数理解析研究所講究録
第49巻1968年101-125

非可換エルゴード理論

京大 数研 荒木不二洋

無限系の統計力学の枠としてC^*環の理論が考えられ、最近この枠の中で非可換エルゴード理論と称するものが展開されている。その統計力学的背景については別の研究会で述べたので、ここでは作用素環的側面に限って、現在まで知られていることをまとめてみる。エルゴード状態の特徴ずけと任意状態のエルゴード状態への分解が主な内容である。

目　次

§1. 群上の平均

1.1 Godement平均

G：局所コンパクト群

$\mathcal{B}(G)$：G上有界複素数値関数のC^*環，$\|f\|=\sup|f(g)|$。

$\mathcal{C}(G)$：G上連続有界複素数値関数のC^*環，$\subset\mathcal{B}(G)$。

$\mathcal{C}_0(G)$：$f\in\mathcal{C}(G)$，$\lim\limits_{g\to\infty} f(g)=0$　のようなf全体，

$\mathcal{P}(G)$：G上連続正型複素数値関数。正型とは

$$\Sigma\, C_i^* C_j\, f(g_i^{-1} g_j)\geqq 0$$

$\mathcal{V}(G)$：$\mathcal{P}(G)$の元の線形結合全体，

$\overline{\mathcal{V}}(G)$：$\mathcal{V}(G)$の$\mathcal{B}(G)$における閉包，$C^*$環。

$AP(G)$：G上概周期関数のC^*環，すなわち，$f(g)=(\Phi_1, U(g)\Phi_2)$（$U$は$G$の有限次元表現，$\Phi_1$，$\Phi_2$は表現空間のベクトル）全体のノルムによる閉包，

R_s，L_s：$R_s f(g)\equiv f(s^{-1}g)$，　$L_s f(g)\equiv f(gs)$。

Rf：$R_s f$，$s\in G$の凸閉包，

$\overline{R}f$：Rfの$\mathcal{B}(G)$におけるノルムによる閉包，

Lf，$\overline{L}f$も同様

$\mathcal{E}$　：$\overline{R}f$，$\overline{L}f$がともに定数関数を含むようなf全体，

$M(f)$：Godement平均，$\overline{R}f\cup\overline{L}f$に含まれる定数関数の値，

定理1　(a)　$f\in\mathcal{E}$に対し$M(f)$は一意的にきまり，次の性

質をもつ。

(a 1) $\mathcal{E}$ は $\mathcal{B}(G)$ で閉じていて, $|M(f)| \leqq \|f\|$

(a 2) $f \in \mathcal{E}$ なら, f^*, αf, $R_g f$, $L_g f \in \mathcal{E}$ $(\alpha \in C, g \in G)$

$M(f)^* = M(f^*)$, $M(\alpha f) = \alpha M(f)$, $M(R_g f) = M(L_g f) = M(f)$。

(a 3) $f \in \mathcal{E}$, $f \geqq 0$ なら $M(f) \geqq 0$

(b) $\overline{\mathcal{V}}(G) \subset \mathcal{E}$, M は $\overline{\mathcal{V}}(G)$ の R_g, L_g 不変状態。

(c) $f \in \overline{\mathcal{V}}(G)$ に対し, 次の分解が一意的に存在する。

$$f = f_1 + f_2,\quad f_1 \in AP(G),\quad M(|f_2|^2) = 0$$

$f \in \mathcal{V}(G)$ に対し, G のユニタリ表現 U_f, 表現空間のベクトル Φ_1, Φ_2 が存在して

$$f_1(g) = (\Phi_1,\ U_f(g) E_f^F \Phi_2)$$
$$f_2(g) = (\Phi_1,\ U_f(g)(1 - E_f^F)\Phi_2)$$

ただし

E_f^F : 表現 U_f の有限次元不変部分空間への射影子を含む最小の射影子。

$f \in \mathcal{P}(G)$ の場合, $f(g) = (\Phi_f, U_f(g)\Phi_f)$ となる巡回ベクトル Φ_f をもつ表現 U_f に対して, 次の条件は同等である。

(i) U_f が 0 以外 G の有限次元表現を含まない。

(ii) $M(|f|^2) = 0$

(iii) $M(|f|)=0$

(d) 次の性質をもつコンパクト群$\overline{G}$が存在する。

(d1) Gから$\overline{G}$の中への準同型πが存在して$\overline{\pi G}=\overline{G}$

(d2) $f\in AP(G)$に対し$\pi^*f\in\mathcal{C}(\overline{G})$が存在して$\pi^*f(\pi g)=f(g)$,
かつπ^*は$AP(G)$と$\mathcal{C}(\overline{G})$の同型対応(onto)を与える。

(d3) $M(f)=\int_{\overline{G}}\pi^*f(\bar{g})\,dm(\bar{g})\quad(f\in AP(G))$, ここに$m$は$\overline{G}$の規格化された不変測度。

1.2 平均エルゴード定理

$U(g)$: Gのヒルベルト空間H上のユニタリ表現。

E^F : Hの有限次元不変部分空間をすべて含む最小の射影子。

U^E : UのE^FHへの制限。

S_e : Gの既約表現全体。

$U^\sigma(g)$: $\sigma\in S_e$に対する表現演算子。

H^σ : $\sigma\in S_e$の表現空間, 次元はd_σとする。

U^Eの既約分解
$$\begin{cases} E^FH=\sum\limits_{\sigma\in S_e}^{\oplus}H^\sigma\otimes H'^\sigma \\ U^E(g)=\sum\limits_{\sigma\in S_e}^{\oplus}U^\sigma(g)\otimes 1'_\sigma \end{cases}$$

