数理解析研究所講究録
第51巻 1968年 11-23

平方根のための有理近似と改良ニュートン法

名大 工学部 二宮市三

§1. 平方根の有理チェビシェフ近似

分子と分母とがそれぞれ高々p次，q次のxの多項式である既約有理関数$R(x)$の中で，閉区間$[a, b]$ $(0<a<b)$で，$\sqrt{x}$に対する相対誤差の最大絶対値$\max\limits_{a\le x\le b}|R(x)/\sqrt{x}-1|$を最小にするものを，$[a, b]$での$\sqrt{x}$の$(p, q)$型の有理チェビシェフ近似 — 以後単にC−近似 — という．

C−近似の中で，特に重要な(p, p)および$(p, p-1)$型のC−近似は，次のようにして解析的に求められる．[1]

ヤコビの楕円関数$dn(u, k)$は2つの基本週期$2K$，$4iK'$をもつ．ただし

$$k^2+k'^2=1,\quad K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}},\quad K'=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\theta}}$$

である．今nを正の整数とすると，$2K/n$，$4iK'$を基本週期とするdn関数は，$dn(u/M, \lambda)$で与えられる．ただし母数λは$L/L'=K/nK'$を満足するものとして定まり，Mは

$M=K/nL=K'/L'$ で与えられる．ここに

$$\lambda^2+\lambda'^2=1,\quad L=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\theta}},\ L'=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\lambda'^2\sin^2\theta}}$$

である．これを n 位の L－変換という。変換理論によれば

$$(1)\left\{\begin{aligned} &dn(u/M,\lambda)=dn(u,k)\prod_{r=1}^{[n/2]}\frac{c_{2r-1}^2+s_{2r-1}^2\,dn^2(u,k)}{c_{2r}^2+s_{2r}^2\,dn^2(u,k)}\\ &\lambda=k^n\prod_{r=1}^{[n/2]}s_{2r-1}^4,\qquad M=\prod_{r=1}^{[n/2]}(s_{2r-1}/s_{2r})^2\end{aligned}\right.$$

$$(\ s_j=sn(jK/n,k),\ c_j=cn(jK/n,k),\ j=1,2,\cdots,n\ )$$

という関係がなり立つ．

さて，$k=\sqrt{(b-a)/b}$ （$k'=\sqrt{a/b}$）と定め，u を補助変数として区間 $[0,K]$ で

$$(2)\left\{\begin{aligned} &x=a/dn^2(u,k)\\ &R(x)/\sqrt{x}=\frac{2}{1+\lambda'}dn(u/M,\lambda)\end{aligned}\right.$$

によって $R(x)$ を定義すると，$R(x)$ は $[a,b]$ での $\sqrt{x}$ の（$[n/2],[(n-1)/2]$）型の C－近似であり，

$$(3)\qquad \mu=(1-\lambda')/(1+\lambda')$$

によってその相対誤差の最大絶対値が与えられる．$R(x)$ の具体的な形は (1) と (2) とから，n の奇偶に応じてそれぞれ

$$(4)\qquad R(x)=\frac{2\sqrt{a}}{1+\lambda'}\prod_{r=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{c_{2r-1}^2x+s_{2r-1}^2a}{c_{2r}^2x+s_{2r}^2a},$$

$$(5)\qquad R(x)=\frac{2}{\sqrt{a}(1+\lambda')}\frac{\prod_{r=1}^{n/2}(c_{2r-1}^2x+s_{2r-1}^2a)}{\prod_{r=1}^{n/2-1}(c_{2r}^2x+s_{2r}^2a)}$$

であることがわかる．今後これらを n 位の C－近似という．

著者は上述の理論によつて与えられる近似式の実例を，
$n=2,3,4,5,6,7$; $a=1/10, 1/4, 1/\sqrt{10}, 1/\sqrt[3]{10}, 1/2$;
$b=1$ の各場合について求め，連分数

$$R(x)=\alpha_1 x+\alpha-\cfrac{\beta}{x+\gamma-\cfrac{\delta}{x+\varepsilon-\cfrac{\zeta}{x+\eta}}}$$

