数理解析研究所講究録
第49巻 1968年 15-33

ファクターの分類

京大 数研 荒木 不二洋

§1 序

無限テンソル積として得られるファクターの分類について最近得られた結果を解説する。次の論文に詳しい記述がされている。

H. Araki and E. J. Woods, A classification of factors, (Technical Report No.784, Dept. of Physics, Univ. of Maryland)

この論文は研究所紀要 vol.4 No.1 に出版予定である。

§2 無限テンソル積と ITPFI ファクター

$H = \underset{\nu\in A}{\otimes}(H_\nu, \Omega_\nu)$: 不完全無限直積(ITPS), $\otimes\Omega_\nu$ を含む。

$R(H_\nu, M_\nu, \Omega_\nu;\ \nu\in A) \equiv R(H_\nu, M_\nu, \Omega_\nu) \equiv R(M_\nu, \Omega_\nu)$: $M_\nu \in B(H_\nu)$ の積。

M_ν が I_{n_ν} 型, $2 \leqq n_\nu < \infty$, A が無限集合のとき

ITPFI ファクターと呼ぶ。

II_1 型の ITPFI ファクターはハイパー型。すべて同型。

ITPFI ファクター可算個のテンソル積は ITPFI ファクターである。

M_ν が I_∞ 型のような ν があっても $R(H_\nu, M_\nu, \Omega_\nu)$ は ITPFI ファクターである。

任意の ITPFI ファクターは Ω_ν が M_ν の巡回的かつ分離的ベクトルであるような $R(H_\nu, M_\nu, \Omega_\nu)$ と同型である。

補題 2.1 $\bigotimes_{\nu\in A}(H_\nu, \Omega_\nu)$ の任意のベクトル Ψ と，$\varepsilon > 0$ が与えられたとき，A の有限部分集合 J と適当なベクトル $\Psi_J \in \bigotimes_{\nu\in J} H_\nu$ があって，$\| \Psi - \Psi_J \otimes (\bigotimes_{\nu\notin J} \Omega_\nu) \| < \varepsilon$ となる，

記号 $J \subset A$ に対し $H(J) = \bigotimes_{\nu\in J} H_\nu$, $\Omega(J) = \bigotimes_{\nu\in J} \Omega_\nu$, $M(J) = \bigotimes_{\nu\in J} M_\nu$

§3 固有値リスト

$\Omega \in H_1 \otimes H_2$, $M = B(H_1) \otimes 1$. (I 型 M の一般形).

$\exists_1 \rho_\Omega \in M$: $\mathrm{Tr}\,\rho_\Omega A = (\Omega, A \otimes 1\Omega)$, $A \in M$

$\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots\}$: ρ_Ω の固有値，λ が重複度 m なら m 個並べる

$$\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots$$

$\mathrm{Sp}(\Omega/M) \equiv \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots\}$ 固有値リスト

$\mathrm{Sp}(\Omega/M)$ と $\mathrm{Sp}(\Omega/M')$ は 0 の数を除いて一致。

(Ω,M) のユニタリ不変量 : $Sp(\Omega/M)$ と $Sp(\Omega/M')$

Ω が M の巡回ベクトル $\Longleftrightarrow$ $0 \notin Sp(\Omega/M')$

Ω が M の分離ベクトル $\Longleftrightarrow$ $0 \notin Sp(\Omega/M)$

Ω が M の巡回かつ分離ベクトル $\Longleftrightarrow$ $Sp(\Omega/M') = Sp(\Omega/M) \notin 0$.

$\Omega = \sum \lambda_i^{1/2} \Psi_{1i} \otimes \Psi_{2i}$　標準対角的展開

$\Psi_{\alpha i}$ 直交基底 $(\alpha = 1,2)$, $\|\Psi_{\alpha i}\| = 1$ or 0, $\{\lambda_i\}$

$= Sp(\Omega/M')$ と $Sp(\Omega/M)$ の大きい方。

u_{ij}, v_{ij} : 標準行列単位

$u_{ij}\Psi_{1k} \otimes \Psi_{2\ell} = \delta_{jk}\Psi_{1i} \otimes \Psi_{2\ell}$

$v_{ij}\Psi_{1k} \otimes \Psi_{2\ell} = \delta_{j\ell}\Psi_{1k} \otimes \Psi_{2i}$

$u_{ij} = u_{ji} = 0$ if $\Psi_{1i} = 0$. $v_{ij} = v_{ji} = 0$ if $\Psi_{2i} = 0$.

