数理解析研究所講究録
第49巻 1968年 34-40

Fourth Example of Type II_1 Factor

東北大 教養 斉藤 信四郎

§1. 序. この講演では, WAI-MEE CHING の最近の論文, NON-ISOMORPHIC, NON-HYPERFINITE FACTORS の前半の部分を紹介する. 可分ヒルベルト空間上の II_1-型 von Neumann factor で(代数的に)同型でないものは, いままでに3つ知られている. 群 G の正則表現から構成される II_1-型 factor を, $A(G)$ であらわせば,

(1) $G=\Pi$, i.e. 自然数全体の上の有限置換全体の作る群のとき, $A(\Pi)$ は hyperfinite II_1-型 factor である.

(2) $G=\Phi_2$, i.e. 生成元が2つの自由群のとき, $A(\Phi_2)$ は non-hyperfinite II_1-型 factor で, 性質(Γ)を持たない.

(3) $G=\Pi\times\Phi_2$ のとき, $A(\Pi\times\Phi_2)$ は non-hyperfinite II_1-型 factor で, 性質(Γ)をもつ.

の3つが既知のものである. この論文では, von Neumann 代数の接合積を用いて, 上の(1), (2), (3)と同型でない第4番

目の non-hyperfinite II_1-型 factor を構成する．

§2．接合積．以下 R は可分ヒルベルト空間 H 上の von Neumann 代数で，ノルム 1 の巡回かつ分離ベクトル $x_0 \in H$ をもつとする．G を R の $*$-自己同型写像群で，$\|t^g x_0\| = \|t x_0\|$ がすべての $t \in R$ についてなりたつものとする。ただし，t^g は $g \in G$ による $t \in R$ の像である．このとき，G は H 上への忠実なユニタリ表現 $g \to u_g$ $(g \in G)$ をもて，

$$u_g t = t^g u_g \qquad (t \in R)$$

をみたす．いま，R, x_0 は上の如くとし，G を 1 つの群，G' を R の $*$-自己同型写像群で，$\|t^{g'} x_0\| = \|t x_0\|$ $(t \in R,\ g' \in G')$ をみたすものとし，φ を G から G' の上への準同型写像とする．G' は，上述の如きユニタリ表現 $g' \to u_{g'}$ を持つから，$g \in G$ に対して，$u_g = u_{g'}$，$t^g = t^{g'}$（ただし，$g' = \varphi(g) \in G'$）と定義する．$\mathcal{H} = \sum^{\oplus}_{g \in G} H_g$，$H_g = H_e$ $(g \in G)$ とするとき，G 上の R-値函数 $t : g \to t(g)$ がすべての $x = (x_g) \in \mathcal{H}$ について，

$$(L_t x)_g = \sum_{h \in G} t(h) u_h x_{gh}, \quad g \in G$$

が H において unconditionally convergent のとき，R-函数という．さらに G 上の R-函数 t に対して，

$$\sum_{g \in G} \|(L_t x)_g\|^2 \leqq K^2 \|x\|^2, \quad x = (x_g) \in \mathcal{H}$$

をみたす定数Kが存在するとき，H上の有界線型作用素 L_t，

$$L_t \ : \ x=(x_g)\in H \longrightarrow ((L_t x)_g)\in H$$

を R-shifter と呼ぶ．

定義．R-shifter 全体の集合を $R\otimes_\phi G$ とかき，Rの (ϕ, G) による接合積と呼ぶ．

定理．$R\otimes_\phi G$ は von Neumann 代数であり，δ_e を $\delta_e(e)=1$，$\delta_e(g)=0\ (g\neq e)$ とすれば，$x_0\otimes\delta_e\in H$ は $R\otimes_\phi G$ の巡回かつ分離ベクトルである．

