数理解析研究所講究録
第 51 巻 1968 年 55-61

半線形楕円型方程式に対する境界値問題と逐次近似法

早大　理工　　草　野　尚

§1　序

応用上重要な半線型楕円型方程式

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} = f(x, u)$$

を考える。この方程式はしばしば mildly nonlinear と呼ばれ，非線型楕円型方程式の中では最も単純な部類に属するが，その取り扱いは必らずしも容易ではない。

〈例〉　$\Delta u = u^2$,　　$u = \varphi(x)$, $x \in \partial\Omega$

(i)　$\varphi(x) \equiv 0$ のとき nontrivial な解をもつ。

(ii)　$K_1 = \max_{\Omega} \int K_0(x,y)\,dy$　（$K_0(x,y)$ は Ω に対する Laplace operator の Green 函数），$B = \max_{\partial\Omega} |\varphi(x)|$ とおく。$4BK_1 < 1$ ならば，$|u_0(x)| \leq \dfrac{1-\sqrt{1-4BK_1}}{2K_1}$ をみたす解 $u_0(x)$ をもつ。この不等式をみたす解は $u_0(x)$ だけ。$u_0(x)$ と異なる解もある。

(iii)　$\varphi(x) \geq 0$ のとき，non-negative な解がある。non-negative な解は唯一つだが，それと異なる解もある。

(iv)　$\varphi(x) = +\infty$ のときにも解がある。

(v) Ω を半径 R の球とする。ある定数 $C^* \fallingdotseq -1.40$ があって，境界条件が $\varphi(x) \equiv C$ のとき，$C \geqq C^*/R^2$ ならば解が存在し，$C < C^*/R^2$ ならば解は存在しない。Ω が半径 R の球に含まれるとき，$C^*/R^2 \leqq \varphi(x) \leqq 0$ ならば解があり，Ω が半径 R の球を含むとき，$\varphi(x) < C^*/R^2$ ならば解はない。

(vi) $u(x) \equiv 0$ 以外に全空間で定義された解（entire solution）は存在しない。

（参考文献：[1], [10], [19], [20], [23], [24]）

話題を基本的な問題〈境界値問題の可解性〉に限る。種種の方法が案出されている

関数解析的方法　[13], [14], [17], [24]

変分的方法　[18], [25]

放物型方程式からのアプローチ　[11], [12]

逐次近似法　[1], [2], [4], [5], [8], [9], [15], [16], [23]

差分法　[3], [7], [21], [22]　その他　[6]

が，ここでは逐次近似法をとり上げ，その代表的な Picard iteration scheme 及び quasilinearization technique の2つについて述べる。

§2 Dirichlet 問題

簡単のために Dirichlet 問題だけを論じる。

Ω は n 次元 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 空間の有界領域，$\partial\Omega$ はその境界とする。次の境界値問題を考える。

$$(A)\begin{cases} Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = f(x,u), & x\in\Omega \\ u=\varphi(x), \quad x\in\partial\Omega \end{cases}$$

仮定：(1) $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqq a_0 \sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 \qquad (a_0=\mathrm{const}>0)$

(2) $a_{ij}\in C^{1+\alpha}(\bar{\Omega}), \quad b_i \in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$

(3) $\Omega \in A^{2+\alpha}, \quad \varphi\in C^{2+\alpha}(\partial\Omega)$

(4) $|f(x,u)-f(x',u)| \leqq K_1(c)|x-x'|^{\beta} \qquad (|u|\leqq c)$

$|f(x,u)-f(x,u')| \leqq K_2(c)|u-u'| \qquad (|u|,|u'|\leqq c)$

〈定理〉上記の仮定がなりたつとする。さらに

$\underline{\omega}(x) \leqq \overline{\omega}(x), \ x\in\Omega, \qquad \underline{\omega}(x)\leqq\varphi(x)\leqq\overline{\omega}(x), \ x\in\partial\Omega$