の形に変形して，係数 $\alpha_1, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta$ を計算した。

§2. 平方根の有理ニュートン近似

平方根の近似式の最も重要な意義はニュートン反復法の出発近似を与えることにある。§1 の C－近似は相対誤差について最良近似であるが，ニュートン法の出発近似としても，果して最良であるだろうか。

分子と分母とがそれぞれ高々 p 次，q 次の x の多項式である既約有理関数 $R(x)$ の中で，閉区間 $[a, b]$ $(0<a<b)$ で，$R_1(x)=\frac{1}{2}(R(x)+x/R(x))$ の $\sqrt{x}$ に対する相対誤差の最大絶対値 $\max\limits_{a\leq x\leq b}|R_1(x)/\sqrt{x}-1|$ を最小にするものを，$[a, b]$ での $\sqrt{x}$ の (p, q) 型の有理ニュートン近似 ── 以後単に N－近似 ── という。

上の定義を用いて，我々の疑問は"(p, q) 型の C－近似は (p, q) 型の N－近似であるか？"となる。これに答える準備として，$R(x)$ と $R_1(x)$ の関係をしらべておく。

$d(x)=R(x)/\sqrt{x}$, $d_1(x)=R_1(x)/\sqrt{x}$ とおくと，ただちに

$$d_1(x)=\frac{1}{2}(d(x)+1/d(x))$$

がえられる．関数 $D(y)=\frac{1}{2}(y+1/y)$ は $y>0$ で凸で，

$$D(y)\geqq \min D(y)=D(1)=1,$$

$$D(y)=D(1/y),$$

$$yz\geqslant 1,\ y\geqslant z \text{ または } yz\leqslant 1,\ y\leqslant z \Longleftrightarrow D(y)\geqslant D(z)$$

という性質をもつ。したがって，$d_1(x)\geqslant 1$ であるから，N－近似の定義の中の $\max|d_1(x)-1|$ は $\max d_1(x)$ でおきかえてよい．さらに

$$\max d(x)\cdot\min d(x)\geqslant 1 \Rightarrow \max d_1(x)=D(\max d(x)),$$

$$\max d(x)\cdot\min d(x)\leqslant 1 \Rightarrow \max d_1(x)=D(\min d(x))$$

であることも知れる．

定理 1：分子が $p-p'$ 次，分母が $q-q'$ 次の既約有理関数 $R(x)$ が $[a,b]$ で，$\sqrt{x}$ の (p,q) 型の N－近似であるための必要十分な条件は，$\max d(x)\cdot\min d(x)=1$ であって，さらに $[a,b]$ の少くとも $N=p+q-\min(p',q')+2$ ヶの点で，$d(x)$ が交互に最大値と最小値をとることである。

証明：(i) 必要性：$\max d(x)\cdot\min d(x)=\alpha^2\neq 1$ と仮定する．$R^*(x)=R(x)/\alpha\ (\alpha>0)$ によつて新しい近似式 $R^*(x)$ を作る．$R^*(x)/\sqrt{x}=d^*(x)$，$R_1^*(x)/\sqrt{x}=d_1^*(x)$ とおくと，あきらかに $\max d^*(x)\cdot\min d^*(x)=1$ であるから，

$$\max d_1^*(x) = D(\max d^*(x)) = D(\min d^*(x))$$

である．$\alpha > 1$ と仮定すると，

$$\max d_1(x) = D(\max d(x))$$

であるが，　$\max d(x) \cdot \max d^*(x) > 1$，

$$\max d(x) > \max d^*(x)$$

であるから，$D(\max d(x)) > D(\max d^*(x))$ となる．したがって，$\max d_1(x) > \max d_1^*(x)$ がえられる．$\alpha < 1$ の場合も同様である．このようにして，$R^*(x)$ は $R(x)$ よりも良い近似であるから，$R(x)$ は N−近似ではない。

