数理解析研究所講究録
第49巻 1968年 1-14

von Neumann 代数の生成について

東北大 教養 斉藤 禎四郎

§1. 序.

von Neumann 代数の生成についての最近の研究には2つの方向がある．1つは与えられた von Neumann 代数は何個の生成元を持つかを調べる方向—von Neumann の可換な場合についての結果の拡張と代数的な興味から—．もう1つはヒルベルト空間上の作用素が与えられた時，その作用素の生成する von Neumann 代数の構造を調べて作用素を研究するという方向である．ここでは第1の方向についての最近までの結果をのべてみたい．

以下では，ヒルベルト空間はすべて可分なヒルベルト空間とし，作用素は有界線型作用素とする．von Neumann 代数 M が作用素の族 $\{A, B, \cdots\cdots\}$ で生成されるとは，M が $\{A, B, \cdots\cdots\}$ をふくむ最小の von Neumann 代数であることを意味し，$M = R(A, B, \cdots\cdots)$ であらわす．M が von Neumann 代数の

族$\{M_1, M_2, \cdots\}$で生成されるというのも同様の意味に用いて、$M = R(M_1, M_2, \cdots)$とかく．ヒルベルト空間H上のvon Neumann代数Mに対して，M上の2×2マトリックス全体の作る$H \oplus H$上のvon Neumann代数をM_2とかく．

§2．1個の生成元を持つvon Neumann代数．

この節では、次のvon Neumannの結果が出発点になる．

補題2.1．可分なヒルベルト空間上の任意の可換なvon Neumann代数は1個の自己共役作用素で生成される．

この結果を利用すれば、直ちに次のことが示される．

補題2.2．M_1，M_2を共に可分なヒルベルト空間上の可換なvon Neumann代数とすると$R(M_1, M_2)$は1個の作用素で生成される．

実際、$A \in M_1$，$B \in M_2$を$R(A) = M_1$，$R(B) = M_2$なる自己共役作用素とすると差，$C = A + iB$が求めるものである．

この補題の系として，次の補題が得られる．

補題2.3．$\{M_n\}_{n=1,2,\cdots}$を可分なヒルベルト空間上のvon Neumann代数の族で，お互に可換$(M_m \subset M_n' \quad m \neq n)$であり且各$M_n$が1個の生成元を持つとすれば、$M = R(M_1, M_2 \cdots)$は1個の生成元を持つ．

証明．$A_n = B_n + iC_n$（B_n，C_nは自己共役）をM_nの生成元とすれば，$R(B_1, B_2, \cdots)$，$R(C_1, C_2, \cdots)$は共に可換なvon

Neumann代数で，Mを生成するから，補題2.2をあてはめればよい．

あとの便利のために，次の結果を系としてのべておく．

系2.4. 可分なヒルベルト空間上で，M_1, M_2を1個の生成元を持つvon Neumann代数とすると，テンソル積$M_1 \otimes M_2$は1個の生成元を持つ．

この系が無限直積の場合にまで拡張できることは容易に知られる．次の補題もよく知られている結果である．

補題2.5. 可分ヒルベルト空間上の作用素全体のつくるvon Neumann代数（I型factor）は1個の生成元を持つ．

I_∞型のときはいわゆるsimple shiftを用いればよい．

定義. 有限型von Neumann代数Mが次の(i)又は(ii)をみたすとき，Mをhyperfinite von Neumann代数と呼ぶ：(i) MはI型である．(ii) Mを生成するお互に可換なI型のvon Neumann代数の列$\{M_n\}_{n=1,2,\ldots}$があって各M_nのcenterはMのそれと一致する．

Mがfactorのときは通常のhyperfinite factorであり，(ii)の場合はMisonou [Tohoku Math. J. 7(1955), 192−205] の定義した，generalized approximately finite W^*algebraである．

さて，いままでに準備したものを組合せれば，次の結果が

得られる．

定理 1．可分なヒルベルト空間上の任意の I 型の von Neumann 代数は，1 個の生成元を持つ．

定理 2．可分なヒルベルト空間上の hyperfinite な II_1 型 von Neumann 代数は 1 個の生成元を持つ．

定理 1 の証明．homogeneous のときは，可換な von Neumann 代数と有界作用素全体のつくる von Neumann 代数のテンソル積と考えてよいから，補題 2.1，2.5 および系 2.4 から結論が得られる．一般の場合は，homogeneous なものの直和 $\sum\oplus_{n\in N} M_n$ とあらわされる．いま，A_n を M_n の生成元として $\{A_n\}$ をノルムで一様有界となるようにしておいて $A=\sum\oplus_{n\in N} A_n$ を作る．$\sum\oplus_{n\in N} M_n$ の center を生成する作用素を B とすれば $R(A)$, $R(B)$ はお互に可換で $R(A, B)=\sum\oplus_{n\in N} M_n$ となるから，補題 2.3 を用いればよい．

