数理解析研究所講究録
第 49 巻 1968 年 59-72

群環を与える double Hilbert algebra.

京大 理 辰馬伸彦

quasi-Hilbert algebra（定義は，J. Dixmier ; Les algèbres d'operateurs dans l'espace Hilbertien, Gauthier Villars, Paris (1957) p66. 参照）（以下 q-Hilb-alg. と略記する）は群環をmodelとして定義されたものと思われるが，次の例の示すように群環を導かない q-Hilb-alg. がある．

例） 2次の複素正方行列全体から普通の和と積および各行列要素の2乗の和のノルムにより作った Hilb-alg. は群環を導かない．事実群 G の群環を導くものとすれば，$L^2(G)$ に対応する Hilbert space は4次元で，従って G の位数は4となる．このような群は可換，従ってその群環さらにそれを導く Hilb-alg. も可換でなくてはならないが，明らかに上記の algebra は非可換であり，矛盾する．

そこで，どのような q-Hilb-alg. が，ある locally compact 群の群環を与えうるか？，さらにそのような群を実際に構成

けるという問題が考えられる．上の例からわかるように，この問題をとくには，単なる g-Hilb-alg. の構造と異る何か他の構造をあわせ考える必要がある．

さて一方，locally compact 群 G が与えられたとき，$L^2(G)$ 中で dense な函数空間 $C_0(G)$ （台が compact な連続函数の全体）の作る g-Hilb-alg. の構造としては，G の群環の構造の制限の他に，普通の函数としての積と，complex conjugation をそれぞれ積および involution とする可換な Hilb-alg. の構造が考えられる．

従って，上記の問題の一つの formulation として，同じ pre-Hilbert space の structure をもった二つの g-Hilb-alg. の構造 (double Hilbert algebra) が与えられたとして出発することが考えられる．当然この二つの structure の間には，何らかの関係が必要であり，それを求めることが課題となる．この立場にもとづいて，Г.И. Кац (G. I. Katz) は "Кольцевые группы и принцип двойственности (Ring groups and the duality principle) I, II，Труды Моск. Мат. Общ. 12 (1963) pp 259〜302 (A.M.S. Transl. Mosc. Math. Soc. pp 291〜339)；13 (1965) pp 84〜113 (Transl. pp 94〜126)" で unimodular な群の群環を与える double Hilbert algebra の必要十分条件を与えている．

こゝでは，T.M. Kay の論文の double Hilbert algebra に関する部分を unimodular と限らぬ群の群環について拡張する．

さらに，Kay の論文の表題に示すように，この問題は群 G の dual から G を構成するという locally compact 群の duality の問題と密接に関係して居り，証明その他の考え方としても多分に duality のそれと重複するので，duality との関連等の考察も併行してすゝめて行きたい．

§1．群に付随した double Hilbert algebra．

まず記号の説明と慣習の意味をあわせて，locally compact 群 G 上につくられる g-Hilb-alg. の構造をあげる．

dg を G 上の右不変測度とし，$\Delta(g)\equiv(dgg_1/dg_1)$ とする．$A\equiv C_0(G)$ とかく．（A は更に他の空間にもとれるがこゝでは一応 $C_0(G)$ をとる．）A は内積

$$\langle x, y\rangle=\int x(g)\overline{y(g)}\,dg, \quad (x, y\in A)$$

によって，$\mathfrak{H}\equiv L^2(G)$ 中の dense subspace となる．

A) 群環としての g-Hilb-alg. の構造．

$$x\cdot y(g)\equiv\int x(gg_1^{-1})y(g_1)\,dg_1, \quad (x, y\in A) \quad [積],$$

$$x^*(g)\equiv\overline{x(g^{-1})}(\Delta(g))^{-1/2}, \quad (x\in A) \quad [involution],$$

$$x'(g)\equiv x(g)(\Delta(g))^{1/2}, \quad (x\in A).$$

と定義すれば，この構造によって A は g-Hilb-alg. となる.

B) 函数環としての Hilb-alg. の構造.

$$x \times y(g) \equiv x(g)y(g), \quad (x, y \in A) \quad \text{[積]},$$

$$x^{\times}(g) \equiv \overline{x(g)}, \quad (x \in A) \quad \text{[involution]},$$

と定義すれば，この構造により A は可換な Hilb-alg. となる.