次に，$\max d(x) \cdot \min d(x) = 1$ であるが，$[a, b]$ で $d(x)$ が交互に最大，最小となる点の数が N より小であると仮定すると，有理近似に関するチェビシェフの一般定理の証明で用いたのと同じ論法で，$R(x)$ よりもよい (p, q) 型の近似を作ることが出来る．[2]

(ii) 十分性：定理の條件を満足する $R(x)$ が N−近似でないと仮定すると，有理近似に関するドラヴァレプサンの定理の証明と同じ論法で矛盾に導くことができる．[2]（終り）

さて C−近似についての必要十分條件は，上定理の條件

$$\max d(x) \cdot \min d(x) = 1$$

を　$\frac{1}{2}(\max d(x) + \min d(x)) = 1$

でおきかえたものであるから，C−近似と N−近似とは一般

にことなる．しかし両者の間には，次の簡単な関係がある．

定理2：(p,q) 型の C－近似と，(p,q)型の N－近似は常数因子だけことなる．

証明：(p,q)型の C－近似 $R(x)$ の相対誤差の最大絶対値を μ とすると，$\max d(x)=1+\mu$，$\min d(x)=1-\mu$ である．$\bar{R}(x)=R(x)/\sqrt{1-\mu^2}$ とすると，あきらかに，$\max\bar{d}(x)\cdot\min\bar{d}(x)=1$ であり，定理1の他の条件は，$R(x)$が(p,q)型の C－近似であることにより，$\bar{R}(x)$ についても成り立つ．よつて，$\bar{R}(x)$ は(p,q)型のN－近似である．（終り）

§1で解析的に求められた n 位の C－近似に定理2の操作を行えばN－近似が解析的に求められる．これを n 位のN－近似という．すなわち，$k=\sqrt{(b-a)/b}$　$(k'=\sqrt{a/b})$ に対して，区間 $[0,K]$ で，補助変数 u を用いて

$$(2')\quad \begin{cases} x=a/dn^2(u,k) \\ R(x)/\sqrt{x}=dn(u/M,\lambda)/\sqrt{\lambda'} \end{cases}$$

とおくと，$R(x)$ は$[a,b]$で，$\sqrt{x}$の$([n/2],[(n-1)/2])$型のN－近似であり，その相対誤差の最大絶対値は

$$(3')\qquad \mu=1/\sqrt{\lambda'}-1$$

で与えられる．$R(x)$ の具体的な形は (1) と $(2')$ とから，n の奇偶に応じてそれぞれ，

$$(4') \qquad R(x)=\sqrt{\frac{a}{\lambda'}}\prod_{r=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{c_{2r-1}^2x+s_{2r-1}^2a}{c_{2r}^2x+s_{2r}^2a},$$

$$(5') \qquad R(x)=\frac{1}{\sqrt{\lambda' a}}\frac{\prod_{r=1}^{n/2}(c_{2r-1}^2x+s_{2r-1}^2a)}{\prod_{r=1}^{n/2-1}(c_{2r}^2x+s_{2r}^2a)}$$

である．これらについては，次の対称性がなり立つ．すなわち $x_1x_2=ab$ $(u_1+u_2=K)$ のとき，

n：奇数 $\qquad d(x_1)d(x_2)=1$

n：偶数 $\qquad d(x_1)=d(x_2)$

C－近似についての同様な対称性は，nが偶数のときにのみなりたつ．

§1の終りにのべたC－近似の実例をN－近似に変えるには，係数α_1, α, βのみを$1/\sqrt{1-\mu^2}$倍すればよい．このようにしてえられるN－近似の実例を末尾の表に示す．(p.13)

§3.　改良ニュートン法

任意の出発有理近似$R_0(x)$にニュートン法を反復ほどこした結果について考えよう．

$$R_m(x)=\frac{1}{2}\left(R_{m-1}(x)+x/R_{m-1}(x)\right),\ (m=1,2,\cdots)$$

$$d_m(x)=R_m(x)/\sqrt{x} \qquad (m=0,1,2,\cdots)$$

とおくと，§2で見たように $d_m(x)\geqq 1$ $(m=1,2,\cdots)$ であり，$R_m(x)$の相対誤差の最大絶対値をμ_mとすると，

$$\mu_m = \max d_m(x) - 1, \qquad (m=1,2,\cdots)$$
$$\mu_{m+1} = \mu_m^2 / 2(1+\mu_m)$$

