of Linear Dynamical Systems ; Proc. N.A.S. vol. 48 1962

(2) J. D. GILCHRIST, n-Observability of Linear Systems IEEE Transactions on AC. vol. AC-11 No. 3 1966

(3) Z. OPIAL Linear Problems for Systems of N-L D. Eqs. J. of D. Eqs. 3, 1967