従って，ある double Hilbert algebra が上に示した形の下に locally compact 群の群環を導くものとすれば，群環構造と異る方の g-Hilb-alg. の構造は可換でなくてはならない。以下この形の double Hilbert algebra を考えよう.

§2. semi-abelian double Hilbert algebra. (s.d. Hilb-alg)

<u>定義</u> C 上の linear space A 上に,

1) 内積 $\langle x, y \rangle$ と2種の積 $x \cdot y$, $x \times y$ とそれに対応する2種の involution x^*, $x^{\times}$, さらに onto の linear map $x^{\wedge}$ が定義されていて,

2) 上の内積と，積 $x \cdot y$, involution x^*, linear map $x^{\wedge}$ によって, A は g-Hilb-alg.

3) 又同じ内積と，積 $x \times y$, involution $x^{\times}$ によって, A は可換な Hilb-alg.,

となるとき, A を <u>semi-abelian double Hilbert algebra</u> (s.d. Hilb-alg. と略記) という.

こゝで少し技巧的であるが以下使う条件，

4) $\langle x, y^\wedge \rangle = \langle x^\wedge, y \rangle$,

5) $(x \times y)^* = x^{*\wedge} \times y^*$,

も定義に含ませて，"s.d. Hilb-alg." といえば 4), 5) もみたすものとしておく。

又 A を上の内積により completion してえられる Hilbert space を $\mathfrak{H}$ で示し，A 上の involution x^* を $\mathfrak{H}$ 上に連続に拡張した写像（1対1 onto になる）を J で示す。

<u>定義</u> $\{\varphi_\alpha\}$ を A からとった $\mathfrak{H}$ の一つの完全正規直交系とする。$\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}$ 上に，

$$W(x \otimes y) = \sum_\alpha \varphi_\alpha \otimes (y \times (\varphi_\alpha^{*\wedge} \cdot x)) \qquad (x, y \in A),$$

によって bounded operator が定義されるときに，これを <u>generative operator</u> と呼ぶことにしよう．

Katz はこの W を

$$\langle x^{*\wedge} \otimes y, W(u \otimes w^x) \rangle = \langle w \times y, x \cdot u \rangle$$

の形で定義しているが，両辺を $\{\varphi_\alpha\}$ で展開することによって，上の定義と同じものを与えることがわかる．特にこの形から見れば，W は $\{\varphi_\alpha\}$ のとり方に関係しないことが明らかである。

結論の定理は，この W により次のようにあらわされる．

<u>定理</u>. semi-abelian double Hilbert algebra A が第一の

g-Hilb-alg. の構造に関して群環を導くためには、

1) generative operator W が存在して unitary である、

2) $\mathfrak{H}\otimes\mathfrak{H}\otimes\mathfrak{H}$ の空間で、i 番目の $\mathfrak{H}$ と j 番目の $\mathfrak{H}$ の2つをまとめた上に W を作用させた形の、$\mathfrak{H}\otimes\mathfrak{H}\otimes\mathfrak{H}$ 上の作用素を $W(i,j)$ とかくとき、

$$W(2,3)\,W(1,2)\,(W(2,3))^{-1} = W(1,2)\,W(1,3)$$

をみたす、

の1) 2)を満足することが必要十分である。

そしてこのとき base になる群は、$\mathfrak{H}$ 上の non-zero bounded operator T で

$$W(T\otimes T) = (I\otimes T)W$$

をみたすものの全体に、作用素としての弱(強と同じになる)位相を入れた群として実現される。

§1 のようにおいた場合、計算により確かめられるように、generative operator は、$x, y \in L^2(G)$ に対して

$$x(g_1)\,y(g_2) \longrightarrow x(g_1g_2)\,y(g_2) \qquad (*)$$

となる写像を与えるから、1)は明らかで、2)も群の元の積の結合律から容易に確かめられる。大定理の後半は、群に対する duality から、$g \to R_g$ の写像の image による実現である。

従って証明には十分性を示すことが、重要となる。

§3. generative operator W.