E^σ: Hにおける$H^\sigma\otimes H'^\sigma$への射影子。

定理2 (a) $f \in \mathcal{V}(G)$ に対し，次式をみたすH上有界作用素$M(fU)$が一意的に存在する。

$$(\Phi_1, M(fU)\Phi_2) = M\{f(g)\cdot(\Phi_1, U(g)\Phi_2)\} \quad \forall \Phi_1, \Phi_2 \in H$$

(b) $\|M(fU)\| \leqq \|f\|$

(c) $f(g) = (\Phi_1, U_f(g)\Phi_2)$，$U_f$ と U^E が部分表現を共有しなければ，$M(fU) = 0$。

(d) $M\{(\Phi_1^\sigma, U^\sigma(g)\Phi_2^\sigma)^* U(g)\} = d_\sigma^{-1}\{P_{12} \otimes 1'_\sigma\}E^\sigma$

ただし，$\Phi_1^\sigma, \Phi_2^\sigma \in H^\sigma$，$P_{12}\Phi = (\Phi_2^\sigma, \Phi)\Phi_1^\sigma$ $(\forall \Phi \in H^\sigma)$。

$M(U) = E^0$ (不変ベクトル全体への射影)。

1.3 柔順群と不変平均

定理3 次のいずれかの條件をみたす$\mathcal{C}(G)$の状態ηの存在は，与えられたGに対し同等である。

(1) $\eta(f(hg)) = \eta(f(g))$，$\forall h \in G$ 左側不変平均

(2) $\eta(f(gh)) = \eta(f(g))$，$\forall h \in G$ 右側不変平均

(3) 上記二條件が同時に成立 (両側) 不変平均

定義 不変平均ηをもつ局所コンパクト群を柔順群という。

定理4 柔順群に対しては，任意の不変平均ηは$\mathcal{E}$上Mに一致する。Gが非コンパクトならηは$\mathcal{C}_0(G)$上0である。

$\mathfrak{A}$：C^*環。 $\mathfrak{A}^*$：$\mathfrak{A}$の位相的共軛空間。

$\mathcal{C}(G,\mathfrak{A})$：$G$上$\mathfrak{A}$値弱有界弱連続関数全体。すなわち

$$X \in \mathcal{C}(G,\mathfrak{A}),\ \Phi \in \mathfrak{A}^* \Rightarrow (\Phi, X(g)) \in \mathcal{C}(G)$$

このとき，$\|X\| \equiv \sup\|X(g)\| < \infty$。

$\mathfrak{A}^{**}$　：$\mathfrak{A}$のenveloping W^*環

$\mathcal{L}(H)$：ヒルベルト空間H上の有界作用素全体。

$\mathcal{C}(G,H)$：G上$\mathcal{L}(H)$値有界弱連続関数全体，すなわち

$$X \in \mathcal{C}(G,H),\ \Phi_1,\Phi_2 \in H \Rightarrow (\Phi_1, X(g)\Phi_2) \in \mathcal{C}(G),$$

$$\|X\| \equiv \sup\|X(g)\| < \infty。$$

定理5　(a)　$\mathcal{C}(G)$の状態（G上の平均という）ηに対し，次式をみたす$\mathcal{C}(G,\mathfrak{A})$から$\mathfrak{A}^{**}$への写像$\tilde{\eta}$が一意的に存在する。$X \in \mathcal{C}(G,\mathfrak{A})$に対し，

$$(\Phi, \tilde{\eta}(X)) = \eta\{(\Phi, X(g))\},\ (\forall \Phi \in \mathfrak{A}^*)$$

この$\tilde{\eta}$は次の性質をもつ。

(1)　Xにつき線形。

(2)　有界，$\|\tilde{\eta}(X)\| \leqq \|X\|$。

(3)　正，すなわち　$X(g) \geqq 0\ \ (g \in G) \Rightarrow \tilde{\eta}(X) \geqq 0$。

(4)　$\tilde{\eta}(A) = A$，$\tilde{\eta}(AX) = A\tilde{\eta}(X)$，　$\tilde{\eta}(XA) = \tilde{\eta}(X)A\ \ (\forall A \in \mathfrak{A})$。

(b)　Gが非コンパクト，柔順でηが右側不変なら，

$$\lim_{g\to\infty}(\Phi, X(g)) = 0\ \ (\Phi \in \mathfrak{A}^*) \Rightarrow \tilde{\eta}(X) = 0$$

(c) $\mathcal{C}(G)$の状態ηに対し次式をみたす$\mathcal{C}(G,H)$から$\mathcal{L}(H)$への写像$\tilde{\eta}$が一意的に存在する。$X\in\mathcal{C}(G,H)$に対し，

$$(\Psi_1,\ \tilde{\eta}(X)\Psi_2)=\eta\{(\Psi_1,X(g)\Psi_2)\}\quad(\Psi_1,\ \Psi_2\in H)$$

この$\tilde{\eta}$は次の性質をもつ。

(1) Xにつき線形。

(2) 有界，$\|\tilde{\eta}(X)\|\leqq\|X\|$。

(3) 正，すなわち，$X(g)\geqq 0\ (g\in G)\Rightarrow\tilde{\eta}(X)\geqq 0$。

(4) $\tilde{\eta}(A)=A,\ \tilde{\eta}(AX)=A\tilde{\eta}(X),\ \tilde{\eta}(XA)=\tilde{\eta}(X)A\quad(\forall A\in\mathcal{L}(H))$。