定理．$R\otimes_\phi G$ は次の(a)，(b)をみたせば factor である．

(a) G' はRの中心上エルゴード的．

(b) 各 $g\in G$，$g\neq e$ は次の(i)，(ii)，(iii)のいずれかをみたす．

(i) $\{h^{-1}gh\ :\ h\in G\}$ はGの無限部分集合（この条件をみたす群をICC-群と呼ぶ）．

(ii) Rが可換 von Neumann 代数で，$g'=\phi(g)$ はR上free

(iii) Rが有限型又はIII型の factor で，$g'=\phi(g)$ が外部自己同型写像．

定理．$R\otimes_\phi G$ が factor のとき，

(i) $R\otimes_\phi G$ が有限型 $\Leftrightarrow$ Rは G'-不変な有限トレースをもつ．

(ii) RがIII型 $\Rightarrow$ $R\otimes_\phi G$ もIII型．

次に第2の接合積 $R_2 = (R \otimes_\varphi G) \otimes_\psi \Delta$ を考える．R_2 に属する作用素 T は $T = (t(g,\lambda))_{g\in G,\, \lambda\in\Delta}$ 又は $(t(g,\lambda))$ とかくことにする．そのうちで特に，$t(g,\lambda) = 0$ for $g \neq e$ なるものを $(t(e,\lambda))_{\lambda\in\Delta}$ とかく．このとき $\psi(\Delta)$ が $\bar{R}$ を $\bar{R}$ に移す（$\bar{R}$ は R の $H \otimes l^2(G) = \bar{H}$ 上への ampliation）ならば，

$$R_1 = \{(t(e,\lambda))_{\lambda\in\Delta}\}$$

は R_2 の von Neumann 部分代数で，次の補助定理が成立する．

補助定理．$\xi = x_0 \otimes \delta_e \otimes \delta_e \in H \otimes l^2(G) \otimes l^2(\Delta)$ とおくとき，R_2 上の正値線形汎函数 $f(S) = (S\xi, \xi)$ $(S \in R_2)$ が

$$f(ST) = f(TS), \quad S \in R_1,\ T \in R_2$$

をみたすとき，バナッハ空間 R_2 からバナッハ空間 R_1 へのノルム1の射影 P が存在して，任意の $T = (t(g,\lambda)) \in R_2$ に対して，

$$P(T) = (t(e,\lambda)) \in R_1$$

をみたす．

§3．第4の FACTOR の構成．Φ を無限個の生成元の系 $\Phi_0 = \{a_0, b_0, a_1, b_1, \cdots\}$ を持つ自由群とし，τ_i は a_i, b_i だけを置換して他は動かさない Φ_0 上の置換，Δ を τ_i $(i = 1, 2, \cdots)$ の生成する群とする．各 $\pi \in \Delta$ は自然な仕方で Φ の自己同型写像 $g \to g^\pi$ $(g \in \Phi)$ をみちびく．このとき，A(Φ) の各

元 $(t(g))_{g\in\Phi}$ に対して，

$$(t(g))^{\pi} = (t(g^{\pi})) \qquad (\pi\in\Delta)$$

と定義すれば，Δ は $A(\Phi)$ の $*$-外部自己同型写像群となる．従って，$A(\Phi)\otimes\Delta$ は II_1-型 factor である．

定義. II_1-型 factor R が性質(Γ)を持つとは，任意有限個の $T_1, T_2, \cdots, T_n \in R$ と任意の正数 $\varepsilon>0$ に対して，ユニタリ作用素 $U\in R$ が存在して，

$$tr(U)=0, \quad [[U^*T_kU - T_k]] < \varepsilon \qquad (k=1,2,\cdots,n)$$

をみたすときである．

定義. von Neumann 代数 R が性質(C)をもつとは，各 $T\in R$ に対して $\operatorname{strong}\lim\limits_n U_n^*TU_n = T$ をみたすユニタリ作用素の列 $\{U_n\}$ $(U_n\in R)$ があたえられたときに，お互に可換な作用素の列 $\{V_n\}$ $(V_n\in R)$ が存在して，$\operatorname{strong}\lim\limits_n (U_n-V_n)=0$ となるときである．

