数理解析研究所講究録
第 49 巻 1968 年 73-83

辰馬−双対定理と作用素環

東北大学、理学部、竹崎正道

§1. 序文

コンパクト群に対するいわゆる淡中−双対定理は、最近辰馬氏により一般の局所コンパクト群に対する双対定理に拡張された。従って、局所コンパクト群に対する双対定理として、古典的なアーベル群に対する Pontrjagin−双対定理、コンパクト群に対する淡中−双対定理、それから一般の局所コンパクト群に対する辰馬−双対定理と三種類がある訳である。本稿では、これ等の双対定理の背影を群構造から独立した形で群環を特徴ずけることを通じて、作用素環論的に明らかにする。

§2. 群構造に対する若干の考察

G を局所コンパクト群、ds をその左不変ハール測度としておく。G が群であることの最も基本的事実は、

$$G \times G \ni (s, t) \longrightarrow st \in G$$

の写像が、結合律、

(1) $\quad r(st) = (rs)t, \qquad r, s, t \in G$

を満す様に与えられていることである。このことは、G 上の関数 f に対して $\delta(f)(s,t) = f(st)$ という $G \times G$ 上の関数、$\delta(f)$ が対応して、

(2) $\quad (i \otimes \delta) \circ \delta = (\delta \otimes i) \circ \delta$

が結合律(1)の言い換えとして成立つ。但し i は恒等写像の意味である。

次に、写像：$s \in G \longmapsto s^{-1} \in G$ の dual として

(3) $\quad f^{\vee}(s) = f(s^{-1})$

により G 上の関数 f に対して $f^{\vee}$ が対応することになる。

$j : f \longrightarrow f^{\vee}$ と δ の間の関係は $(st)^{-1} = t^{-1}s^{-1}$ により、

(4) $\quad (j \otimes j) \circ \delta = \sigma \circ \delta \circ j$

で与えられる。ここで、σ は $G \times G$ 上の関数 $f(s,t)$ に対し、s と t を入れ換えたもの、

$$(\sigma f)(s,t) = f(t,s)$$

を表すとする。

§3. Involutive Hopf-von Neumann Algebras の定義.

前節の考察をもとに、*involutive Hopf-von Neumann algebra*

の定義を与える。

von Neumann algebra M のテンソル積を $M\otimes M$ で表わす。$M\otimes M$ には $\alpha(x\otimes y)=y\otimes x$ により与えられる reflexion automorphism α が存在する。M から $M\otimes M$ への normal isomorphism δ が diagram

$$
\text{(I)}\qquad
\begin{array}{ccc}
M & \xrightarrow{\ \delta\ } & M\otimes M \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \delta} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \delta\otimes i} \\
M\otimes M & \xrightarrow{\ i\otimes\delta\ } & M\otimes M\otimes M
\end{array}
$$

を可換にする時、（i は恒等写像）$\{M,\delta\}$ を Hopf-von Neumann algebra と呼ぶ。若し

$$\alpha\circ\delta=\delta$$

ならば、$\{M,\delta\}$ は symmetric であるという。M が abelian なら $\{M,\delta\}$ は abelian であるという。$\{M,\delta\}$ の involution j とは

$$\text{(II)}\qquad (j\otimes j)\circ\delta=\alpha\circ\delta\circ j$$

を満す M の anti-automorphism j をいう。$\{M,\delta,j\}$ を involutive Hopf-von Neumann algebra と呼ぶ。

M の predual M_* には j の transpose j_* が作用している。これを、以下、

$$j(a)=a^{\vee},\ a\in M,\quad j_*(\varphi)=\varphi^{\wedge}\quad \varphi\in M_*$$

と書く。M 上の normal faithful semi-finite trace μ が

(Ⅲ) $(\mu\otimes\mu)((a\otimes b)\delta(c)) = (\mu\otimes\mu)((a^{\wedge}\otimes c)\delta(b))$,

$$a, b, c \in M \cap L^1(M, \mu)$$

のとき left-invariant measure on $\{M, \delta, j\}$ という。

right-invariant は

(Ⅲ′) $(\mu\otimes\mu)((a\otimes b)\delta(c)) = (\mu\otimes\mu)((c\otimes b^{\wedge})\delta(a))$

で定義する。両側 invariant の時，unimodular であるという。

§4．局所コンパクト群 G の Associated involutive Hopf-von Neumann algebra と Dual involutive Hopf-von Neumann algebra.