$M = R(M_i, \Omega_i)$ が I 型 $\Longleftrightarrow$ $Sp(\Omega, M) = \prod_i Sp(\Omega_i, M_i)$

ただし $(\lambda_1\lambda_2\cdots)(\mu_1\mu_2\cdots) = (\lambda_1\mu_1, \lambda_1\mu_2, \lambda_2\mu_1 \cdots)$ を大きさの順に並べたもの。

補題3.1　$Sp(\Omega_{\nu\alpha}/M_\nu) = \{\lambda_{\nu j}^\alpha\}$, $\alpha = 1,2$. $H_\nu = H_{\nu 1} \otimes H_{\nu 2}$, $M_\nu = B(H_{\nu 1}) \otimes 1$, $\Omega_{\nu\alpha} \in H_\nu$.

このとき次式は $R(M_\nu, \Omega_{\nu 1}) \overset{u}{\sim} R(M_\nu, \Omega_{\nu 2})$ の十分条件。

$$\sum_{\nu}[1-\sum_{j}(\lambda_{\nu j}^{1}\lambda_{\nu j}^{2})^{1/2}] = \frac{1}{2}\sum_{\nu j}([\lambda_{\nu j}^{1}]^{1/2} - [\lambda_{\nu j}^{2}]^{1/2})^{2} < \infty$$

定理 3.2　$M = R(M_\nu, \Omega_\nu)$, M_ν が I_{n_ν} 型, $2 \leqq n_\nu \leqq \infty$, $Sp(\Omega_\nu/M_\nu) = \{\lambda_{\nu i}\ ,\ i=1\cdots n_\nu\}$ のとき

(1)　M:I 型 $\Leftrightarrow \sum|1-\lambda_{\nu 1}| < \infty$

(2)　$M:II_1$ 型 $\Leftrightarrow n_\nu < \infty$, $\sum_{\nu,i}|(n_\nu)^{-1/2}-(\lambda_{\nu i})^{1/2}|^2 < \infty$

(3)　$\lambda_{\nu 1} \geq \delta > 0$ とすると , M が III 型 $\Leftrightarrow$

$$\sum \lambda_{\nu i}\ \inf\{|(\lambda_{\nu i}/\lambda_{\nu i})-1|^2,\ c\} = \infty \quad (c > 0)\ .$$

§4 漸近比集合

$R(H_\nu, M_\nu, \Omega_\nu; \nu \in A)$ を考える.

$\lambda \in Sp(\Omega(I)/M(I)) \Rightarrow \lambda = \prod_{\nu \in I}\lambda_{\nu,k(\nu)}$, $\lambda_{\nu,k(\nu)} \in Sp(\Omega_\nu/M_\nu)$

$\lambda(K) \equiv \sum_{\lambda \in K}\lambda \qquad (K \subset Sp(\Omega(I)/M(I)))$

x 一列 :　$\{I_n, K_n^1, K_n^2, \phi_n\}$, $n=1,2,\cdots$

$I_n \subset A$, $I_m \cap I_n = \phi \quad (m \neq n)$,

$K_n^\alpha \subset Sp(\Omega(I_n)/M(I_n))$, $K_n^1 \cap K_n^2 = \phi$ (同じ値の $\lambda_{\nu j}$ が多重度の数だけは K_n^1, K_n^2 に別れて入っていてもよい。)

ϕ_n: $K_n^1 \rightarrow K_n^2$　　1 対 1　onto 写像.

$$\begin{cases} \lim\limits_{n} \max\limits_{\lambda \in K_n^1} |x - \phi_n \lambda/\lambda| = 0 \\ \sum\limits_n \lambda(K_n^1) = \infty \end{cases} .$$

<u>漸近比集合</u>　$r_\infty(M,\Omega)$:　x－列が存在するようなxの全体。

<u>補題 4.1</u>　$x \in r_\infty(M,\Omega)$ なら任意の $\varepsilon_n > 0$ に対し x 列 $(I_n, K_n^\alpha, \phi_n)$ が存在して

$$|1 - \lambda(K_n^1) - \lambda(K_n^2)| < \varepsilon_n$$

このとき $\lim \lambda(K_n^1) = (1+x)^{-1}$　$\lim \lambda(K_n^2) = x(1+x)^{-1}$ $(=(1+x^{-1})^{-1}$ if $x \neq 0)$