である。 $\max d_0(x) \geqq 1 \geqq \min d_0(x)$ ならば

$$\min d_m(x) = 1 \qquad (m=1,2,\cdots)$$

となるが，そうでなければ

$$\min d_m(x) > 1 \qquad (m=1,2,\cdots)$$

となる．ともかく，逐次の近似 $R_m(x)$ の値は常に上方に偏していて，§2の見地からすると，次の近似にとつては良好な近似ではない．これを改良するためには，毎回修正を加えて $\max d_m(x) \cdot \min d_m(x) = 1$ となるようにすればよい。すなわち，ニュートン法の代りに，

$$R_m^*(x) = \frac{\sigma_m}{2}\left(R_{m-1}^*(x) + x / R_{m-1}^*(x) \right), \quad (m=1,2,\cdots)$$

と計算する．ただし， $R_0^*(x) = R_0(x)$，

$$\sigma_1 = 1 / \sqrt{\max d_1(x) \cdot \min d_1(x)},$$
$$\sigma_{m+1} = 1 / \sqrt{D(\max d_m^*(x))} \quad (m=1,2,\cdots)$$

である．このとき μ_m^* に関して

$$\mu_{m+1}^* = \sqrt{1 + \mu_m^{*2}/2(1+\mu_m^*)} - 1 \quad (m=1,2,\cdots)$$

がなりたつことがわかる。 $\min d_1(x) = 1+\mu$ （ $\mu \geqq 0$ ）とおくと，

$$\mu_1^* = (1+\mu_1)/\sqrt{(1+\mu_1)(1+\mu)} - 1 = \sqrt{(1+\mu_1)/(1+\mu)} - 1$$
$$\leqq \sqrt{1+\mu_1} - 1 \leqq \mu_1/2$$

である． $\mu_{m+1} \fallingdotseq \mu_m^2/2$， $\mu_{m+1}^* \fallingdotseq \mu_m^{*2}/4$ とあらく考えると，

$\mu_1^* \doteqdot \mu_1/2,\quad \mu_2^* \doteqdot \mu_2/8,\ \cdots,$ 一般に $\mu_m^* \doteqdot \mu_m/2^{2^m-1}$
となることがわかる。特に出発近似として，n位のN－近似をとった場合には，次の定理がえられる。

定理3： $R_0(x)$をn位のN－近似とし，これに改良ニュートン法をm回ほどこした結果を$R_m(x)$とすると，$R_m(x)$は$2^m n$位のN－近似である.

証明： $R_0(x)$は，$k=\sqrt{(b-a)/b}$ に対して，$0 \leq u \leq K$ で $x = a/dn^2(u,k)$, $R_0(x)/\sqrt{x} = dn(u/M_0, \lambda_0)/\sqrt{\lambda_0'}$ で与えられる．ここに，$dn(u/M_0, \lambda_0)$は$dn(u,k)$にn位のL－変換:$(2K, 4iK') \longrightarrow (2K/n, 4iK')$ をほどこしたものである． $\max d_0(x) = 1/\sqrt{\lambda_0'}$ であるから，$D(\max d_0(x)) = \frac{1+\lambda_0'}{2\sqrt{\lambda_0'}}$
となり，
$$R_1(x) = \sqrt{\frac{2\sqrt{\lambda_0'}}{1+\lambda_0'}}\left(R_0(x) + x/R_0(x)\right)/2$$

と表わされる．したがって，
$$d_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{\lambda_0'}(1+\lambda_0')}}\ \frac{\lambda_0' + dn^2(u/M_0, \lambda_0)}{dn(u/M_0, \lambda_0)}$$