定理 2 の証明．補題 2.3 と定義から明かである．

最近の情報によると，W. Wogen [22] は可分なヒルベルト空間上の任意の properly infinite な von Neumann 代数は 1 個の作用素で生成されることを示した．このことについては，あとでふれることにして，関連する事柄をいくつか並べてこの節を終る．

注意 1．補題 2.2 から hyperfinite でない II_1 型の von Neumann 代数で1個の生成元をもつものの存在が分る。実際，2個の生成元をもつ自由群のレギュラー表現から構成される II_1-型 factor は1個の作用素で生成される。

注意2．系2.4と補題2.5を用いれば1個の生成元をもつ II_∞-型の von Neumann 代数の構成ができる。また III-型 factor で1個の生成元を持つものの存在性は，(Glimm の定義した) UHF-代数から作られる III 型 factor (hyperfinite な III 型 factor) で知られる。

注意3．I 型の von Neumann 代数を生成する，(正規でない) 作用素の若干の例が知られている。

文献 [1], [9], [12], [13], [17], [18], [19], [20], [22], [23]

§3． von Neumann 代数 M_2 の生成．

この節では，von Neumann 代数 M が1つの生成元をもつとき，M_2 は何個の作用素で生成されるかということを問題にする。

補題3.1． von Neumann 代数 M が作用素 $A_1, A_2, \cdots$ で生成されれば M_2 は

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

で生成される。

これは，$R(A_1, A_2 \cdots) = M$ と $\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} +$

$$\begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ とれて

明らかである．

系 3.2．M が n 個の作用素 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ で生成されれば M_2 は 2 乗が 0 となる $n+1$ 個の作用素で生成される．

証明．$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} A_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $(i=1,2,\cdots n)$ が M_2 を生成して，

$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$ となることから明か．

系 3.3．系 3.2 と同じ仮定のもとで，M_2 は $n+1$ 個のベキ等元で生成される．

証明．$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^*$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

, $\begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ で $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ がベキ等元で

あることをみれば，系 3.2 より明か．

特に，M が 1 個の作用素で生成されれば，M_2 は 2 乗が 0 の 2 個の作用素（或はまた 2 つのベキ等元）で生成される [14]．

補題 3.4．M を作用素 A で生成される von Neumann 代数で，A は $\|A\| < 1$ で逆作用素を持つとする．このとき，M_2 は 1 個の準等距離作用素で生成される．

証明．$T = (1 - A^*A)^{1/2}$ とおいて，$V = \begin{pmatrix} A & 0 \\ T & 0 \end{pmatrix}$ を作れば V が求めるものである．実際 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R(V)$ となり，$R(V) = M_2$ となる．

上の補題，また以下の議論では生成元Aが逆作用素をもって$\|A\|<1$であるという仮定は本質的ではない．従って前節の結果と補題3.4から次の定理を得る．

定理3．I型，II_1型，II_∞型，III型とそれぞれの代数型のvon Neumann代数を生成する準等距離作用素が存在する．

なお，上の準等距離作用素の構成は[7]による．

定理4．von Neumann代数Mが1つの作用素で生成されていれば，M_2は3つの射影作用素で生成される．

証明．$R(A)=M$とするとき，$\|A\|<1$でA^{-1}が存在するとしてよい．このとき，$S=(1-AA^*)^{1/2}$，$T=(1-A^*A)^{1/2}$とおいて，

$$E_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad E_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\quad E_3=\begin{pmatrix}AA^* & SA\\ A^*S & T^2\end{pmatrix}$$

とおけば，E_1，E_2，E_3が求める射影作用素である．

上であたえた射影作用素E_1，E_2，E_3はM_2においてユニタリ同値である．実際，M_2のユニタリ作用素

$$U=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix},\quad V=\begin{pmatrix}A & S\\ T & -A^*\end{pmatrix}$$

で$E_1=U^*E_2U$，$E_1=V^*E_3V$となる．

定理4の特別な場合として，次の系が得られる．

系3.5．von Neumann代数MがI_∞型factor又はhyperfinite II_1-型factorであれば，Mは3つの射影作用素で生成される．

次の結果は定理4と共にDavis [2] の拡張である.