(5) $\tilde{\eta}(X)\in\{X(g);\ g\in G\}''$

(d) Gが柔順局所コンパクト群，$U(g)$がH上Gの連続ユニタリ表現，E^0をG不変ベクトル全体への射影子とすると，

$$\tilde{\eta}(U(g))=E^0。$$

χがGの連続指標，E^χを$U(g)\Psi=\chi(g)\Psi$のようなベクトルΨ全体への射影子とすると，

$$\tilde{\eta}(\chi^*U(g))=E^\chi。$$

1.4 Mフィルター

$\{\alpha\}$：フィルター

f_α：G上可測関数

定義　$\{f_\alpha\}$が次の三條件をみたすとき右Mフィルターとい

う。

(1) $f_\alpha(g) \geqq 0$

(2) $\int f_\alpha(g)\, d\mu(g) = 1$

(3) $\lim_\alpha \int d\mu(g)\, |f_\alpha(g) - f_\alpha(gg')| = 0 \qquad \forall g' \in G$

ここにμは右側不変測度である。同様に左Mフィルターも定義される。

定理6　右Mフィルター f_α に対し，極限

$$\eta_f(h) = \lim_\alpha \int f_\alpha(g)\, h(g)\, d\mu(g)$$

が存在するときはそれを与える右側不変平均が存在する。

例　Van Hove 平均.　$G = \mathbb{R}^n$, $\{\Lambda_k \subset \mathbb{R}^n,\ k = 1, 2, \cdots\}$

に対し

$$v_a^+(\Lambda) \equiv \{g\,;\ \Lambda \cap (S_a + g) \neq \phi\}\ の体積$$

$$v_a^-(\Lambda) \equiv \{g\,;\ \Lambda \supset S_a + g\}\ の体積$$

ただし S_a は原点中心半径 a の球

$$\lim_k v_a^+(\Lambda_k) / v_a^-(\Lambda_k) = 1 \qquad (\forall a)$$

のとき $\Lambda_k \to \infty$ と定義する。$v(\Lambda)$ を Λ の体積とすると，

$$\lim_{\Lambda \to \infty} V(\Lambda)^{-1} \int_\Lambda dx\, h(x)$$

は上の意味で不変平均を与える。

定義　G上$\mathcal{L}(H)$値可測関数Xに対し，次式をみたす$\overline{X}_f^w$，$\overline{X}_f^s$，$\overline{X}_f^u$ $\in \mathcal{L}(H)$が存在すれば，それぞれXの弱平均，強平均，一様平均という。

$$\lim_\alpha \left(\Phi_1, \left[\int f_\alpha(g)X(g)\,d\mu(g) - \overline{X}_f^w\right]\Phi_2\right) = 0, \quad \Phi_1, \Phi_2 \in H$$

$$\lim_\alpha \left\| \left[\int f_\alpha(g)X(g)\,d\mu(g) - \overline{X}_f^s\right]\Phi \right\| = 0, \quad \Phi \in H$$

$$\lim_\alpha \left\| \int f_\alpha(g)X(g)\,d\mu(g) - \overline{X}_f^u \right\| = 0$$

もし存在すれば，いずれも$\hat{\eta}_f(X)$と一致する。

定理7　UがGの連続表現，f_αが右Mフィルター，χがGの連続指標，E^χを$U(g)\Phi = \chi(g)\Phi$のようなベクトルΦ全体への射影とすると，$\chi(g)^* U(g)$のf_αによる強平均が存在して，E^χに等しい。特に，$U(g)$のf_αによる強平均が存在して，E^0に等しい。

§2　C^*環の自己同型による群の表現

2.1　基礎的定義

τ：$\mathfrak{A}$の自己同型によるGの表現　$g \in G \longrightarrow \tau_g \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{A}$

τが強連続とは　$\lim_{g\to 1} \|\tau_g A - A\| = 0 \quad \forall A \in \mathfrak{A}$

τが一様連続とは　$\lim_{g\to 1} \sup_{\|A\|\le 1} \|\tau_g A - A\| = 0$

以下強連続を単に連続という。

共変表現とは，ヒルベルト空間H上の$\mathfrak{A}$の表現π，Gのユニタリ表現Uの組で，次式をみたすもの。

$$U(g)\pi(A)U(g)^{-1} = \pi(\tau_g A)$$

以下 $U(g)$ は連続とする。

$\mathfrak{S}$: $\mathfrak{A}$ の<u>状態</u>全体

H_φ, Ω_φ, π_φ : $\varphi \in \mathfrak{S}$ に対し $\varphi(A) = (\Omega_\varphi, \pi_\varphi(A)\Omega_\varphi)$

できまるヒルベルト空間 H_φ, $\mathfrak{A}$ の H_φ 上表現 π_φ, 巡回ベクトル $\Omega_\varphi \in H_\varphi$ の組。

$\mathfrak{S}_0$: <u>不変状態</u>全体。すなわち $\varphi \in \mathfrak{S}$, $\varphi(\tau_g A) = \varphi(A)$.