定理の証明に入る前に少し脱線をして，generative operator W について考察する。W は実は群の duality の証明の際に既にあらわれて居る。すなわち，正則表現 $\mathcal{R}$ のテンソル積 $\mathcal{R}\otimes\mathcal{R}$ を $\mathcal{R}$ の多重直和に分解したときの（完全正規直交系 $\{\varphi_\alpha\}$ に関する）同値対応

$$x\otimes y \longrightarrow \{\langle R_g x, \varphi_\alpha\rangle\, y(g)\}_\alpha$$
$$\Big(L^2(G)\otimes L^2(G) \longrightarrow \sum_\alpha L^2(G)\Big),$$

よりえられる $L^2(G)\otimes L^2(G)$ 上の unitary operator

$$W;\ x\otimes y \longrightarrow \sum_\alpha \varphi_\alpha\otimes(\langle R.x, \varphi_\alpha\rangle y)$$

が，$\{\varphi_\alpha\}$ のとり方によらず，(*) で与えられる operator と一致することは容易にわかる。

従って，duality の証明から，§2 の定理の條件の群が対応する群を与えることになる。W は群と 1 対 1 に対応し，従って群を特長づけるものである。

一方 W を展開形において，

$$W(x\otimes y) = \sum_\gamma \varphi_\gamma\otimes w(x, \varphi_\gamma)y$$
$$(\,w(x,\varphi_\gamma)\ \text{は}\ L^2(G)\ \text{上の bounded operator}\,)$$

とおくとき，$\mathfrak{Y}$ 上の変換 J とは

$$W(x\otimes Jy) = \sum_\gamma \varphi_\gamma\otimes J(w(\varphi_\gamma, x)y) \qquad (**)$$

となることは容易に示される。これから次が云える。

<u>補題</u>　ある $\mathfrak{H}$ から $\mathfrak{H}$ の上への変換 J について，(＊＊) をみたすような unitary な W については，任意に $x(\neq 0)$ を固定したときに，$\{W(x, \varphi_\gamma)f\,;\ f\in\mathfrak{H},\ \gamma\}$ は $\mathfrak{H}$ をはる。

<u>証明</u>　W は $\mathfrak{H}\otimes\mathfrak{H}$ 上で unitary であるから，任意に固定した $\varphi_\gamma(\neq 0)$ に対して，$\{W(\varphi_\alpha, \varphi_\gamma)f\,;\ f\in\mathfrak{H},\ \alpha\}$ は $\mathfrak{H}$ をはる。一方(＊＊)より，$W(\varphi_\alpha, \varphi_\gamma)f = JW(\varphi_\gamma, \varphi_\alpha)Jf$ であり，J は $\mathfrak{H}$ 上 onto な写像であるから，$\{W(\varphi_\alpha, \varphi_\gamma)f\,;\ f\in\mathfrak{H},\ \gamma\}$ は $\mathfrak{H}$ をはる。$\varphi_\gamma = x$ とおけば結論をうる。

こゝで興味あることは，一般に次の補題の成立することである。

<u>補題</u>　W を $\mathfrak{H}\otimes\mathfrak{H}$ 上の unitary operator で，しかも前補題の結論の成立するものとする。このとき，

$$W(T\otimes T) = (I\otimes T)W \qquad (＊＊＊)$$

をみたす $\mathfrak{H}$ 上の non-zero bounded operator は

$$W(L\otimes I) = (L\otimes I)W$$

となる L と可換な unitary operator になる。又かゝる T の全体 G は弱(＝強)位相で locally compact 群を作る。

又 T を bounded の条件をはずし，closed operator$(\neq 0)$で(＊＊＊)をみたすものにとると，このような T の全体は，ある意味で G の複素化を与える。（以下"closed operator" といえば，dense domain を持つもののみをさす。）

補題の前半の証明は，"数学"誌第20巻2号に詳しくあげたので省略し，こゝでは後半のみを示そう．以下(＊＊＊)を満たす non-zero closed operator を admissible であると呼ぶ。

i) まず T が admissible なら，T^*，さらに T^*T もそうであることが容易にわかる．

ii) 次に admissible な T について，$(T^{-1}(0))^{\perp}$ への projection は又 admissible になるが，bounded であるから，補題の前半によって unitary，すなわち identity に等しい．これより，$T^{-1}(0)=\{0\}$ が結論される．

iii) さて，正定値自己共役で admissible な T のスペクトル分解を $T=\int_0^{\infty}\lambda E(d\lambda)$ とする．ii) より $E(0)=0$．