<u>定理 4.2</u>　$r_\infty(M,\Omega)$ は閉，$r_\infty(M,\Omega) - \{0\}$ は乗法群。

$$r_\infty(M,\Omega) = \{0\} \Longleftrightarrow \sum |1 - \lambda_{\nu 1}| < \infty, \quad r_\infty(M,\Omega) \neq \{0\} \Rightarrow 1 \in r_\infty(M,\Omega) .$$

<u>系 4.3</u>　$r_\infty(M)$ は次のいずれかである。

$S_0 = \{0\}$, $S_1 = \{1\}$

$S_x = \{0, x^n;\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$,　$(0 < x < 1)$

$S_{01} = \{0,1\}$

S = 半直線 $[0,\infty)$

<u>定理 4.4</u>　$r_\infty(M \otimes N,\ \Omega \otimes \Psi) \supset r_\infty(M,\Omega) \cup r_\infty(N,\Psi)$

§5 不変性

M : H 上ファクター,

N : I 型ファクター, $\subset M$

$\Phi \in H$ が M の中で N につき積ベクトルとは次の構造をもつとき。

$$H = H_1 \otimes H_2 \ , \quad H_1 = H_{11} \otimes H_{12}$$

$$N = \hat{N} \otimes 1 \ , \quad \hat{N} = B(H_{11}) \otimes 1$$

$$M = \hat{N} \otimes M_2 \ ,$$

$$\Phi = \Phi_1 \otimes \Phi_2 \ , \quad \Phi_i \in H_i$$

次の補題は $Sp(\Omega/M)$ が 0 固有値を除いて近似的に $\{\lambda_1 \cdots \lambda_n\} \times \{\cdots\}$ のような形をしているときには，ある部分空間（0 固有値分に対応する）を除くと，近似的に $M \approx N \otimes N'$, $\Omega \approx \Omega_1 \otimes \Omega_2$, $Sp(\Omega_1/N) = \{\lambda_1 \cdots \lambda_n\}$ のような分解ができることを主張する。

<u>補題 5.1</u>　$0<\varepsilon<1$，ヒルベルト空間 H，I 型ファクター $M \subset B(H)$，単位ベクトル $\Omega \in H$，$(\lambda_1 \cdots \lambda_n)$，$\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots \geqq \lambda_n \geqq 0$，$\sum \lambda_i = 1$，$K_j \subset Sp(\Omega/M)$，$j=1 \cdots n$，$K_i \cap K_j = \phi \ (i \neq j)$，$0 \notin K_1$，$\phi_j$ が K_j から K_j の上への 1 対 1 対応 $(j=2, \cdots n)$，$L = Sp(\Omega/M) - \bigcup_{j=1}^{n} K_j$，$\varepsilon' = \min(\varepsilon, \{\lambda_j/\lambda ; \lambda_j \neq 0\})$ が与えられ，

$$\max_{j=2}^{n} \max_{\lambda \in K_1} |(\lambda_j/\lambda_1)^{1/2} - (\phi_j \lambda/\lambda)^{1/2}| < \varepsilon'$$

$$\lambda(L) < \varepsilon$$

が成立すると，射影子 $P\in M$ ，$P'\in M'$，I_n 型ファクター $N\subset M_{PP'}$ および単位ベクトル $\Phi\in PP'H$ が存在して

$$\|(1-PP')\Omega\|^2 < n\varepsilon$$

$$\|PP'\Omega-\Phi\| < c_n\varepsilon$$

かつ Φ は $M_{PP'}$ の中で N につき積ベクトル，$Sp(\Phi/N)=\{\lambda_1\cdots\lambda_n\}$.
ここに c_n は n だけによる定数。
この補題と漸近比集合の定義からただちに次の補題が成立する。