となる，ところが，一般に $dn(v,\kappa)$ に2位のL－変換（ランデン変換）をほどこしたものを$dn(v/M, \lambda)$とすると，
$$\lambda = \frac{1-\kappa'}{1+\kappa'},\quad \lambda' = \frac{2\sqrt{\kappa'}}{1+\kappa'},\quad M = \frac{1}{1+\kappa'}$$
$$dn(v/M, \lambda) = \frac{1}{1+\kappa'}\ \frac{\kappa' + dn^2(v,\kappa)}{dn(v,\kappa)}$$

という関係がある。ゆえに，$\lambda_1=\dfrac{1-\lambda_0'}{1+\lambda_0'}$，$\lambda_1'=\dfrac{2\sqrt{\lambda_0}}{1+\lambda_0'}$，$M_1=\dfrac{M_0}{1+\lambda_0'}$

とおくと，$$R_1(x)=\frac{\sqrt{\lambda_1'}}{2}\left(R_0(x)+x/R_0(x)\right),$$
$$d_1(x)=dn(u/M_1,\lambda_1)/\sqrt{\lambda_1'}$$

がえられる。$dn(u/M_1,\lambda_1)$ は $dn(u/M_0,\lambda_0)$ に 2 位の L－変換を行なった結果であるから，$dn(u,k)$ に $2n$ 位の L－変換を行なった結果である。よって，(2′)により，$R_1(x)$ は $2n$ 位の N－近似である。一般に，$R_m(x)$ が $2^m n$ 位の N－近似であると仮定して，

$$d_m(x)=dn(u/M_m,\lambda_m)/\sqrt{\lambda_m'}$$

とすると，$\lambda_{m+1}=\dfrac{1-\lambda_m'}{1+\lambda_m'}$，$\lambda_{m+1}'=\dfrac{2\sqrt{\lambda_m'}}{1+\lambda_m'}$，$M_{m+1}=\dfrac{M_m}{1+\lambda_m'}$

によって，

(6) $$\begin{cases} R_{m+1}(x)=\dfrac{\sqrt{\lambda_{m+1}'}}{2}\left(R_m(x)+x/R_m(x)\right), \\ d_{m+1}(x)=dn(u/M_{m+1},\lambda_{m+1})/\sqrt{\lambda_{m+1}'} \end{cases}$$

と表わされることが同様に示される。$dn(u/M_{m+1},\lambda_{m+1})$ は $dn(u/M_m,\lambda_m)$ に 2 位の L－変換を行なった結果であるから，$dn(u,k)$ に $2^{m+1}n$ 位の L－変換を行った結果にひとしい．ゆえに，$R_{m+1}(x)$ は $2^{m+1}n$ 位の N－近似である．(終り)

上の定理で，$R_m(x)$ の代りに

(7) $$\bar{R}_m(x)=\frac{\lambda_m'}{1+\lambda_m'}\left(R_{m-1}(x)+x/R_{m-1}(x)\right)=\frac{2\sqrt{\lambda_m'}}{1+\lambda_m'}R_m(x)$$

をとると，$\bar{d}_m(x)=\dfrac{2}{1+\lambda_m'}dn(u/M_m,\lambda_m)$ となり，(2) によって，$\bar{R}_m(x)$ は $2^m n$ 位の C－近似となる．以上をまとめて，$\sqrt{x}$ の非常に合理的な計算法を与える，次の定理をうる。

定理4：n位のN−近似$R_0(x)$に改良ニュートン法(6)を反復して，$R_j(x)$ $(j=1,2,\cdots,m-1)$を求め，最後に(7)によって$\bar{R}_m(x)$を求めると，$\bar{R}_m(x)$は$2^m n$位のC−近似である。

§4. 実際的考察

改良ニュートン法は，従来のニュートン法に比べて収束が更に速くなっており，1回の適用に要する演算も加，乗，除算各1回で，従来のものとかわりがない。ただ係数$\sqrt{\lambda_m}/2$（一般には$\sigma_m/2$）をあらかじめ計算しておかねばならないことと，2進法の場合にこの係数をかけるための乗算が，1/2をかける場合に比べておそくなることが難点である。