$L^\infty(G)$ は $L^2(G)$ の積による演算での作用素環として von Neumann algebra で，これを $A(G)$ と記す。

$$\delta_G(f)(s, t) = f(st), \quad f \in A(G),$$

$$j_G(f)(s) = f(s^{-1}),$$

$$\mu_G(f) = \int_G f(s)\,ds.$$

とおくと，$\{A(G), \delta_G, j_G, \mu_G\}$ は left-invariant measure μ_G を有する involutive abelian Hopf-von Neumann algebra である。これを G の associated involutive Hopf-von Neumann algebra と称する。

G の左正則表現を λ とする、i.e.

$$(\lambda(s)f)(x) = f(s^{-1}x), \qquad f \in L^2(G),\ s, x \in G.$$

$\{\lambda(s) : s \in G\}'' = M(G)$ とおく。λ のテンソル積 $\lambda \otimes \lambda$ はまた G の表現を与えるから、$\pi_G(\lambda(s)) = \lambda(s) \otimes \lambda(s)$ により、normal isomorphism $\pi_G : M(G) \longrightarrow M(G) \otimes M(G)$ が得られる。$\{M(G), \pi_G\}$ が symmetric Hopf-von Neumann algebra であることは容易に分る。$L^2(G)$ 上の conjugately linear unitary operator C を

$$Cf(x) = \overline{f(x)}, \qquad x \in G.$$

と定義し、$L^2(G)$ 上の operator a に対して

$$\bar{a} = CaC$$

とおくと、$a \in M(G) \longmapsto \bar{a} \in M(G)$ は $M(G)$ の conjugately linear automorphism になり、更に

$$\pi(\bar{a}) = \pi(a)^{-}$$

となる。従って、

$$\chi_G(a) = \overline{a^*}, \qquad a \in M(G)$$

とおけば χ_G は $\{M(G), \pi_G\}$ の involution を与える。この様にして得られた、symmetric involutive Hopf-von Neumann algebra $\{M(G), \pi_G, \chi_G\}$ を G の dual involutive Hopf-von Neumann algebra と呼ぶ。ここで、G を unimodular group とすると $L^1(G) \cap L^2(G)$ は

Dixmier の意味で，Hilbert algebra で $\mathcal{M}(G)$ はその left algebra にほかならないから，そこには canonical な normal faithful semi-finite trace τ_G が存在する。この trace τ_G は $\{\mathcal{M}(G), \pi_G, \chi_G\}$ の unimodular measure になっていることは容易に験証される。

§5. Hopf - von Neumann algebra と双対定理.

$\{A, \delta, j\}$ を任意の involutive Hopf - von Neumann algebra とする。A の predual A_* の元 φ, ψ に対して，その convolution $\varphi * \psi$ を

$$\langle x, \varphi * \psi \rangle = \langle \delta(x), \varphi \otimes \psi \rangle \quad , \quad x \in A$$

と定義すれば，A_* は Banach algebra になる。今 A の $*$ - operation を $x \longmapsto \bar{x}$ と表わし，A_* のそれを $\varphi \longrightarrow \bar{\varphi}$ と記しておいて，

$$\varphi^* = j_*(\bar{\varphi}) \quad , \quad \varphi \in A_*,$$

i.e.

$$\langle x, \varphi^* \rangle = \langle j(x), \bar{\varphi} \rangle \quad , \quad x \in A.$$

とおけば $\varphi \longrightarrow \varphi^*$ は Banach algebra A_* の involution になる。$\{A, \delta\}$ が symmetric なことと，得られた convolution algebra A_* が可換なこととは同値である。

定理．$\{A, \delta, j, \mu\}$ を任意の左不変測度 μ を有する involutive abelian Hopf-von Neumann algebra とすると．一意的に，symmetric involutive Hopf-von Neumann algebra $\{M, \pi, \kappa\}$ が対応し，その convolution algebra M_* は半単純で，その spectrum space G には群構造が導入出来て，局所コンパクト群になり，$\{A, \delta, j, \mu\}$ は G の associated Hopf-von Neumann algebra に，$\{M, \pi, \kappa\}$ は dual Hopf-von Neumann algebra にそれぞれ同型である。

若し，$\{M, \pi, \kappa, \tau\}$ が unimodular symmetric involutive Hopf-von Neumann algebra ならば，やはり，M_* は半単純で，その spectrum space G は局所コンパクト群になり，$\{M, \pi, \kappa, \tau\}$ は G の dual Hopf-von Neumann algebra と同型である。

ここで得られる群 G は一意的である。

これの証明は，convolution algebra の L^2-space への表現を通じて，行われ．それ自身，群上の調和解析との結びつくものとして，興味あるが，長くかかりすぎるのと，概容だけを述べても，結局は原論文をみなければ，意味がつかめないので，省略することにする。

§6. 離散群とコンパクト群.

