数理解析研究所講究録
第50巻 1968年 1-16

Hopf algebra について

阪市大理　吉村善一

§1. 序

Underlying module が Z_2-grading である Hopf algebra について考察する。それは普通の non-negative grading を Z_2-grading におきかえることによって定義される, cf. [1]。Milnor-Moore [4] は graded connected quasi Hopf algebra の coprimitivity を characterize した。Underlying module を non-negatively graded の代わりに Z_2-graded とした時, Milnor-Moore の結果に対応して semi-connected quasi Hopf algebra の coprimitivity と primitivity を characterize する事が我々の目的である。まず最初に Milnor-Moore の結果を思い出して, それから主定理を述べよう。

[定理] (Milnor-Moore)

A を標数 p の体 K の上の graded connected quasi Hopf algebra とする。その時，

A が coprimitive である必要かつ十分な条件は，その multiplication φ が associative でかつ commutative で，$x^p = 0 \quad x \in \bar{A}$ である。

［主定理］

A を標数 p の体 K の上の semi-connected quasi Hopf algebra とする。その時，

(1) A が coprimitive である必要かつ十分な条件は，その multiplication φ が associative でかつ commutative で，

$$\bar{\xi}_p : \operatorname{Ker} \Sigma_p \to A^{\otimes p} \xrightarrow{\varphi_{p-1}} A \to \bar{A}$$

が 0-map である。

(2) A が primitive である必要かつ十分な条件は，その multiplication ψ が associative でかつ commutative で

$$\bar{\gamma}_p : \bar{A} \to A \xrightarrow{\psi_{p-1}} A^{\otimes p} \to \operatorname{Coker} \Sigma_p$$

が 0-map である。

ここに，$c_p : A^{\otimes p} \to A^{\otimes p}$ を cyclic permutation とすると $\Sigma_p = 1 + c_p + \cdots + c_p^{p-1}$ である。

§2. Basic filtration.

K を体とする。K の上の Z_2-graded module M, i.e., $M = M_0 \oplus M_1$, は G_2-module とよばれる。G_2-module M は canonical involution σ ($\sigma | M_0 = 1$, $\sigma | M_1 = -1$) をもつ。我々は algebra (又は coalgebra) とは, underlying module が G_2-module で augmentation と unit (又は counit) をもち, associativity を仮定しないもの (i.e., augmented quasi algebra (又は coalgebra)) と常に理解する。

ここで本質的には Browder [3] に負う2つの filtration を定義しよう。A を multiplication φ (又は comultiplication ψ) と unit η (又は counit ε) と augmentation ε (又は η) とをもった algebra (又は coalgebra) とする。$\varepsilon \cdot \eta = 1_K$ より G_2-module の直和分解

$$A = \mathrm{Im}\,\eta \oplus \mathrm{Ker}\,\varepsilon$$
$$= K \oplus \bar{A}$$

をもつ。ここに K と $\mathrm{Im}\,\eta$ は isomorphism $\eta : K \cong \mathrm{Im}\,\eta$ でもって identify され, $\mathrm{Ker}\,\varepsilon$ は $\bar{A}$ によって表わされる。inclusion $\bar{A} \subset A$ と projection $A \to \bar{A}$ は

i と p によって表わされる。 $A^{\otimes k} = A\otimes\cdots\otimes A$ を A の k 個の tensor product とする時，

$$\varphi^{(i)} = 1\otimes\cdots\otimes 1\otimes\varphi\otimes 1\otimes\cdots\otimes 1 \ ; \ A^{\otimes k+1} \longrightarrow A^{\otimes k}$$

$$(\text{又は } \psi^{(i)} = 1\otimes\cdots\otimes 1\otimes\psi\otimes 1\otimes\cdots\otimes 1 \ : \ A^{\otimes k} \longrightarrow A^{\otimes k+1})$$