<u>補題 5.2</u>　　$M = R(M_\nu,\Omega_\nu;\nu\in A)$，$x\in r_\infty(M,\Omega)$，$x\leqq 1$，$0<\varepsilon<1$ が与えられたとき，有限集合 $I\subset A$，射影演算子 $P\in M(I)$，$P'\in M(I)'$，単位ベクトル $\Phi\in PP'H(I)$ と I_2 型ファクター $N\subset M(I)_{PP'}$ が存在して

$$\|(PP'-1)\Omega(I)\| < \varepsilon$$

$$\|PP'\Omega(I)-\Phi\| < \varepsilon$$

$$Sp(\Phi/N) = (\lambda,1-\lambda)$$

$$x = (1-\lambda)/\lambda$$

が成立し，Φ は $M(I)_{PP'}$ の中で N につき積ベクトルである。

これをくり返し使うと，$x \in r_\infty(M,\Omega)$ の場合 $Sp(\Phi_n/N_n)=(\lambda,1-\lambda)$ のような部分ファクター $M(I_n)$ を無限個作ることができ，$M(I_n) \approx N_n \otimes N_{n2}$ ，$\Phi_n \approx \Phi_{n1} \otimes \Phi_{n2}$ のようになるので，結局 $R(N_n,\Phi_{n1})$ を与えられた M の部分ファクターとしてテンソル積の形でくくり出すことができる。すなわち

<u>定義 5.3</u>　　$M = R(M_\nu,\Omega_\nu)$　$Sp(\Omega_\nu/M_\nu) = \{\lambda_{\nu j}\}$ のとき

$$\hat{r}(M,\Omega) = \{\lambda_{\nu i}/\lambda_{\nu j};\lambda_{\nu j} \neq 0\}$$

<u>補題 5.4</u>　　$M = R(H_\nu,M_\nu,\Omega_\nu;\nu \in A)$，$N = R(N_\alpha,\Psi_\alpha)$，$N_\alpha$ がすべて I_2 型，$\hat{r}(N,\Psi) \subset r_\infty(M,\Omega)$ なら $M \sim M \otimes N$.

特に $x \in r_\infty(M,\Omega)$ なら　$M \sim M \otimes R_x$　ただし

<u>定義 5.5</u>　　$R_x \equiv R(N_\alpha,\Psi_\alpha)$，$Sp(\Psi_\alpha/N_\alpha) = \{(1+x)^{-1},(1+x^{-1})^{-1}\}$

R_0 は I_∞ 型ファクター　　$R_x = R_{x^{-1}}$ は Powers の取扱った例。

補題 5.4 の逆を証明するためにまず次の補題から初める。

<u>補題 5.6</u>　有限 I 型ファクター M，単位ベクトル Ω，$\frac{1}{2} < \lambda \leqq 1$ ，$\varepsilon > 0$ ，作用素 $e_{12} \in M$ ，$f_{12} \in M'$ ，$\|e_{12}\| < 2$ ，$\|f_{12}\| \leqq 2$ ，$(\lambda_1, \lambda_2) = (\lambda, 1-\lambda)$ ，$x = \lambda_2/\lambda_1$ ，$e_{21} = e_{12}^*$ ，$f_{21} = f_{12}^*$ ，が与えられ，次のいずれかが成立するとする。

(i)　　$\lambda = 1$，$\varepsilon < 1/4$ ，$\|e_{21}\Omega\|^2 > 1-\varepsilon$ ，$\|e_{12}\Omega\|^2 < \varepsilon$

(ii) $\lambda \neq 1,\ \|e_{21}\Omega\|^2 > \lambda_1 - \varepsilon\ ,\ \|\lambda_j^{-1/2} e_{ij}\Omega - \lambda_i^{-1/2} f_{ji}\Omega\|^2 < \varepsilon$

$((ij) = (12)\ \text{or}\ (21))$

ここにεは十分小で

$$(1-\delta)^3 > x^{1/2}\ ,\ \delta \equiv (1\delta-\lambda\varepsilon)^{1/2}(\lambda-\varepsilon)^{-1/2},\ \lambda-\varepsilon > 1/2,$$

とする。

このとき $Sp(\Omega/M)$ のたがいに素な部分集合 K^1, K^2 と一対一対応 ϕ が存在して

$$\max_{\mu \in K^1} |x^{1/2} - (\phi\mu/\mu)^{1/2}| < a\varepsilon^{1/2}$$

$$\lambda(K^1) > b\ .$$

ここに a と b は λ のみによる正の定数。

この補題の主張するところは，ある $M(I)$ の中に近似的にある I_2 型ファクター N の $\Omega(I)$ に関する標準行列単位の性質をもつ作用素の組が存在して，(1) $\Omega(I)$ が $M(I)$ の中で N について積ベクトルである。(2) $Sp(\Omega(I)/N) = \{\lambda, 1-\lambda\}$ の二性質に相当する性質を持っているならば，$Sp(\Omega(I)/M(I))$ の部分集合 K^1, K^2 とその間の一対一対応 ϕ が存在して $\phi\lambda/\lambda\ (\lambda \in K^1)$ が近似的に $x=(1-\lambda)/\lambda$ に等しく，かつ $\lambda(K^1)$ が十分大にできるということである。