U_φ : $\varphi \in \mathfrak{S}_0$ に対し, $U_\varphi(g)\pi_\varphi(A)\Omega_\varphi = \pi_\varphi(\tau_g A)\Omega_\varphi$

できまる G のユニタリ表現。τ が連続なら U_φ も連続。

τ が<u>漸近可換</u>とは $\lim_{g\to\infty} \|[\tau_g A, B]\| = 0 \quad (\forall A, B \in \mathfrak{A})$

τ が<u>弱漸近可換</u>とは $\lim_{g\to\infty} \varphi([\tau_g A, B]) = 0 \quad (\forall A, B \in \mathfrak{A}, \forall \varphi \in \mathfrak{S})$

H 上の表現 π が<u>漸近可換</u>とは

$$\lim_{g\to\infty} (\Psi, \pi([\tau_g A, B])\Psi) = 0 \quad (\forall A, B \in \mathfrak{A}, \forall \Psi \in H)$$

$\varphi \in \mathfrak{S}$ が<u>漸近可換</u>とは H_φ 上 π_φ が漸近可換なこと。

τ が<u>η 可換</u>とは, G の右または左不変平均 η に対し,

$$\eta\{\varphi([\tau_g A, B])\} = 0 \quad (\forall A, B \in \mathfrak{A}, \forall \varphi \in \mathfrak{S})$$

H 上の表現 π が<u>η 可換</u>とは,

$$\eta\{(\Psi, \pi([\tau_g A, B])\Psi)\} = 0 \quad (\forall A, B \in \mathfrak{A}, \forall \Psi \in H)$$

$\varphi \in \mathfrak{S}$ が<u>η 可換</u>とは, H_φ 上 π_φ が η 可換なこと。

τ が<u>M 可換</u>とは, 任意の $A, B \in \mathfrak{A}$, $\varphi \in \mathfrak{S}$ に対し,

$$f(g) \equiv |\varphi([\tau_g A, B])| \in \mathcal{E}, \quad M(f) = 0.$$

H上の表現πがM可換とは，任意の$A, B\in\mathfrak{A}$，$\Psi\in H$に対して
$$f(g)\equiv|(\Psi, \pi([\tau_g A, B]\Psi)|\in\mathcal{E},\quad M(f)=0$$

$\varphi\in\mathfrak{G}$がM可換とは，H_φ上π_φがM可換なこと。

漸近可換，τ可換，M可換の定義で $\varphi\in\mathfrak{G}_0$，$\Psi\in E^0H$ 等の条件をつける場合もある。

τが表現πで大きいとは，$\mathfrak{A}$の任意の自己共軛元Aに対し，
$$K(A)\equiv\overline{\mathrm{conv}}\{\pi(\tau_g A);\ g\in G\},\quad K(A)\cap\pi(\mathfrak{A})'\neq\phi$$
ここに，$\overline{\mathrm{conv}}\{\cdots\}$は$\{\cdots\}$の凸包の弱閉包。

τが$\varphi\in\mathfrak{G}$で大きいとは，π_φで大きいこと。

τが大きいとは任意の$\varphi\in\mathfrak{G}_0$で大きいこと。

共変表現(π, U)がG可換とは，$E^0\pi(\mathfrak{A})E^0$が可換なこと。ここにE^0は$U(G)$不変ベクトル全体への射影

$\varphi\in\mathfrak{G}_0$がG可換とは，(π_φ, U_φ)がG可換なこと。

τがG可換とは，任意の$\varphi\in\mathfrak{G}_0$がG可換のこと。

2.2 相互関係

定理8 (1) τがH上表現πで大きいための必要十分条件は，任意の$\Psi_j\in H$，$n<\infty$，$B_j\in\mathfrak{A}$ $(j=1\cdots n)$，$A\in\mathfrak{A}$に対して
$$\inf_{A'\in K(A)}\max_j|(\Psi_j, \pi([A', B_j])\Psi_j)|=0$$

(2) H上共変表現(π, U)がG可換であるための必要十分条件は，任意の$\Psi \in E^{\circ}H$, $A, B \in \mathfrak{A}$ に対して

$$\inf_{A' \in K(A)} |(\Psi, \pi([A', B])\Psi)| = 0$$

($\inf_{g} |(\Psi, \pi([A, \tau_g B])\Psi)| = 0$ なら十分)

定理9

$\nearrow$ φはM可換,

(1) Gが非コンパクト, φが漸近可換 $\Longrightarrow$ τはφで大きい。

(2) Gが柔順, φがM可換 $\Longrightarrow$ φはη可換 (η任意)

(3) φがM可換 $\searrow$

φがη可換 $\Longrightarrow$ φはG可換.

φでτが大きい $\nearrow$

2.3 性質

$\mathcal{R}$: 共変表現(π, U)で, $\mathcal{R} \equiv (\pi(\mathfrak{A}) \cup U(G))''$,

$\varphi \in \mathfrak{G}_0$ に対しては, $\mathcal{R} \equiv (\pi_\varphi(\mathfrak{A}) \cup U_\varphi(G))''$。

Z : $\mathcal{R}$の中心,

$\mathfrak{C}$: $\overline{\pi(\mathfrak{A})}$ の中心 (ーは弱閉包)

$\mathfrak{C}_0$: $\mathfrak{C} \cap U(G)'$

定理10 τが共変表現(π, U)で大きく, $\mathfrak{C}_0$が忠実なG不変正規状態があるとする。(特にτが$\varphi \in \mathfrak{G}_0$で大きければ この