を i 番目の tensor factor に φ（又は ψ）を含む map とする。

$\overline{W}_k = \{(i_1,\cdots,i_k) \ ; \ 1\leqq i_s\leqq s, \ 1\leqq s\leqq k\}, \ k\geqq 1$ と定義すると，任意の元 $w_k = (i_1,\cdots,i_k)\in\overline{W}_k$ に対して

$$\varphi_k^{w_k} = \varphi^{(i_1)}\varphi^{(i_2)}\cdots\varphi^{(i_k)} \ ; \ A^{\otimes k+1} \longrightarrow A$$

$$(\text{又は } \psi_k^{w_k} = \psi^{(i_k)}\psi^{(i_{k-1})}\cdots\psi^{(i_1)} \ ; \ A \longrightarrow A^{\otimes k+1})$$

なる map が定義できる。

$$\overline{\varphi}_k^{w_k} = \varphi_k^{w_k}(i\otimes\cdots\otimes i) \ : \ \overline{A}^{\otimes k+1} \to A$$

$$(\text{又は } \overline{\psi}_k^{w_k} = (p\otimes\cdots\otimes p)\,\psi_k^{w_k} \ ; \ A \longrightarrow \overline{A}^{\otimes k+1})$$

とおくと，A の decreasing（又は increasing） filtration $\{F^kA\}$（又は $\{G^kA\}$）は

$$F^0A = A, \quad F^1A = \overline{A},$$

$$F^{k+1}A = \textstyle\sum_{w_k\in\overline{W}_k} \operatorname{Im}\overline{\varphi}_k^{w_k} \quad k\geqq 1$$

$$(\text{又は } G^0A = K, \quad G^kA = \textstyle\bigcap_{w_k\in\overline{W}_k}\operatorname{Ker}\overline{\psi}_k^{w_k} \quad k\geqq 1)$$

によって定義される。それは A の F-filtration（又は G-filtration）とよばれる。もし algebra（又は coalgebra）が associative ならば，これらの

filtration は Browder [3] のそれと一致する。
これらの associated graded G_2-module とは

$$E_0(A) = \sum_{k \geq 0} E_0^k A, \quad E_0^k A = F^k A / F^{k+1} A$$

(又は $_0E(A) = \sum_{k \geq 0} {}_0E^k A, \quad {}_0E^k A = G^k A / G^{k-1} A$)

によって定義される。

$$Q^k A = \bar{A} / F^{k+1} A \qquad k \geq 1$$

(又は $P^k A = \bar{A} \cap G^k A \qquad k \geq 1$)

とおく。特に $Q^1 A$ (又は $P^1 A$) は [4] に従って $Q(A)$ (又は $P(A)$) と表わされることもある。

〔定義〕 algebra (又は coalgebra) が semi-connected であるとは

$$\bigcap_{k \geq 0} F^k A = \{0\}$$

(又は $\bigcup_{k \geq 0} G^k A = A$)

の条件を充たす時に云う。

graded connected algebra (又は coalgebra) は明らかに semi-connected であることに注意しよう。

algebra A は decreasing filtration $\{F^k A\}$ によって topological space とみなせるが、A が semi-connected であるとはそれが Hausdorff space であることを示している。

F-filtration (又は G-filtration) に関する性質

（cf. [3]）は associativity と finiteness の仮定を除いても成立する事が解かるので，[主定理] を証明するための次の main tool を得る。

[命題7]　$T: A \to B$ を algebra の morphism とする。その時次の (i) 〜 (v) は同値である。

(i)　$T: A \longrightarrow B$ は almost surjective である。
　i.e., $T(A)$ は B の中で dence である。

(ii)　$Q(T): Q(A) \longrightarrow Q(B)$ は surjective である。

(iii)　$Q^n T: Q^n A \longrightarrow Q^n B$, $n \geqq 1$, は surjective である。

(iv)　$E_0^n T: E_0^n A \longrightarrow E_0^n B$, $n \geqq 1$, は surjective である。

(v)　$\varprojlim Q^n T: \varprojlim Q^n A \longrightarrow \varprojlim Q^n B$ は surjective である。

証明は，(i) ⇒ (ii) ⇒ (iv) ⇒ (iii) ⇒ (i)，(iii) + (iv) ⇒ (v) ⇒ (i) の順序で示すことができるが，$T(A)$ が B の中で dence であるとは，任意の n と任意の $b \in B$ に対して
$T(a_n) - b \in \bar{F}^n B$ となる $a_n \in A$ が存在すると云い換える事ができる。