$M \sim M\otimes R_x$ のときには，$R_x = R(N_\alpha,\Psi_\alpha)$ で十分大きい N_α については空間の任意の二ベクトルが近似的に等しくなり、従って $\otimes\Psi_\alpha$ を Ω に置き変えて考えることが許されるので，その N_α を十分大きい $M(I)$ の作用素で＊強位相の意味で近似することにより前補題の前提を成立させることができる。したがって

補題 5.7　$M = R(M_\nu,\Omega_\nu)$，$M \sim M\otimes R_x$ なら $x \in r_\infty(M,\Omega)$．

補題 5.4 と 5.7 をまとめると

定理 5.8　$x \in r_\infty(M)$ の必要十分条件は $M \sim M\otimes R_x$ である。$r_\infty(M)$ は M の代数的同型について不変量である。

注意　一般のファクター M につき $x \in r_\infty(M) \Leftrightarrow M \sim M\otimes R_x$ で $r_\infty(M)$ を定義する。$M = R(M_\nu,\Omega_\nu)$ で I_∞ 型の M_ν が含まれているときは，$r_\infty(M)$ は 0 を必ず含むが，その他の $x \in r_\infty(M)$ は M_ν が有限 I 型の定義と同じように x 列の存在に同値である。

§6 多重漸近比

定義 6.1　$R(H_\nu,\Omega_\nu)$ の $(x_2\cdots x_p)$ 列とは互に素な ν の有限集合 I_n，たがいに素な $Sp(\Omega(I_n)/M(I_n))$ の部分集合 $K_n^1\cdots K_n^p$，

K_n^1 から K_n^j の上への1対1対応 $\phi_n^j (j=2\cdots p)$ の組で各 $(I_n K_n^1 K_n^j \phi_n^j)$ $(j=2,\cdots p)$ が x_j 列であるものを指す。

$(x_2\cdots x_p)$ 列が存在するような $(x_2\cdots x_p)$ の全体を多重漸近比集合とよぶ。

定理 6.2　$(x_2\cdots x_p)$ 列が存在するためには $x_2,\cdots x_p$ がすべて $r_\infty(M,\Omega)$ に属することが必要十分である。

これは簡単な計算でわかる。前節の補題 5.4 と同じ方法で

補題 6.3　$M = R(M_\nu,\Omega_\nu)$, $N = R(N_\alpha,\Psi_\alpha)$, $\hat{r}(N,\Psi) \subset r_\infty(M,\Omega)$ なら $M \sim M\otimes N$.

系 6.4　$M = R(M_\nu,\Omega_\nu)$, $N = R(N_\alpha,\Psi_\alpha)$, $r_\infty(M) = r_\infty(N) = S_\infty$ ならば $M \sim N$.

証明　前補題より $M \sim M\otimes N \sim N$.

定義 6.5　$M = R(M_\nu,\Omega_\nu)$, $r_\infty(M) = S_\infty$ のような M に同型なファクターを R_∞ と書く。

§7 中心極限定理の応用

定義 7.1　$X_\nu = \{\lambda_{\nu 1}\cdots\lambda_{\nu n_\nu}\}$, $\lambda_{\nu i} \geqq 0$, $\sum\lambda_{\nu i} = 1$ とする。

μ_ν は X_ν 上の確率測度で $\mu_\nu(K) = \sum_{\lambda\in K}\lambda \quad (K \subset X_\nu)$ また X_ν の 0 を含まない互に素な部分集合を K_ν^1, K_ν^2, その間の1対1対応を ϕ_ν としたとき,

$$\eta_\nu(\lambda) = \log\,(\phi_\nu\lambda/\lambda) \qquad (\lambda \in K_\nu^1)$$

$$s_\nu(\lambda) = \begin{cases} \eta_\nu(\lambda) & (\lambda \in K_\nu^1) \\ -\eta_\nu(\phi_\nu^{-1}\lambda) & (\lambda \in K_\nu^2) \\ 0 & (\lambda \notin K_\nu^1 \cup K_\nu^2) \end{cases}$$

$$\langle s_\nu\rangle = \sum \lambda\eta_\nu(\lambda)(1-e^{\eta_\nu(\lambda)})$$

$$Y_N = \sum_{\nu=1}^{N} s_\nu$$

$$\delta_\nu = \max_{\lambda\in K_\nu^1} |\eta_\nu(\lambda)|$$

$$\sigma_\nu = \sum_{\lambda\in K_\nu^1} [\lambda\eta_\nu(\lambda)^2 + (\phi_\nu\lambda)\eta_\nu(\lambda)^2] - \langle s_\nu\rangle^2$$