條件がみたされる。) このとき $\overline{\pi(\mathfrak{A})}$ から $\mathfrak{C}_0$ への写像 γ で，次の性質をもつものが一意的に存在する。

(1) γ は線形，正，正規（normal）

(2) $\gamma(U(g)AU(g)^{-1}) = \gamma(A)$

(3) $\gamma(AB) = \gamma(A)B \quad (B \in \mathfrak{C}_0)$, $\gamma(1) = 1$

(4) $\overline{\pi(\mathfrak{A})}$ の任意の正規 G 不変状態 ρ に対し

$$\rho = (\rho | \mathfrak{C}_0) \cdot \gamma$$

(5) $\gamma(A)E^0 = E^0 A E^0$

定理11　(1) 共変表現 (πU) が η 可換のために

$$m_\eta(A) \equiv \tilde{\eta}\{U(g)AU(g)^{-1}\} \in \mathfrak{C} \quad (\forall A \in \pi(\mathfrak{A}))$$

が必要十分。このとき，$m_\eta(A) \in \mathfrak{C}_0$ である。また $E^0 m_\eta(A) = E^0 A E^0$。

(2) τ が η 可換であるためには，

$$m_\eta(A) \equiv \tilde{\eta}\{\tau_g A\} \in \mathfrak{A}^{**} \text{ の中心} \quad (\forall A \in \mathfrak{A})$$

が必要十分である。

定理12　$\varphi \in \mathfrak{S}_0$ が M 可換なら，任意の $f \in \overline{\mathcal{V}}(G)$, $\Psi_1, \Psi_2 \in H_\varphi$, $A \in \mathfrak{A}$ に対して

$$F(g) \equiv f(g)(\Psi_1, \pi_\varphi(\tau_g A)\Psi_2) \in \mathcal{E}$$

このとき $\mathfrak{A}$ から $\mathfrak{C}$ への写像 M_f を

$$(\Psi_1, M_f(A)\Psi_2) = M(F)$$

で定義すると，$f \to M_f$ は線形，正（$f \geq 0,\ A \geq 0 \Rightarrow M_f(A) \geq 0$），有界（$\| M_f(A) \| \leq \| f \| \| A \|$），で次式をみたす．

$M_f = M_{f_1}$　ただし $f = f_1 + f_2$ は定理1(c)の分解．

$M_f(\tau_g^{-1} A) = M_{L_g f}(A)$

$U_\varphi(g) M_f(A) U_\varphi(g)^{-1} = M_{R_g f}(A)$

$M_{f^*}(A) = M_f(A^*)^*$

$M_f(A) B E^0 = B M(f U_\varphi) \pi_\varphi(A) E^0$

$M_1(A) \in \mathfrak{C}_0$，　$E^0 M_1(A) = E^0 A E^0$

注意　γ，M_1，$\mathfrak{m}_\eta$ が共通に定義される場合はたがいに等しい。

定理13　任意の共変表現(π, U)で

$$E^0 (E^0 \pi(\mathfrak{a}) E^0)' = E^0 (E^0 \pi(\mathfrak{a})' E^0)'' = \mathcal{R}' E^0$$

もし，$E^0 H$ が $\pi(\mathfrak{a})$ につき巡回的なら

$$A \in \mathcal{R}' \Longleftrightarrow AE^0 \in \mathcal{R}' E^0$$

は $\mathcal{R}'$ と $\mathcal{R}'E^0$ の同型対応を与える。

定理14　$E^0 H$ が $\pi(\mathfrak{a})$ につき巡回的で　共変表現が G 可換なら，定理13の $\mathcal{R}'E^0$ は $E^0 H$ で極大可換で　（すなわち $\mathcal{R}'E^0 = (E^0 \pi(\mathfrak{a}) E^0)'' E^0$），さらに $\mathcal{R}'$ は可換である。

定理15　$\varphi \in \mathfrak{G}_0$ が, M可換, τ可換, または, τ が φ で大きい, のいずれかが成立すれば, $\mathcal{R}' = \mathbb{C}_0$ である。

2.4　共変環

C^*環 $\mathfrak{A}$ と G の $Aut\,\mathfrak{A}$ による連続表現 τ が与えられたとき, 共変 C^*環 $\mathfrak{A}^G$ とは, 次の＊環に C^*ノルムを入れて完備化したものである：

$$X \in \mathfrak{A}^G : \quad g \in G \longrightarrow X(g) \in \mathfrak{A},$$

$$\int \| X(g) \| \, d\mu(g) < \infty \qquad (\mu : \text{左側不変測度})$$

$$(X * Y)(g) = \int X(s) \tau_s Y(s^{-1} g) \, d\mu(g)$$

$$X^*(g) = \tau_g X(g^{-1})^* \left(d\mu(g^{-1}) / d\mu(g) \right)$$

定理16　0表現を含まない共変表現 (π, U) と共変 C^*環 $\mathfrak{A}^G$ の0表現を含まない表現の間に, 次式により一対一対応が存在する。このとき $\hat{\pi}(\mathfrak{A}^G)'' = \mathcal{R}$ である。

$$\hat{\pi}(X)\Psi = \int \pi(X(g)) U(g) \Psi \, d\mu(g) \qquad (\forall \Psi \in H)$$

§3　エルゴード状態と分解定理

3.1　エルゴード状態

定理17　$\varphi \in \mathfrak{G}_0$ が G可換なら, φ に対する次の条件は, たがいに同値である。

(1) φ は $\mathfrak{G}_0$ の端点（エルゴード状態）.