可換群の場合には、良く知られた様に、離散群とコンパクト群は互に双対的な概念である。われわれの Hopf - von Neumann algebra の立場から眺めると、離散群とコンパクト群の間には次の様な一種の双対関係がある。

定理. 次の $(C_1)-(C_3)$ と $(D_1)-(D_3)$ は同値である。

(C_1) G はコンパクト群である。

(C_2) Associated Hopf - von Neumann algebra の measure μ は finite である。

(C_3) Dual Hopf - von Neumann algebra は co-unit を有する。即ち、convolution algebra M_* は unit をもつ。

(D_1) G は離散群である。

(D_2) Associated Hopf - von Neumann algebra は co-unit をもつ。即ち、convolution algebra A_* は unit をもつ。

(D_3) Dual Hopf - von Neumann algebra の measure τ は finite である。

REFERENCES

1. N. Bourbaki: Intégration, Paris, 1952.
2. H. Cartan and R. Godement: Théorie de la dualité et analysis harmonique dans les groupes abéliens localement compacts, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 64 (1947), 79 - 99.
3. C. Chevalley: Theory of Lie groups. I., Princeton University Press, 1946.
4. J. Dixmier: Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien, Gauthier-Villars, Paris, 1957.
5. ________: Les C*-algèbres et leurs représentations, Gauthier-Villars, Paris, 1965.
6. ________: Formes linéaires sur un anneau d'opérateurs, Bull. Soc. Math., France, 81 (1953), 9 - 39.
7. J. Ernest: A new group algebra for locally compact groups, Amer. J. Math., 86 (1964), 467 - 492.
8. ________: Notes on the duality theorem of non-commutative,non-compact topological groups, Tôhoku Math. J., 15 (1963), 182 - 186.
9. ________: Hopf - von Neumann algebras, Lecture at Functional Analusis Conference at Irvine, 1966.
10. F. P. Greenleaf: Characterization of group algebras in terms of their translation operators, Pacific J. Math., 18 (1966), 243 - 276.
11. G. I. Katz: Ring-groups and the principle of duality I, Trudy Moskov. Mat. Obsc., 12 (1963), 259 - 301.
12. ________: Ring-groups and the principle of duality II, Trudy Moskov. Mat. Obsc., 13 (1965), 84 - 113.

13. J. L. Kelley: Duality for compact groups, Proc. N. A. S., 49 (1963), 457 - 458.

14. M. Krein: A duality principle for bicompact groups and quadratic block algebras, Doklady Akad. Nauk SSSR, 69 (1949), 725 - 728. (Russian)

15. L. H. Loomis: An introduction to abstract harmonic analysis, New York, 1953.

16. Y. Misonou: On the direct product of W*-algebras, Tôhoku Math. J., 6 (1954), 189 - 204.

17. M. A. Naimark: Normed rings, Moscow, 1956.

18. M. A. Rieffel: A characterization of commutative group algebras and measure algebras, Bull. Amer. Math. Soc., 69 (1963), 812 - 814.

19. W. Rudin: Fourier analysis on groups, New York, 1962.

20. K. Saitô: On a duality for locally compact groups, to appear.

21. S. Sakai: The theory of W*-algbras, Mimeographed note, Yale Univ., 1962.

22. I. E. Segal: An extension of Plancherel's formula to separable unimodular locally compact groups, Ann. Math., 52 (1950), 272 - 292.

23. __________: A non-commutative extension of abstract integration, Ann. Math., 57 (1953), 401 - 457.

24. W. F. Stinespring: Integration theorems for gages and duality for unimodular groups, Trans,. Amer. Math Soc., 90 (1959), 15 - 56.

25. S. Takahashi: A characterization of group rings as special class of Hopf algebras, Canad. Math. Bull., 8 (1965), 465 - 475.

26. M. Takesaki: On the conjugate space of operator algebra, Tôhoku Math. J., 10 (1958), 194 - 203.

27. M. Takesaki: A duality in the representation theory of C*-algebras, Ann. Math., 85 (1967), 370 - 382.

28. T. Tannaka: Uber den Dualität der nicht-kommutativen topologischen Gruppen, Tôhoku Math. J., 45 (1938), 1 - 12.

29. N. Tatsuuma: A duality theorem for locally compact groups, J. Math. Kyoto Univ., 6 (1967), 187 - 293.

30. T. Turumaru: On the direct product of operator algebras III, Tôhoku Math. J., 6 (1954), 208 - 211.

31. A. Weil: L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Paris, 1953.

32. J. G. Wendel: Left centralizers and isomorphisms of grou algebras, Pacific J. Math., 2 (1952), 251 - 261.

33. M. Takesaki: A Characterizaiton of Group Algebras as a Converse of Tannaka-Stinespring-Tatsuuma Duality Theorem, to appear Amer. J. Math.