<u>補題 7.2</u> $\lim_\nu \delta_\nu = 0$, $\sum_\nu \sum_{\lambda\in K_\nu^1} \lambda\eta_\nu(\lambda)^2 = \infty$ ならば任意の

$0 < a < \infty$ に対し

$$\lim_{N\to\infty} \left(\prod_{\nu=1}^{N} \mu_\nu\right)(|Y_N| \leqq a) = 0$$

このとき $r_\infty(M) = S_\infty$.

<u>証明</u> 前半は中心極限定理による。後半の結論を出すのには x 列 I_n, $\hat{K}_n^1$, $\hat{K}_n^2$, $\hat{\phi}_n$ を次のようにして構成する。 I_n が与えられたとき $\rho \in Sp(\Omega(I_n)/M(I_n))$ に対し

$$\rho = \prod_{\nu \in I_n} \lambda_\nu(\rho) \ , \ \lambda_\nu(\rho) \in Sp(\Omega_\nu/M_\nu)$$

と書き

$$y(m,\rho) = \sum_{\substack{\nu \geqq m \\ \nu \in I_n}} S_\nu(\lambda_\nu(\rho))$$

とおく。また $x = e^\ell$ と書き $|y(I_n,m,\rho)|$ がはじめて $\frac{\ell}{2}$ を越えた番号 m を $\alpha(\rho)$ と書き，もしそのような m がなければ $\alpha(\rho) = \infty$ とする。補題の前半により十分大きい I_n をとれば $\alpha(\rho) = \infty$ となる ρ の測度はいくらでも小さくできる。そのような I_n を fix し，$m = \alpha(\rho)$ のとき $y(m,\rho) > 0$ （したがって $y(m,\rho) \geqq \frac{\ell}{2}$）のものを $\hat{K}_n^1$ ，$y(m,\rho) < 0$ （したがって $\leqq -\frac{\ell}{2}$ ）のものを $\hat{K}_n^2$ ，また $\rho \in K_n^1$ に対し $\nu > \alpha(\rho)$ では $\lambda_\nu(\rho')$ が $\lambda_\nu(\rho)$ とまったく一致し，$\nu \leqq \alpha(\rho)$ では $\lambda_\nu(\rho) \in K_\nu^1$ なら $\lambda_\nu(\rho') = \phi_\nu \lambda_\nu(\rho)$ ，$\lambda_\nu(\rho) \in K_\nu^2$ なら $\lambda_\nu(\rho') = \phi_\nu^{-1}\lambda_\nu(\rho)$ となっている ρ' を $\hat{\phi}_n\rho$ と定義する。（自動的に $\alpha(\rho') = \alpha(\rho)$, $\rho' \in K_n^2$ かつ $|\log \frac{\rho}{\rho'} - \ell| \leqq 2s_{\alpha(\rho)}(\lambda_{\alpha(\rho)}(\rho)) \leqq 2\delta_{\alpha(\rho)}$） I_n を順次互に素に十分大きく取ってこのように $\hat{K}_n^1$ ，$\hat{K}_n^2$ ，$\hat{\phi}_n$

を作ると x 列が得られる。

上記からただちに

補題 7.3　$0 < a < \infty$, $M = R(M_\nu, \Omega_\nu)$, $Sp(\Omega_\nu/M_\nu)$ の互に素な部分集合 K_ν^1 , K_ν^2 およびその間の一対一対応 ϕ_ν が与えられたとする。

もし
$$\sum_\nu \sum_{\lambda \in K_\nu^1} [\lambda^{1/2} - (\phi_\nu \lambda)^{1/2}]^2 = \infty$$
ならある $x \neq 1$ が $r_\infty(M)$ に含まれる。特に
$$|\log (\phi_\nu \lambda/\lambda)| \leqq a$$
なら $e^{-a} \leqq x < 1$ が $r_\infty(M)$ に含まれる。