(2) $\mathfrak{K}$ が H_φ で既約（$\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{K}$ がファクターである）.

(3) $\dim E^0 H_\varphi = 1$（すなわち, $U_\varphi(g)\Psi = \Psi,\ \forall g \in G \Rightarrow \Psi = c\Omega_\varphi$）.

注意　(3) → (2) $\Leftrightarrow$ (1) は G可換の仮定なしに成立。前項の定理を使って，いろいろの条件のもとで，$\mathfrak{K}$ をいろいろに書き変えると，上記と等価な違った形の条件がいろいろ得られる。それは一々書かないことにする。

定理18　τ が $\varphi \in \mathfrak{G}_0$ で大きければ，φ に対する次の条件は，上記条件と同等である。

(4)　$(\Omega_\varphi,\ \gamma(A)\pi_\varphi(B)\Omega_\varphi) = \varphi(A)\varphi(B)$　$(\forall A, B \in \mathfrak{A})$

(4)'　$\gamma(A) = \varphi(A)\cdot 1$　$(\forall A \in \mathfrak{A})$

定理19　$\varphi \in \mathfrak{G}_0$ が M可換なら，次の条件は (1) と同等。

(5)　$M\{\varphi(A^* \tau_g A) - |\varphi(A)|^2\} = 0$　$(\forall A \in \mathfrak{A})$

(5)'　$M\{\varphi(A \tau_g B)\} = \varphi(A)\varphi(B)$　$(\forall A, B \in \mathfrak{A})$

(5)''　$M_1(\pi_\varphi(\tau_g A)) = \varphi(A)\cdot 1$　$(\forall A \in \mathfrak{A})$

定理20　$\varphi \in \mathfrak{G}_0$ が η 可換なら，次の条件も (1) と同等。

(6)　$(\Omega_\varphi,\ \pi_\varphi(A^*)\, m_\eta(A)\,\Omega_\varphi) = |\varphi(A)|^2$　$(\forall A \in \mathfrak{A})$

(6)'　$\eta\{\varphi(A \tau_g B)\} = \varphi(A)\varphi(B)$　$(\forall A, B \in \mathfrak{A})$

(6)″ $m_\eta(A) = \varphi(A)1$ $\qquad (\forall A \in \mathfrak{A})$

注意 (4), (5)′, (6)′ の條件は，弱クラスター性といわれる。τ が漸近可換で，$\pi(\mathfrak{A})''$ がファクターならば，次の強クラスター性が成立する。

$$\lim_{g\to\infty} \varphi(A\tau_g B) = \varphi(A)\varphi(B) \qquad (\forall A, B \in \mathfrak{A})$$

$$w\text{-}\lim_{g\to\infty} \pi_\varphi(\tau_g A) = \varphi(A)\cdot 1 \qquad (\forall A \in \mathfrak{A})$$

3.2 分解定理

$\mathfrak{S}_0$（弱＊コンパクト）の上の測度全体に

$\mu_1 \leqq \mu_2 \Longleftrightarrow \mu_1(f) \leqq \mu_2(f)$，$f$ は任意の連続凸関数により順序を入れる。点測度 δ_φ（$\delta_\varphi(f) = f(\varphi)$）に対し

$$\delta_\varphi \leqq \mu \Longrightarrow \varphi(A) = \int \xi(A)\, d\mu(\xi)$$

もし測度 μ が $\mathfrak{S}_0$ の端点集合の中に台を持てば，上記は φ の端点状態（エルゴード状態）への積分分解になる。そこでそのような分解が存在し一意的かが問題となる。

μ の台 $\subset$ 端点集合 $\Longrightarrow$ μ は極大（$\mu \leqq \mu' \Longrightarrow \mu' = \mu$）

そこで，$\delta_\varphi \leqq \mu$ をみたす極大な μ が存在し一意的かを問題にする。

任意の $\varphi \in \mathfrak{S}_0$ に対し，$\delta_\varphi \leqq \mu$ なる極大な μ が一意的のとき，$\mathfrak{S}_0$ は単体であるという。たとえば，さらに $\mathfrak{S}_0$ の境界が閉じていれば，μ の台は端点集合に含まれる。

定理22

(1) $1\in\mathfrak{A}$ で τ が G 可換なら $\mathfrak{S}_0$ は単体である。

(2) τ が大きくて, $\mathfrak{S}_0\neq\phi$ なら, $\mathfrak{S}_0$ は単体である。

定理23

(1) $\mathfrak{A}$ が可分, $\varphi\in\mathfrak{S}_0$ が G 可換なら, $E^0\pi_\varphi(\mathfrak{A})E^0$ で生成される可分可換 C^* 環に関する状態 φ の端点分解 $\varphi=\int x\,d\mu(x)$ により, φ の $\mathfrak{S}_0$ における端点分解

$$\varphi(A)=\int x(E^0AE^0)\,d\mu(x)$$

が与えられる。

(2) $1\in\mathfrak{A}$, τ が G 可換, $\mathfrak{A}_\alpha\subset\mathfrak{A}$ が可附番個の C^* 環で, $\bigcup_\alpha\mathfrak{A}_\alpha$ が $\mathfrak{A}$ で稠密, $\mathfrak{J}_\alpha$ が $\mathfrak{A}_\alpha$ の可分閉両側イデアル, F_α は $\varphi\in\mathfrak{S}$ のうち $\varphi|\mathfrak{J}_\alpha$ がノルム1のもの全体, $F=\bigcap_\alpha F_\alpha$, $F^0=F\cap\mathfrak{S}_0$ とする。このとき積分分解

$$\varphi(A)=\int x(A)\,d\mu(x)$$

において, μ の台は $\mathfrak{S}_0$ の端点と $\mathbf{F}$ の共通部分に含まれる。

[第二段はこの形で具体的な応用例がある。]