このとき，次の諸定理が証明できて，$A(\Phi)\otimes\Delta$ は §1 でのべた既知の II_1-型 factors $A(\Pi)$, $A(\Phi_2)$, $A(\Pi\times\Phi_2)$ と同型でない第4の II_1-型 factor である．

定理. $A(\Phi)\otimes\Delta$ は性質(Γ)をもつ．

証明. $T_1, T_2, \cdots, T_n \in A(\Phi)\otimes\Delta$ と正数 $\varepsilon>0$ があたえられているとする． $T_1', T_2', \cdots, T_n' \in A(\Phi)\otimes\Delta$ を台が $\Phi\times\Delta$ の有限部分集合 $S\times S'$ となるもので，

$$[[T_k - T_k']] < \varepsilon/2 \quad (k=1,2,\cdots,n)$$

をみたすものとする. S'はΦの有限部分集合であるから, S'の要素にあらわれるΦの要素a_i又はb_jのうちで番号jの最大のものをqとすると, Δが可換群なることに注意すれば, $U = \tilde{u}_{\eta_{q+1}} \in A(\Phi)\otimes\Delta$ は $UT_k' = T_k'U$ $(k=1,2,\cdots,n)$ をみたし, $tr(U) = (U\delta_e\otimes\delta_e, \delta_e\otimes\delta_e) = 0$ である.

$$\therefore \quad [[U^*T_kU - T_k]] \leqq [[U^*(T_k - T_k')U]] + [[T_k' - T_k]]$$

$$< \varepsilon \quad (k=1,2,\cdots,n).$$

定理. $A(\Phi)\otimes\Delta$ は性質(C)をもつ.

証明. $\{U_n\}$ $(U_n \in A(\Phi)\otimes\Delta)$ をユニタリ作用素の列で

$$\operatorname{strong}\lim_n U_n^*TU_n = T, \quad T \in A(\Phi)\otimes\Delta$$

をみたすものとする. $A(\Phi)\otimes\Delta = (R\otimes_\phi\Phi)\otimes\Delta$ (ただしRは複素数体, ϕは$\Phi \to \{e\}$の準同型対応)に補助定理を用いれば, $A(\Phi)\otimes\Delta$ から部分代数 $R_1 = \{(x(e,\lambda))_{\lambda\in\Delta}\}$ の上へのノルム1の射影Pが存在する. $V_n = P(U_n)$ とおけば Δが可換群なることから$\{U_n\}$はお互に可換で, $\operatorname{strong}\lim_n(U_n - V_n) = 0$ をみたす.

定理. $A(\Pi)$, $A(\Pi\times\Phi_2)$は性質(C)をもたない.

証明. $g_i \in \Pi$ をiと$i+1$を置換し他は動かさない元とすると, $U_n = \tilde{u}_{g_n}$ $(n=1,2,\cdots)$ は

$$\operatorname{strong}\lim_n U_n^*TU_n = T, \quad T \in A(\Pi)$$

をみたす．いま $A(\Pi)$ が性質 (C) を持つとすると，お互に可換な作用素の列 $\{V_n\}$ $(V_n \in A(\Pi))$ が存在して $\mathrm{strong\,lim}(U_n - V_n) = 0$ をみたす．所が一方 $g_i g_{i+1} \neq g_{i+1} g_i$ $(i=1,2,\cdots)$ であるから

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2} &= \| \delta_{(g_i g_{i+1})^{-1}} - \delta_{(g_{i+1} g_i)^{-1}} \| = \| (U_i U_{i+1} - U_{i+1} U_i) \delta_e \| \\
&= [[U_i U_{i+1} - U_{i+1} U_i]] \\
&\leqq [[(U_i - V_i) U_{i+1}]] + [[V_i (U_{i+1} - V_{i+1})]] + [[(V_{i+1} - U_{i+1}) V_i]] \\
&\quad + [[U_{i+1} (V_i - U_i)]] \leqq 2 [[U_i - V_i]] + 2 \| V_i \| [[U_{i+1} - V_{i+1}]] \\
&\to 0 \quad (i \to \infty).
\end{aligned}
$$

これは矛盾．