[命題7*]　$T: A \to B$ を coalgebra の morphism で，A は semi-connected であるとする。その時次の (i) 〜 (v) は同値である。

(i)　$T: A \longrightarrow B$ は injective である。

ii) $P(T): P(A) \to P(B)$ は injective である。
iii) $P^nT: P^nA \to P^nB$, $n \geq 1$, は injective である。
iv) ${}_0E^nT: {}_0E^nA \to {}_0E^nB$, $n \geq 1$, は injective である。
v) $\cup P^nT: \cup P^nA \to \cup P^nB$ は injective である。

証明は i) ⇒ ii) ⇒ iv) ⇒ iii) ⇒ v) ⇒ i) の順で示されるが、A が semi-connected であることは v) ⇒ i) の証明に必要である。

§2. λ-modified differential Hopf algebra.

differential G_2-module M とは、differential $d: M \to M$, i.e., $d^2 = 0$ なる odd type の map, をもった G_2-module の事である。

A と B を differential algebra (又は coalgebra) とする。

$$\varphi_\lambda = (\varphi_A \otimes \varphi_B)(1 \otimes T_\lambda \otimes 1) ; A \otimes B \otimes A \otimes B \to A \otimes B$$

(又は $\psi_\lambda = (1 \otimes T_\lambda \otimes 1)(\psi_A \otimes \psi_B) ; A \otimes B \to A \otimes B \otimes A \otimes B$)

$$\eta_{A \otimes B} = \eta_A \otimes \eta_B , \qquad \varepsilon_{A \otimes B} = \varepsilon_A \otimes \varepsilon_B$$

$$d_{A \otimes B} = d_A \otimes 1 + \sigma_A \otimes d_B ,$$

ここに $\lambda \in K$ で $T_\lambda = (1 + \lambda d\sigma \otimes d)T$ である、とおくと、$A \otimes B$ は differential algebra (又は coalgebra) となる。これを A と B の λ-modified tensor product とよび, $(A\otimes B)_\lambda$ で示す。

A と B と C を共に differential algebra (又は coalgebra) とすると, 明らかに

$$((A\otimes B)_\lambda\otimes C)_\lambda = (A\otimes(B\otimes C)_\lambda)_\lambda$$

となるので, これを $(A\otimes B\otimes C)_\lambda$ と示してよい。

[定義] differential algebra (又は coalgebra) A が λ-commutative であるとは,

$$\varphi\cdot T_\lambda = \varphi$$

$$(\text{又は}\quad T_\lambda\cdot\psi = \psi\ )$$

の関係を充たす時に云う。

A と B が λ-commutative であれば, $(A\otimes B)_\lambda$ も又 λ-commutative である。

[定義] A が体 K の上の λ-modified differential Hopf algebra (但し $\lambda\in K$) とは, differential pre Hopf algebra A が

$$(*)\qquad \psi\cdot\varphi = (\varphi\otimes\varphi)(1\otimes T_\lambda\otimes 1)(\psi\otimes\psi)$$

の条件を充たす時に云う。

我々はこれを単に (λ, d)-Hopf algebra と略す。この時, differential Hopf algebra は $(0, d)$-Hopf algebra であり, Hopf algebra は任意の $\lambda\in K$ に対して $(\lambda, 0)$-Hopf algebra になることに注意する。

A と B が (λ, d)-Hopf algebra ならば、$(A\otimes B)_\lambda$ も又 (λ, d)-Hopf algebra になる。

上の条件 $(*)$ は

$$\varphi_k^{w_k} : (A^{\otimes k+1})_\lambda \longrightarrow A \qquad w_k \in \overline{W}_k,\ k \geqq 1$$

(又は $\psi_k^{w_k} : A \longrightarrow (A^{\otimes k+1})_\lambda \quad w_k \in \overline{W}_k \quad k \geqq 1$)

が coalgebra (又は algebra) の morphism になる事を示している。

ここで (λ, d)-Hopf algebra の例を挙げよう。

p を素数とする。X を finite CW-complex で homotopy unit をもつ H-space とすれば、Araki-Toda [2] の結果によって、丁度 p 個の異なった admissible multiplication (isomorphism)

$$\mu_p^* : K^*(X : Z_p) \otimes K^*(X : Z_p) \longrightarrow K^*(X\times X : Z_p)$$