注意 $\delta_\varphi\leq\mu$ をみたす極大測度 μ は

$$\mu(\hat{A}_1\cdots\hat{A}_n)=(\Omega_\varphi,E^0\pi_\varphi(A_1)E^0\cdots E^0\pi_\varphi(A_n)E^0\Omega_\varphi)$$

で決定される。ただし $\hat{A}$ は $\mathfrak{S}_0$ 上の関数 $\hat{A}(\psi)\equiv\psi(A)$ であり, $\hat{A}_1\cdots\hat{A}_n$ は n 個の関数 $\hat{A}_j(\psi)$ の積である。

定理24　$\mathfrak{S}_0$が単体で，その端点集合が閉じているためには，ある可換C^*環$\mathcal{B}$と，$\mathfrak{A}$から$\mathcal{B}$への写像ζで次の性質をみたすものの存在が必要十分である．ζは線形，正，$\tau(G)$不変，$\zeta(1)=1$，$\zeta(\mathfrak{A})$はノルムで$\mathfrak{A}$の中で稠密，$\varphi\in\mathfrak{S}(\mathcal{B})$から$\varphi\circ\zeta\in\mathfrak{S}_0$への写像が$\mathfrak{S}_0$の上への写像である。ただし，$\mathfrak{S}(\mathcal{B})$は$\mathcal{B}$の状態全体。このとき$\mathcal{B}$は同型対応を除いて一意的。

注意　Gとして$\mathfrak{A}$のユニタリ作用素全体，τとして内部自己同型をとると，τは大きくて，$\mathfrak{S}_0$は規格化されたトレース全体になる。このときの分解はファクタートレースへの分解である。

3.3　部分群に関する分解と弱 mixing 性

定理25　$\varphi\in\mathfrak{S}_0$がM可換のとき，φに対する次の条件は同値である。

(1)　$\dim E^F = 1$　(E^Fは§1.2に定義)。

(2)　$M\{|\varphi(A^*\tau_g A) - |\varphi(A)|^2|\} = 0$　$(\forall A\in\mathfrak{A})$。

(3)　$M\{|(\Phi_1, \pi_\varphi(\tau_g A)\Phi_2) - \varphi(A)(\Phi_1,\Phi_2)|\}=0$　$(\forall A\in\mathfrak{A}, \Phi_1,\Phi_2\in H)$。

このような状態を弱 mixing 状態という。

定理26　$\varphi\in\mathfrak{S}_0$がM可換でエルゴード状態とする，

$$M^\sigma_{ab}(A) \equiv M_{f^*}(A), \qquad f(g) = (a, U^\sigma(g)b)$$

$$a,\ b \in H^\sigma, \quad A \in \mathfrak{A}$$

とおくと，

$$U_\varphi(g) M^\sigma_{ab}(A)\, U_\varphi(g)^{-1} = M^\sigma_{a'b}(A), \quad a' = U^\sigma(g)a$$

$$M^\sigma_{a,b}(A)\Omega_\varphi \subset H^\sigma \otimes H'^\sigma$$

定理27　$\mathfrak{A}$が弱漸近可換，Gが非コンパクト，(π, U)が共変表現，NはUに含まれるすべての有限次元表現U^σに対し$U^\sigma(g)=1$となるgの作るGの部分群，$\mathfrak{G}=G/N$がコンパクトまたは連結とする。このとき$E^F\pi(A)E^F$ $(A\in\mathfrak{A})$は可換である。

定義　$\mathfrak{A}$が弱漸近可換，$\varphi\in\mathfrak{S}_0$がエルゴード状態，(π_φ, U_φ)に関する前定理のN, $\mathfrak{G}$をN_φ, $\mathfrak{G}_\varphi$と書く。

(1)　φがE_I状態とは，定理25の条件がみたされているとき。すなわち$N_\varphi = G$のとき。

(2)　φがE_{II}状態とは$N_\varphi \neq G$で，$\mathfrak{G}_\varphi$がコンパクトのとき。

(3)　φがE_{III}状態とは$\mathfrak{G}_\varphi$が非コンパクトのとき。

定理28　位相群Gの閉不変部分群Hに対しG/HがコンパクトでG不変測度dgをもつものとする。$\int_{G/H} dg = 1$とする。さらに$\mathfrak{A}$が連続で，$\varphi\in\mathfrak{S}_0$がエルゴード状態とする。そのとき$\mathfrak{A}$のH不変状態全体$\mathfrak{S}^H_0$の端点集合の中に台をもつ測度μで$\mu \geq \delta_\varphi$となるものが存在する。さらに$\mathfrak{S}^H_0$の端点$\tilde{\varphi}_H$が

存在して，

$$\mu(\psi)=\int_{G/H} dg\,\psi(\tau_g^{*}\tilde{\varphi}_H) \qquad (\forall\psi\in\mathcal{C}(\mathfrak{S}_0^H))$$

特に，

$$\varphi(A)=\int_{G/H} dg\,\tilde{\varphi}_H(\tau_g^{-1}A) \qquad (\forall A\in\mathfrak{A})$$