$P(a,b)\equiv(E(b)-E(a))$, $\mathfrak{H}(a,b)\equiv P(a,b)\mathfrak{H}$, $(a<b)$,

とおけば，projection $W(P(a,b)\otimes P(c,d))W^{-1}$ は

$I\otimes P(ac,bd)$ $(a<b,\ c<d)$ でおさえられるから，

$W(\mathfrak{H}(a,b)\otimes\mathfrak{H}(c,d))\subset\mathfrak{H}(ac,bd)$．

一方 $\sqrt{x}=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(1-x)^k$，$(|1-x|<1,\ a_k=-(2k)!/(2k-1)2^{2k}(k!)^2)$ の展開に対応して，

$\forall u\in\mathfrak{H}(a,b)$, $\forall v\in\mathfrak{H}(c,d)$ $(a\cdot c\neq 0)$ をとれば，

$I\otimes\sum_{k=0}^{\infty}a_k(I-(bd)^{-1}T)^k W(u\otimes v)$, $\sum_{k=0}^{\infty}a_k(I\otimes I-(bd)^{-1}T\otimes T)^k(u\otimes v)$

はそれぞれ $I\otimes\sqrt{(b\cdot d)^{-1}T}\,W(u\otimes v)$, $\sqrt{(b\cdot d)^{-1}T\otimes T}\,(u\otimes v)$ に強収束する．正定値作用素 $T\otimes T$ の平方根の一意性から，

$\sqrt{T\otimes T}\,(u\otimes v) = (\sqrt{T}\otimes\sqrt{T})(u\otimes v)$. 一方 (＊＊＊) より、
$(I-(b\cdot d)^{-1}T)^{k}\,W = W\,(I\otimes I-(b\cdot d)^{-1}T\otimes T)^{k}$, 従って,
$(I\otimes\sqrt{T})\,W\,(u\otimes v) = W\,(\sqrt{T}\otimes\sqrt{T})\,(u\otimes v)$. a,b,c,d の任意性と $\sqrt{T}$ の有界性によって, $\sqrt{T}$ は又 admissible である.

iv) iii) をくり返し適用して, 正定値自己共役 admissible な T に対して, $T^{2^{-k}m}$ の形の operator は又 admissible になる. 再び $u\in\mathcal{G}(a,b)$, $v\in\mathcal{G}(c,d)$ なる元に作用させて考えると, one-parameter 群 $\{T^t\}$ $(-\infty<t<\infty)$ の全ての元が admissible であることが云える. $\{T^t\}$ は $A\equiv\int_0^\infty \log\lambda\, E(d\lambda)$ $(E(0)=0$ より定義できる$)$. により $T^t=e^{tA}$ と示される. A は又正定値自己共役であって,

$$(I\otimes A)\,W = W\,(A\otimes I+I\otimes A),$$ を みたす.

v) iv) の A について, $U^t\equiv e^{itA}$ を考えると, これは dense domain をもち, unitary な拡張をもつ. この拡張は又 admissible であり, 有界であるから G に入る. すなわち $\{U^t\}$ は G 中の one-parameter 群を与える. 先の T^t とくみあわせて, $T^x\cdot U^y = e^{(x+iy)A}$ は G 中の one-parameter 群 $\{U^t\}$ の複素化と考えることが出来る.

vi) 任意の admissible な T については, その標準分解を $T=UH$ とすると, $H=\sqrt{T^*T}$ であるから, H は又 admissible で ii) より H^{-1} が存在する. 従って, $U=TH^{-1}$

は又 admissible でしかも有界である．したがってGの元を与えることとなる．すなわち，任意の admissible operator T は，Gの中のある one-parameter 群 $\{U^t\} \equiv \{e^{itA}\}$ から作られた e^A と，Gのある元 U によって，$T = U \cdot e^A$ と示される．これが補題で云う"Gの複素化"の意味である。

(証明終り)