をもち、任意の μ_p^* に対して

$$T^* \mu_p^* T = \mu_p^* + \lambda(\mu_p^*)\cdot \mu_p^*(\delta_p \otimes \delta_p)$$

をみたす $\lambda(\mu_p^*) \in Z_p$ が存在する。これは任意の multiplication μ_p^* が $(\lambda(\mu_p^*), \delta_p)$-Hopf algebra を与える事を示している。(詳細は [1] を見よ)。

$p \neq 2$ ならば、対応 $\mu_p^* \longrightarrow \lambda(\mu_p^*)$ は bijective であるので、任意の元 $\lambda \in Z_p$ $(p \neq 2)$ に対して (λ, d)-Hopf algebra が存在する事がわかる。

又一方，$p=2$ の時，commutative admissible μ_2^* は存在しない（i.e., 本質的には unique）ので，
$\lambda \neq 0 \in \mathbb{Z}_2$ に対して (λ, d)-Hopf algebra を得る．
Araki [1] はこれを differential near Hopf algebra とよんだ。

§3. 主定理の証明

［定義］ (λ, d)-Hopf algebra A が coprimitive, primitive, biprimitive であるとは：
canonical morphism：$P(A) \to \bar{A} \to Q(A)$
が injective, surjective, bijective である時に云う．

主定理の必要条件を (λ, d)-Hopf algebra に拡張した形で証明を与えよう．

［定理1］ A を標数 p の体 K の上の semi-connected (λ, d)-Hopf algebra とする．

(1) A が coprimitive であるならば，其の multiplication φ が associative でかつ λ-commutative で
$$\xi_{p,\lambda} : \ker \Sigma_{p,\lambda} \to (A^{\otimes p})_\lambda \xrightarrow{\varphi_{p-1}} A \xrightarrow{p} \bar{A}$$
は 0-map である．

(2) A が primitive であるならば，其の comultiplication ψ が associative でかつ λ-commutative で

$$\bar{\varphi}_{p,\lambda} : \bar{A} \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\psi_{p-1}} (A\otimes P)_\lambda \longrightarrow \mathrm{Coker}\,\Sigma_{p,\lambda}$$

は 0-map である。

ここに、$c_{p,\lambda} : (A\otimes P)_\lambda \longrightarrow (A\otimes P)_\lambda$ を λ-modified cyclic permutation とすると、

$$\Sigma_{p,\lambda} = 1 + c_{p,\lambda} + \cdots + c_{p,\lambda}^{p-1} \quad \text{である.}$$

【注意】 $T_i = 1\otimes\cdots\otimes 1\otimes T\otimes 1\otimes\cdots\otimes 1$,

$T_{i,\lambda} = 1\otimes\cdots\otimes 1\otimes T_\lambda\otimes 1\otimes\cdots\otimes 1$

をそれぞれ i-番目に T, T_λ を含む map とすると.

$$c_p = T_{p-1}\cdot \cdots \cdot T_1$$

$$c_{p,\lambda} = T_{p-1,\lambda}\cdot \cdots \cdot T_{1,\lambda}.$$

と表わされる。

(証明) i) $\varphi_a = \varphi(\varphi\otimes 1 - 1\otimes\varphi)$, $\varphi_c = \varphi(1-T_\lambda)$

が 0-map である事を示す。 $\varphi(\varphi\otimes 1)$ と $\varphi(1\otimes\varphi)$

は coalgebra の morphism であるので

$$\psi_A \cdot \varphi_a = \{\varphi_a\otimes\varphi(\varphi\otimes 1) + \varphi(1\otimes\varphi)\otimes\varphi_a\}\,\psi_{(A^{\otimes 3})_\lambda}$$