つぎに，出発近似としてとるN−近似の位数のえらび方についてしらべよう。n位のN−近似を計算するのに要する演算の種類と回数を下表に示す。（A：加減算，M：乗算，D：除算）

	A	M	D
n：奇数	$n-1$	0	$(n-1)/2$
n：偶数	$n-1$	1	$n/2-1$

さて，n位のN−近似に改良ニュートン法を1回ほどこした結果は，$2n$位のN−近似と同一であり，$2n-1$位のN−

近似よりは精密であるから，この三者に要する計算量をいろいろな場合について比べよう。その結果は次表の通り。

	A	M	D
1	0	0	0
2	1	1	0
1×2	1	1	1
5	4	0	2
6	5	1	2
3×2	3	1	2
9	8	0	4
10	9	1	4
5×2	5	1	3

	A	M	D
3	2	0	1
4	3	1	1
2×2	2	2	1
7	6	0	3
8	7	1	3
4×2	4	2	2

（例えば，3×2は3位のN−近似に改良ニュートン法をほどこすことを示す）

上の比較から，$n=1$（定数近似）と$n \geqq 6$ のN−近似は実用価値がなく，$n=2, 3, 4, 5$ のみが合理的なものとしてのこる。これらの中では $n=4$ の優秀性が特に目立つ。

参考文献

[1] 二宮市三：平方根の有理関数近似，情報処理，Vol. 8, No. 1, 1967, pp 23−30.

[2] Achieser, N. I., Theory of Approximation, Frederick Ungar Pub. Co., New York, 1956.

$\sqrt{x}$ の有理ニュートン近似式

$(a \leqq x \leqq 1)$

$$n=2, \quad \sqrt{x} \fallingdotseq \alpha_1 x + \alpha$$

$1/a$	μ	α_1	α
2	7.50(-3)	0.59018	0.41732
$\sqrt[3]{10}$	9.19(-3)	0.60025	0.40894
$\sqrt{10}$	2.06(-2)	0.6533	0.3674
4	2.99(-2)	0.6066	0.3433
10	8.18(-2)	0.8219	0.2599

$$n=3, \quad \sqrt{x} \fallingdotseq \alpha - \frac{\beta}{x+\gamma}$$

$1/a$	μ	α	β	γ
2	3.23(-4)	2.541639	4.837528	2.137255
$\sqrt[3]{10}$	4.38(-4)	2.499023	4.592403	2.062704
$\sqrt{10}$	1.46(-3)	2.29636	3.53269	1.72202
4	2.53(-3)	2.16518	3.02290	1.54516
10	1.11(-2)	1.8278	1.7009	1.0278

$$n=4, \quad \sqrt{x} = \alpha_1 x + \alpha - \frac{\beta}{x+\gamma}$$

$1/a$	μ	α_1	α	β	γ
2	1.39(-5)	0.29508515	1.05584616	0.59905340	0.70710678
$\sqrt[3]{10}$	2.09(-5)	0.30011728	1.03744034	0.56749778	0.68129207
$\sqrt{10}$	1.04(-4)	0.3266042	0.9489559	0.4303558	0.5623413
4	2.17(-4)	0.3432201	0.8996699	0.3640399	0.5000000
10	1.54(-3)	0.410316	0.737161	0.192079	0.316228

$$n=5, \quad \sqrt{x} \fallingdotseq \alpha - \cfrac{\beta}{x+\gamma-\cfrac{\delta}{x+\varepsilon}}$$

$1/a$	μ	α	β	γ	δ	ε
2	6.03(-7)	4.23606542	24.2786564	6.72879059	0.321788263	0.422151321
$\sqrt[3]{10}$	1.00(-6)	4.16503840	23.0680171	6.50106632	0.299093731	0.406282110
$\sqrt{10}$	7.40(-6)	3.82726281	17.8475812	5.46681443	0.205465476	0.332809691
4	1.86(-5)	3.6419776	15.343652	4.9339381	0.16349800	0.29411222
10	2.16(-4)	3.046432	[illegible].865875	3.389256	0.06766963	0.1798065