§8 $r_\infty(M) = S_x$ の場合

定義 8.1　I_n 型ファクター M と単位ベクトル Ω に対し，$Sp(\Omega/M) = \{\lambda_1 \cdots \lambda_n\}$ のとき

$$\delta_0(M,\Omega) = (\lambda_1^{1/2} - 1)^2 + \sum_{j=2}^{n} \lambda_j$$

$$\delta_1(M,\Omega) = \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j^{1/2} - n^{-1/2})^2$$

$$\delta_x(M,\Omega) = \min_{(m_1 \cdots m_n)} \sum_{j=1}^{n} [\lambda_j^{1/2} - (x^{m_j} / \sum_{j=1}^{n} x^{m_j})^{1/2}]^2$$

$$(0 < x < 1) .$$

ただし $(m_1 \cdots m_n)$ は整数。$M = R(M_\nu \Omega_\nu)$ に対しては

$$d_x(M,\Omega) = \sum_\nu \delta_x(M_\nu,\Omega_\nu) \ .$$

補題8.2　$M = R(M_\nu,\Omega_\nu)$ に対し $x \in r_\infty(M)$, $d_x(M,\Omega) < \infty$ なら $M \sim R_x$.

証明　補題3.1より $Sp(\Omega_\nu,M_\nu) = \{x^{m_j^\nu} / \sum_{j=1}^{n_\nu} x^{m_i^\nu}, \ j=1\cdots n_\nu\}$ の場合に帰着し，定理5.8 $M \sim M \otimes R_x$ と補題 6.3 $M \otimes R_x \sim R_x$ から $M \sim R_x$ を得る。

補題8.3　$M = R(M_\nu,\Omega_\nu)$ に対し $r_\infty(M) = S_1$ なら $d_1(M,\Omega) < \infty$.

証明　$d_1(M,\Omega) = \infty$ だと適当な K_ν^1 , K_ν^2, ϕ_ν で

$$\sum_\nu \sum_{\lambda \in K_\nu^1} [\lambda^{1/2} - (\phi_\nu \lambda)^{1/2}]^2 = \infty$$

のものが作れる。したがって補題 7.3 より $r_\infty(M) \neq S_1$ 。

補題8.4　$M = R(M_\nu,\Omega_\nu)$, $0 < x < 1$, $r_\infty(M) = S_x$ なら $d_x(M,\Omega) < \infty$.

証明　$Sp(\Omega_\nu/M_\nu) = \{\lambda_{\nu 1}\cdots\lambda_{\nu n_\nu}\}$ とする。適当な整数 $m_{\nu_1}\cdots m_{\nu n_\nu}$ と $(1\cdots n_\nu)$ の部分集合 K_ν が存在して

$$\lambda_{\nu j} = e^{\eta_{\nu j}}\alpha_{\nu j} \ , \ \alpha_{\nu j} = x^{m_{\nu j}} / \sum_{i=1}^{n_\nu} x^{m_{\nu i}}$$

$$|\eta_{\nu i}| < |\log x|$$

$$\max_{i,j \in K_\nu} |\eta_{\nu j} - \eta_{\nu i}| \leqq (4/5)|\log x|$$

$$\sum_{i<j}{}' \alpha_{\nu i}\alpha_{\nu j}(\eta_{\nu i} - \eta_{\nu j})^2 \geqq \frac{1}{9} \sum_{i<j} \alpha_{\nu i}\alpha_{\nu j}(\eta_{\nu i} - \eta_{\nu j})^2$$

ただし最後の式の $\sum'$ は和を $i,j \in K$ に制限したもの。そこで

$M_1 = R(M_\nu, \Omega'_\nu)$, $Sp(\Omega'_\nu / M_\nu) = \{\alpha_{\nu 1} \cdots \alpha_{\nu n_\nu}\}$ を考えると定理5.8 より $M \sim M \otimes M_1$ 。そこで $M \otimes M_1 = R(M_\nu \otimes N_\nu \ , \ \Omega_\nu \otimes \Omega'_\nu)$ において K^1_ν , $K^2_\nu \subset Sp(\Omega_\nu \otimes \Omega'_\nu / M_\nu \otimes M'_\nu)$ と一対一対応 ϕ_ν を