の関係式が成り立つ。これより

canonical epimorphism $\pi : A \longrightarrow \mathrm{Coker}\,\varphi_a$

は coalgebra の morphism である。

ii):
$$\begin{tikzcd}
P(A) \arrow[r] \arrow[d, "P(\pi)"] & \bar{A} \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & Q(A) \\
P(\mathrm{Coker}\,\varphi_a) \arrow[r] & \overline{\mathrm{Coker}\,\varphi_a} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$\operatorname{Im}\varphi_a \subset \overline{\Gamma}^2 A$ より上の commutative diagram は well defined であるので, ν が injective であるという仮定より $P(\pi)$ は injective である. ここで [命題 1*] を用いると π は injective すなわち bijective なる事を知る。これは φ_a が 0-map である事を示している。
φ_c が 0-map である事も同様に示される.
次に $\overline{\xi}_{p,\lambda}$ が 0-map になる事を示そう.
$\Delta_{p,\lambda} = 1 - C_{p,\lambda}$ とおくと, $\Sigma_{p,\lambda}\cdot\Delta_{p,\lambda} = \Delta_{p,\lambda}\cdot\overline{\Sigma}_{p,\lambda} = 0$ であって, multiplication φ が associative でかつ λ-commutative である事を用いると $\varphi_{p-1}\cdot\Delta_{p,\lambda} = 0$ となるので次の commutative diagram をもつ.

$$
\begin{tikzcd}
\overline{\xi}_{p,\lambda} : \operatorname{Ker}\overline{\Sigma}_{p,\lambda} \arrow[r] \arrow[d] & (A^{\otimes p})_\lambda \arrow[r, "\varphi_{p-1}"] \arrow[d] & A \\
\overline{\xi}'_{p,\lambda} : \operatorname{Ker}\overline{\Sigma}_{p,\lambda}/\operatorname{Im}\Delta_{p,\lambda} \arrow[r] & (A^{\otimes p})_\lambda/\operatorname{Im}\Delta_{p,\lambda} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

$(A^{\otimes p})_\lambda/\operatorname{Im}\Delta_{p,\lambda}$, $\operatorname{Ker}\overline{\Sigma}_{p,\lambda}/\operatorname{Im}\Delta_{p,\lambda}$ は coalgebra であるので, $\overline{\xi}'_{p,\lambda}$ は coalgebra の morphism になる。これより $\operatorname{Im}\overline{\xi}_{p,\lambda} = \operatorname{Im}\overline{\xi}'_{p,\lambda}$ は A の subcoalgebra であるから $\operatorname{Coker}\overline{\xi}_{p,\lambda}$ は A の quotient coalgebra になる. すなわち

canonical epimorphism $A \longrightarrow \operatorname{Coker}\overline{\xi}_{p,\lambda}$

は coalgebra の morphism となり上と同様の証明が

$\overline{\xi}_{p,\lambda}$ は 0-map である事を導く.

(2) まず $\Psi_a = (\Psi\otimes 1 - 1\otimes\Psi)$ が 0-map である事を示そう. (1) と同様にして

canonical monomorphism $j : \ker\Psi_a \to A$ は algebra の morphism であるので, $\Psi_a(P(A))=0$ なる事を用いると, commutative diagram

$$\begin{tikzcd} \nu : P(A) \arrow[r] \arrow[dr] & \bar{A} \arrow[r] & Q(A) \\ & \overline{\ker\Psi_a} \arrow[u, "j"] \arrow[r] & Q(\ker\Psi_a) \arrow[u, "Q(j)"] \end{tikzcd}$$

を得る. 仮定より ν は surjective であるので $Q(j)$ も又 surjective である. [命題1] を用いると j は almost surjective すなわち $\ker\Psi_a$ は A の中で dence である. 1次の F-filtration を保つ morphism は continuous map であるので, Ψ_a は continuous map である. 今 A は Hausdorff space であるので $\ker\Psi_a$ は closed set となり $\ker\Psi_a = A$ すなわち Ψ_a は 0-map である。

$\Psi_c = (1-T_\lambda)\Psi$ に関しても同様にして 0-map である事が示される.