なほ余談になるが，上の補題を群に対する duality の組みあわせて考える．すなわち，locally compact 群 G_0 が与えられたとき，$\mathfrak{W}$ を G_0 から作った generative operator とるならば，補題で作ったGは duality の結論により，G_0 と一致するから，補題の後半は，任意の locally compact 群の複素化の一つを定義するものとみてよいであろう。こゝでGからはみ出した部分，特に正定値作用素からなる部分がGの one-parameter 群の複素化に対応するもののみから成ることは興味がある．そして，複素化の全体が，Gと正定値作用素との積で示されることは，複素化の構造をある意味で簡明にするものと云えよう。

Gが特に Lie 群であるとき，one-parameter 群の集合でうめつくされるGの単位元の近傍があるから，上の定義は従来の意味のGの複素化を与えることになる．これは又，

淡中双対定理の応用として，compact Lie群の複素化を導いた C. Chevalley の結果（"Theory of Lie groups" Chap. VI）に対応するものである。

上の補題で見られるように，$\mathfrak{W}$ に定理の条件2）がなくても，又本質的に（＊）の形の operator でなくても，一応対応した locally compact 群は作ることができる。しかしたとえば，$\mathfrak{W} \equiv A \otimes B$ 特に $\mathfrak{W} \equiv I \otimes I$ (identity) とおいて，補題を適用すれば，対応する G は trivial（I のみからなる群）になることからわかるように，群環を導くためには，$\mathfrak{W}$ が generative operator の形をしていることが必要である。こゝにも，$\mathfrak{W}$ の構造について問題が残っている。

§4. 定理の証明.

定理の証明は，duality のそれを殆ど重複して述べることになるので，あらまし程度にとゞめる。

i) 先ず A の可換 Hilb-alg. 構造によって，$\mathfrak{H}$ を dual である測度空間 $(\mathfrak{M}, \mu)$ の上の $L^2(\mathfrak{M})$ として実現する。$\mathfrak{M}$ に，$(x^{*} \cdot y)(m)$ $(x, y \in A,\ m \in \mathfrak{M})$ を連続とする最弱の topology を入れ，locally compact とする。$x^{*}(m) = \overline{x}(m)$，$(x \times y)(m) = x(m)y(m)$ は定義よりあきらかである。

ii) $(x^{*} \cdot y)(m) = \langle R_m y, x \rangle$ によって，bounded linear operator R_m が $\mathcal{G}$ 上に定義され，

$$W(x\otimes y)(m_1, m_2) = R_{m_2} x(m_1)\, y(m_2) .$$

定理の W の条件 2) は，R_m が (＊＊＊) をみたすことを示す。又 $m \longrightarrow R_m$ が 1対1 の対応であることも容易．

iii) 一方 (＊＊＊) をみたす T は，A の可換環構造の自己同型をひきおこし，$R_m T = R_{T^{-1}(m)}$ が成立する．

まとめると，$\mathfrak{M}$ を R_m の集合と見るときに，operator の積の演算で $\mathfrak{M}$ は群を作り，弱位相により locally compact となる．μ がこの群の右不変測度を与え，A 上の演算が §1 で例示したものに対応することは容易に示される．

§5．あとがき，

今，s.d. Hilb-alg. の定義で，A 上の積 ＊，× がともに可換である場合を考える．(この時 linear map. $x^{\wedge}$ は identity map になる)．テンソル積の順序と，記号 ＊ と × の入れかえを行うと，W と全く同様にして，対応する operator W_1 がえられるが，これは W^* でテンソル積の順序を交換したものである．定理の 1) 2) の条件が W で成立することと W_1 で成立することとは同値である．云いかえるなら，

補題 可換な d. Hilb-alg. A が ＊ を convolution，× を函数の積としてある可換群 G の群環を導くとき，同時に，

可換群 $\hat{G}$ があって，A は × を convolution，* を函数の積として $\hat{G}$ の群環を導く．

$\hat{G}$ が G の character 全体の作る群になることは別に証明されるが，この補題はある意味で Pontrjagin の duality を与えるものといえる．

積 *，× を非可換の場合に拡張しようというのが，Kay の duality principle であるが，これ迄に示して来たように locally compact 群の群環を導こうとする場合，積の一方が可換でなければならないので，積の両方共が非可換であるとすれば，群より一層広い概念を考えることとなる．Kay の ring group はこの idea につながるものである．

又 generative operator W を与えて，それから議論をすすめることも考えられるが，これは W に課すべき条件が複雑になるものと予想される．