τが漸近可換ならこの分解は一意的で，$\tilde{\varphi}_H$ は τ_g^* での変換を除いて一意的にきまる。

φが E_I 状態なら，$\tilde{\varphi}_H=\varphi$，φが E_{II} 状態のとき，$H=N_\varphi$ にとれば，$\tilde{\varphi}_H$ は N_φ について E_I 状態であり，任意のHについては

$$\tilde{\varphi}_H(A)=\int_{H/(H\cap N_\varphi)} dg\;\tilde{\varphi}_{N_\varphi}(\tau_g^{-1}A)$$

定理29　（スペクトルの性質）

(1)　τがM可換で $\varphi\in\mathfrak{S}_0$ がエルゴード状態のとき，$U^\sigma, U^{\sigma'}$ が U_φ に含まれていれば $U^\sigma\otimes U^{\sigma'}$ は U と *disjoint* ではない。また $U^{\bar{\sigma}}$ も U に含まれる。（$\bar{\sigma}$ は σ に複素共軛な表現）

(2)　定理28の場合，φが E_{II} 状態なら E^F における G の表現は $\mathfrak{G}_\varphi$ の正則表現である。

注意　$E^F H_\varphi=\{\Psi\in H_\varphi,\ U_g\Psi=\Psi\quad(\forall g\in N_\varphi)\}$　（φは E_{II} 状態）

3.4　概周期状態

$\mathcal{B}$：バーナッハ空間

$\mathbb{G}_{\mathrm{I}}$：$\mathcal{B}$の isometry の作るある群

$AP(\mathcal{B})$：概周期元の全体．すなわち $x \in \mathcal{B}$ で $\{gx, g \in \mathbb{G}_{\pi}\}$ がノルム位相で條件的コンパクトなもの全体．（i.e $\overline{\mathbb{G}_{\pi} x}$ が $\mathcal{B}$ でコンパクト．） $\mathcal{B}$ の G 不変閉部分空間

$\mathcal{B} = H$（ヒルベルト空間）

$$\Psi \in AP(H) \Leftrightarrow (\Psi, U(g)\Psi) \in AP(\mathbb{G}_{\pi}) \ (\equiv AP(\mathcal{C}(\mathbb{G}_{\pi})))$$
$$\Leftrightarrow (\Psi, U(g)\Psi) \in AP(\mathbb{G}_{\pi})$$
$$\Leftrightarrow \Psi \in E^F H$$

$\mathcal{B} = \mathfrak{A}^*$，$\mathbb{G} = \tau(G)^*$ のとき $\mathfrak{S} \cap AP(\mathfrak{A}^*)$ の元を概周期状態という。

定理30　G が局所コンパクト可換群，τ が弱漸近可換，φ を概周期状態とすると，$\mathfrak{S}$ 上の測度のうち $\mu' = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \delta_{\varphi_i}$，$N > \infty$，$\alpha_i \geq 0$，$\sum \alpha_i = 1$，$\sum \alpha_i \varphi_i = \varphi$，$\varphi_i$ は概周期的，のような μ' で弱＊位相で近似できる測度には，一意的に極大測度 μ_φ が存在する。

§4　その他

定理31　$\varphi \in \mathfrak{S}_0$ が大きくて，$R \equiv \pi_\varphi(\mathfrak{A})''$ がファクターとする．このとき次のいずれかが成立する。

(1) R は III 型 $\Longleftrightarrow$ R' が有限型でない。

(2) R が有限型 $\Longleftrightarrow$ φ がトレースを与える。

(このとき *coupling* は 1)

(3) R が I_∞ または II_∞ 型 $\Longleftrightarrow$ R' が有限型で φ はトレースでない。

$G = R$ の場合，ある解析関数 $F_{AB}(Z)$ で $\varphi(A\tau_t B) = F(t)$，$\varphi((\tau_t B), A) = F(t + i\beta)$ （β は定数）となるものが，任意の A，$B \in \mathfrak{A}$ に対し存在するような $\varphi \in G_0$ は，KMS 条件をみたすという。このような φ についていくつかの事実が知られている。また $U_\varphi(t) = e^{iHt}$ と書いたときの H が下に有界のような表現は，上記の $\beta \to \infty$ の極限とも考えられ，それについても特殊な性質が知られている。$\beta = 0$ ならトレース状態である。

文　　献

S. Doplicher, D. Kastler and D. W. Robinson, Commun. Math. Phys. 3 (1966), 1-28.

D. Ruelle, Commun. Math. Phys. 3 (1966), 133-150.

D. Kastler and D. W. Robinson, Commun. Math. Phys. 3 (1966), 151-180.

D. Ruelle and D. W. Robinson, Ann. Inst. H. Poincaré, "Extremal Invariant States".

O. E. Lanford and D. Ruelle, J. M. P. 8 (1967), 1460-1463.

E. Størmer, Commun. Math. Phys. 5 (1967), 1-22.

S. Doplicher, R. V. Kadison, D. Kastler and D. W. Robinson, Commun. Math. Phys. 6 (1967), 101-120.

S. Doplicher and D. Kastler, Commun. Math. Phys. 7 (1968), 1-20.

D. Ruelle, Almost periodic states on C*-algebras.

E. Størmer, Commun. Math. Phys. 6 (1967), 194-204.

N. M. Hugenholtz, Commun. Math. Phys. 6 (1967), 189-193.