最後に $\overline{\xi}_{p,\lambda}$ が 0-map である事は (1) と同様にして次の commutative diagram を考える事によって示す

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\psi_{p-1}"] \arrow[dr] & (A^{\otimes p})_\lambda \arrow[r] & (A^{\otimes p})_\lambda / \mathrm{Im}\,\Sigma_{p,\lambda} =: Y_{p,\lambda} \\
& \mathrm{Ker}\,\Delta_{p,\lambda} \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{Ker}\,\Delta_{p,\lambda} / \mathrm{Im}\,\Sigma_{p,\lambda} =: Y'_{p,\lambda} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

実際, $Y_{p,\lambda}$ は algebra の morphism であり,
$\mathrm{Ker}\,\check{Y}_{p,\lambda} = \mathrm{Ker}\,\check{Y}'_{p,\lambda}$ は A の sub algebra である。
ここに $\check{Y}_{p,\lambda} = \rho \cdot Y_{p,\lambda}$　$\check{Y}'_{p,\lambda} = \rho\, Y'_{p,\lambda}$ である。
今 $Y_{p,\lambda}(P(A)) = 0$ で $Y_{p,\lambda}$ は continuous map であるので 上と同様の議論によって $\mathrm{Ker}\,\check{Y}_{p,\lambda} = A$ すなわち $\mathrm{Ker}\,Y_{p,\lambda} = \bar{A}$ なる事が従う。これより $\check{Y}_{p,\lambda}$ も又 0-map である。　q.e.d.

主定理の十分条件を示すために, 次の命題を与える

[命題2]　A を semi-connected (λ, d)-Hopf algebra とする。その時

(1) $E_0(A)$ が coprimitive (i.e., biprimitive) であるならば, A は coprimitive である。

(2) $E(A)$ が primitive (i.e., biprimitive) であるならば, A は primitive である。

我々はついに我々の goal に到達できる。

(主定理の証明)

必要条件は [定理1] より示されているので 十分条件を示せばよい。

(1) multiplication φ が associative でかつ commutative で $\bar{\xi}_p$ が 0-map であると仮定すると $\bar{\xi}_p$ が 0-map ならば明らかに $x^p=0$ $x\in\bar{A}$ であるので $E_0(A)$ において multiplication $E_0(\varphi)$ が associative でかつ commutative で $\forall x^p=0$ $\forall x\in E_0(A)$ となる。$E_0(A)$ は graded connected Hopf algebra であるので Milnor-Moore の結果を用いると $E_0(A)$ は coprimitive であるが [命題2] (1) は A が coprimitive である事を導くので (1) は示せた。

(2) comultiplication ψ が associative でかつ commutative で $\bar{\zeta}_p$ が 0-map であると仮定すると、$\bar{\zeta}_p$ が 0-map である事は、$\psi_{p-1}(\bar{A})\subset \mathrm{Im}\,\bar{\Sigma}_p$ である事なので ${}_0E(A)$ においてもこれらの性質は保たれる。graded connected Hopf algebra ${}_0E(A)$ は ${}_0E(A)=\bigcup_{i\in I} B_i$ となる。ここに B_i は finite type の graded connected sub Hopf algebra で、上の性質を充たしている。

dual Hopf algebra B_i^* において、multiplication $(\psi_{B_i})^*$ は associative でかつ commutative で $(\bar{\zeta}_{p,B_i})^*=\bar{\xi}_{p,B_i^*}$ は 0-map であるので

(1) より B_i^* は coprimitive である。duality によって B_i は primitive となるから ${}_0E(A) = \cup B_i$ も又 primitive である。これより A が primitive である事は［命題2］(2) より直ちに従う。 q. e. d.

上の証明と［命題2］より次の系を得る。

［系］ A を semi-connected Hopf algebra とする。その時

(1) A が coprimitive である必要かつ十分な条件は $E_0(A)$ が biprimitive である。

(2) A が primitive である必要かつ十分な条件は ${}_0E(A)$ が biprimitive である。

（参考文献）

[1] S. Araki "Hopf structures attached to K-theory: Hodgkin's theorem" Ann. of Math., 85 (1967)

[2] S. Araki and Toda "Multiplicative structures in mod q cohomology theories: I and II" Osaka J. Math., 2 (1965) and 3 (1966)

[3] W. Browder "On differential Hopf algebras" Trans. Amer. Math. Soc., 107 (1963)

[4] J. W. Milnor and J. C. Moore "On the structure of Hopf algebras" Ann. of Math., 81 (1965)