系3.6. 定理4の仮定のもとで, M_2は2つのユニタリ作用素で生成され, そのうち1個は自己共役なユニタリ作用素にとれる.

実際 $M=R(A)$ として, S, T を定理4と同じく定義すれば

$$U=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \quad V=\begin{pmatrix}A & S\\ T & -A^*\end{pmatrix}$$

が求める作用素である.

なお, 上のユニタリ作用素VはHalmos [6] の unitary dilation である.

最後に2, 3の関連する結果をのべてこの節を終る.

注意1. Fillmore-Topping [5] は, 「von Neumann 代数Mが射影作用素で代数的に生成されるための必要十分条件はMが無限次元の abelian summand をふくまないことである」を証明した.

注意2. Pearcy-Topping [14] は可分なヒルベルト空間上のすべての作用素は5個のベキ等元の和としてあらわされること, また5個の2乗が0の作用素の和としてあらわされることを証明した. 更にすべての自己共役作用素は8つの射影作用素の実1次結合にあらわされることを示し, これらの諸結果が, properly infinite な von Neumann 代数の場合にも

成立することを示している.

文献 [2], [4], [5], [6], [7], [13], [14], [15], [21].

§4. von Neumann 代数の生成についての諸結果の相互関係.

前節では, von Neumann 代数Mが1個の生成元を持つならば, M_2が種々の特殊な作用素—射影作用素, ユニタリ作用素, 準等距離作用素等—の若干個によって生成されることが示されたが, この節では, それらの結果の間の関係を論ずるのが目的である.

補題4.1. von Neumann 代数Mが作用素 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ $(n \geq 2)$ で生成され, A_1が正規作用素であれば, M_2は $n-1$ 個の作用素で生成される.

証明. $A_1, A_2, \cdots A_n$ はすべてノルムが1より小で, 逆作用素を持つとしてよい. このとき

$$B_i = \begin{pmatrix} A_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad i=1,2,\cdots,n-1; \quad U = \begin{pmatrix} A_n & S_n \\ T_n & -A_n^* \end{pmatrix}$$

と定義する. ただし $S_n = (1-A_nA_n^*)^{1/2}$, $T_n = (1-A_n^*A_n)^{1/2}$ である. B_1は正規で, Uはユニタリであるから, 補題2.2から, $R(B_1, U) = R(C)$ なる作用素Cが存在する. このとき, $C, B_2, \cdots, B_{n-1}$ が要求をみたす.

この補題を用いて直ちに次の系を得る.

系4.2. von Neumann 代数Mが作用素 $A_1, A_2, \cdots A_n$ で生

成され，A_1, A_2, A_3 が正規であれば，M_2 は $n-2$ 個のの作用素で生成される。

従って特に M が3個の正規作用素で生成されていれば，M_2 は1個の生成元を持つ。

補題4.3．von Neumann 代数 M が作用素 $A_1, A_2, \cdots A_n$ で生成されれば，M_2 は $n+1$ 個のユニタリ作用素で生成される。

証明．$\|A_i\|<1$, $i=1,2,\cdots n$ で各 A_i が逆作用素を持つとする．$S_i=(I-A_iA_i^*)^{1/2}$, $T_i=(I-A_i^*A_i)^{1/2}$, $i=1,2,\cdots n$ として

$$W=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix};\quad U_i=\begin{pmatrix}A_i & S_i\\ T_i & -A_i\end{pmatrix},\quad i=1,2,\cdots,n$$

と定義すれば，$\{W, U_1, \cdots, U_n\}$ が求めるものである。

補題4.3と系4.2をくり返して用いれば，次の定理が得られる。

定理5．von Neumann 代数 M が M_2 と同型のとき，もし M が有限個の生成元を持つならば，M は1個の生成元を持つ。

M が hyperfinite II_1 型 factor 或は properly infinite な von Neumann 代数ならば，M と M_2 は同型である。

前節の結果と定理5から，次の定理が得られる

定理6．von Neumann 代数 M が M_2 と同型のときは，次の (a) — (e) は同値である。

(a) M は一個の生成元を持つ。

(b) Mは3個の射影作用素で生成される．

(c) Mは2個のユニタリ作用素で生成され，そのうちの1つは，自己共役なユニタリ作用素に選べる．

(d) Mは2個のべき等元で生成される．

(e) Mは2乗が0となる2個の作用素で生成される．

さて，properly infinite な von Neumann 代数は一個の生成元を持つことを証明してこの節を終る．Mをヒルベルト空間H上のvon Neumann 代数とするとき，Mの要素の作る$n \times n$の行列でヒルベルト空間$\sum_{k=1}^{n}\oplus H_k$ ($H_k = H$, $k=1,2,\cdots n$) 上で有界作用素として作用するもの全体のつくる代数をM_nとかくことにする．nは$2 \leqq n \leqq \aleph_0$とする．