$$K^1_\nu = \{\lambda_{\nu i} \ \alpha_{\nu j}; i,j \in K_\nu, \ i < j\}$$

$$K^2_\nu = \{\lambda_{\nu i}, \ \alpha_{\nu j}; \ i,j \in K_\nu, \ i > j\}$$

$$\phi_\nu \lambda_{\nu i}\alpha_{\nu j} = \lambda_{\nu j}\alpha_{\nu i}$$

とおくと

$$|\log (\phi_\nu \lambda/\lambda)| \leqq \frac{4}{5} |\log x|$$

かつ $d_x(M,\Omega) = \infty$ ならば $\sum_\nu \sum_{i<j} \alpha_{\nu i}\alpha_{\nu j}(\eta_{\nu i} - \eta_{\nu j})^2 = \infty$ なので

$$\sum_{\nu}\sum_{\lambda\in k_\nu^1}[\lambda^{1/2} - (\phi_\nu\lambda)^{1/2}]^2 = \infty$$

となる。そこで補題 7.3 より x と 1 の間の y が $r_\infty(M)$ に属することになり $r_\infty(M)=S_x$ に反する。

補題 8.5　$M = R(M_\nu, \Omega_\nu)$, $r_\infty(M) = S_0$ なら $d_0(M,\Omega) < \infty$.
これは定理 4.2 より明らか。以上を総合すると

定理 8.6　$M = R(M_\nu^\ell, \Omega_\nu^\ell)$, $r_\infty(M) = S_x$, $0 \leqq x \leqq 1$ ならば $M \sim R_x$, $r_\infty(M) = S_\infty$ ならば $M \sim R_\infty$.

§9 テンソル積

定義 9.1　$0 \leqq \ell_1 , \ell_2 < \infty$ に対し ℓ_1/ℓ_2 が有理数なら $\ell_1 \ell_2$ が共に ℓ の整数倍となる最大の数 ℓ を $\ell = (\ell_1 , \ell_2)$ と書く。

定理 9.2　$(x_1,x_2) = (0,1)$ or $(1,0)$ でなければ $R_{x_1} \otimes R_{x_2} = R_x$ ただし $x_1 = e^{-\ell_1}$, $x_2 = e^{-\ell_2}$ で

(i)　ℓ_1/ℓ_2 が無理数または $x_1=\infty$ または $x_2=\infty$ なら $x=\infty$.

(ii) ℓ_1/ℓ_2 が有理数なら $x = e^{-(\ell_1,\ell_2)}$

(iii) $x_1 = 0$ $x_2 \neq 0$ なら $x = x_2$, $x_2 = 0$, $x_1 \neq 1$ なら $x = x_1$.

(iv) $x_1 = 1$ $x_2 \neq 0$ なら $x = x_2$, $x_2 = 1$, $x_1 \neq 0$ なら $x = x_1$.

§10 $r_\infty(M) = S_{01}$ の場合

定義 10.1 $\rho(M) = \{x \in [0,1];\ R_x \sim R_x \otimes M\}$

補題 10.2 $M = R(M_\nu, \Omega_\nu)$ なら

$$\rho(M) = \{x \in [0,1];\ d_x(M) < \infty\}$$

補題 10.3 M, N が ITPFI とする。 $x \in \rho(M)$ なら $x^{1/n} \in \rho(M)$, $\rho(M \otimes N) = \rho(M) \wedge \rho(N)$.

定理 10.4 $\rho(R_0) = [0,1)$, $\rho(R_1) = (0,1]$, $\rho(R_0 \otimes R_1) = (0,1)$,

$$\rho(R_x) = \{x^{1/n};\ n \in I_\infty\} \qquad 0 < x < 1$$

$$\rho(R_\infty) = \phi.$$

ITPFI ファクター M で $0 \in \rho(M) \Leftrightarrow M \sim R_0$,

$$1 \in \rho(M) \Leftrightarrow M \sim R_1 .$$

定理 10.5　任意の $0 < \ell < \infty$, および order $p > 2$ まで有理数で近似できる無理数 ξ^{-1} に対し $r_\infty(M) = S_{01}$ のような ITPFI ファクターで $e^{-\ell}, e^{-\xi\ell} \in \rho(M)$, $e^{-\theta\ell} \notin \rho(M)$ のようなものが存在する。ただし θ^{-1} は任意の有界 partial quotients をもつ無理数。

定理 10.6　$r_\infty(M) = S_{01}$ となる M の中に互に同値でないものが連続個ある.

注意　S_{01} に属する M の分離は $r_\infty(M \otimes N)$ を N の関数と考えて N を ITPFI の上を動かして計算することによりかなり行うことができる。これですべての ITPFI M が区別できるかどうかは今後の問題である.