補題4.4．ヒルベルト空間H上のvon Neumann 代数Mがn個の作用素 ($2 \leqq n \leqq \aleph_0$) で生成されれば，M_nは2個の作用素で生成される．

証明．$M = R(\{A_k\}_{k=1}^{n})$，$1 \leqq n \leqq \aleph_0$とする．このとき，すべてのkに対して$\|A_k\| \leqq 1$と仮定してよい．いま$A \in M_n$を

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & A_3 & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix}$$

と定義する．Iをヒルベルト空間$\sum_{k=1}^{n}\oplus H_k$ ($H_k = H$, $k=1,\cdots n$) 上の単位作用素，$\mathbb{C}$を複素数体とすると，$M_n(\mathbb{C}I) \subset M_n$で，$M_n(\mathbb{C}I)$はI型 factor である．故に，定理1 によって$R(B) = M_n(\mathbb{C}I)$

なる作用素Bが存在する．このとき，$R(A, B) = M_2$である．

定理5と上の補題から，

定理7．von Neumann代数Mがproperly infiniteであれば，Mは1個の生成元を持つ．

証明．Mはproperly infiniteであるから，MはM_n $(2 \leqq n \leqq \aleph_0)$と同型である．$\{A_k\}_{k=1}^{n}$を高々可付番個の作用素の族でMを生成するものとする（ヒルベルト空間はすべて可分）．故に補題4.4からMは2個の生成元をもつ．従って定理5から結論を得る．

文献．[16]，[22]．

参 考 文 献

[1] A.Brown, The unitary equivalence of binormal operators, Amer. J. Math., 76(1954), 414-439.

[2] C.Davis, Generators of the ring of all bounded operators, Proc. Amer. Math. Soc., 6(1955), 970-972.

[3] J.Dixmier, Les algebres d'operateurs dans l'eapace Hilbertien, Gauthier-Villars, Paris, 1957.

[4] R.G.Douglas and D.Topping, Operators whose squares are zero, Rev. Romaine Math. Pures Appl., 12(1967), 647-652.

[5] P.A.Fillmore and D.Topping, Operator algebras generated by projections, Duke Math. J.,34(1967),333-336.

[6] P.R.Halmos, Normal dilations and extensions of operators,

Summa Braisiliensis Math., 2(1950), 125-134.

[7] P.R.Halmos and J.E.Mclauglin, Partial isometries, Pacific J. Math.,13(1963), 585-596.

[8] F.J.Murray and J.von Neumann, On rings of operators,IV, Ann. Math., 14(1943), 716-808.

[9] J.von Neumann, Zur algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren, Math. Ann., 102(1929), 370-427.

[10] J.von Neumann, On infinite direct products, Compositio Math., 6(1963), 1-77.

[11] J.von Neumann, On rings of operators III, Ann. Math., 41 (1940), 94-141.

[12] C.Pearcy, W^*-algebras with a single generator, Proc. Amer. Math. Soc., 13(1962), 831-832.

[13] C.Pearcy, On certain von Neumann algebras which are generated by partial isometries, Proc. Amer. Math. Soc., 15 (1964), 393-395.

[14] C.Pearcy and D.Topping, Sums of small numbers of idempotents, Mich. Math. J., 14(1967), 453-465.

[15] T.Saitô, Generators of certain von Neumann algebras, Tôhoku Math. J., 20(1968), 101-105.

[16] T.Saitô, A remark on generators of von Neumann algebras, Mich. Math. J., to appear.

[17] N.Suzuki and T.Saitô, On the operators which generate continuous von Neumann algebras, Tôhoku Math. J., 15(1963), 277-280.

[18] N.Suzuki, Isometries on Hilbert spaces, Proc. Japan Acad.,

39(1963), 435-438.

[19] N.Suzuki, On the type of completely continuous operators, Proc. Japan Acad., 40(1964), 683-685.

[20] D.Topping, UHF algebras are singly generated, preprint.

[21] D.Topping, Lecture on von Neumann algebras at Indiana University, 1967.

[22] W.Wogen, On generators for von Neumann algebras, pre-preprint.

[23] T.Yoshino, Nearly normal operators, Tôhoku Math. J., 20 (1968), 1-4.