$L\overline{\omega}-f(x,\overline{\omega}) \leqq 0 \leqq L\underline{\omega}-f(x,\underline{\omega}), \ x\in\Omega$

を満たす函数 $\underline{\omega}(x), \overline{\omega}(x)\in C^2(\bar{\Omega})$ が存在すると仮定する。そのとき問題 (A) は $\underline{\omega}(x)\leqq u(x)\leqq\overline{\omega}(x)$ なる解 $u\in C^{2+\gamma}(\Omega)$ を持つ。

(証明) $c_1 = \max\left\{ \max_{\bar{\Omega}} |\overline{\omega}(x)|, \max_{\bar{\Omega}} |\underline{\omega}(x)| \right\}, \quad k=K_2(c_1)$ とおく。

$$Lu_{n+1}-ku_{n+1} = f(x,u_n)-ku_n, \quad x\in\Omega$$
$$Lv_{n+1}-kv_{n+1} = f(x,v_n)-kv_n, \quad x\in\Omega$$
$$u_{n+1}=v_{n+1}=\varphi(x), \quad x\in\partial\Omega, \ (u_0\equiv\overline{\omega}, \ v_0\equiv\underline{\omega})$$

によって函数列 $\{u_n(x)\}$, $\{v_n(x)\}$ を定める。周知の Schauder の理論によって、これらの函数列は夫々一意的に決まる。また、最大値原理を用いて $\{u_n(x)\}$ は単調減少列、$\{v_n(x)\}$ は単調増加列であること、両者とも一様有界であることが示される。最後に、de Giorgi－Nash 式の Hölder ノルム評価と Schauder 式の評価を組み合わせることによって、$u(x)=\lim_{n\to\infty} u_n(x)$, $v(x)=\lim_{n\to\infty} v_n(x)$ が問題(A)の解であることが証明される。（終）

（参考文献：[5], [15], [16], [21], [22]）

注意1. $\partial\Omega$, φ の滑かさの制限はもっと緩和できる。

注意2. 定理に存在を仮定した上級函数 $\overline{\omega}$, 下級函数 $\underline{\omega}$ の具体例の一つ。$f(x,u)$ が有界 $|f(x,u)| \leqq N$, $x\in\overline{\Omega}$, $|u|<\infty$ の場合、$\overline{\omega}$ として $Lu=-N$, $x\in\Omega$, $u=\varphi$, $x\in\partial\Omega$ の解、$\underline{\omega}$ として $Lu=N$, $x\in\Omega$, $u=\varphi$, $x\in\partial\Omega$ をとることができる。

注意3. $f(x,u)$ が有界でなくても、有界な場合に帰着できることがある。例えば $\lim_{|u|\to\infty} \frac{f(x,u)}{u} \geqq 0$ （$f=e^u$ など）ならば、有界な場合に帰着できる。(cf. [18], [21], [22])

§3 非線型固有値問題

次の問題を考えよう。

$$
(B) \begin{cases} Lu \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + c(x)u = \lambda f(x,u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}
$$

問題は，$f(x,u)$ に関する適当な条件の下で，(B) が正の解 $u(x) > 0,\ x \in \Omega$ をもつような $\lambda > 0$ の値を求めることである。$a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ は連続微分可能，$c(x) \geq 0$，かつ $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq a_0 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$ $(a_0 = \mathrm{const} > 0)$ とする。

$f(x,u)$ に関する仮定は次の通り。

(1) $f(x,u)$ は $x \in \Omega,\ u \geq 0$ で連続.

(2) $f(x,0) \equiv f_0(x) > 0,\quad x \in \Omega$.

(3) $f_u(x,u) > 0$ かつ $x \in \Omega,\ u > 0$ で連続.

(4) $f(x,u)$ は $x \in \Omega,\ u > 0$ で，u に関して strictly convex かつ 2回微分可能.

〈定理〉 上記の仮定が満たされているとする。境界値問題

$$
Lv - \mu f_u(x,0)v = 0,\quad x \in \Omega;\qquad v = 0,\quad x \in \partial\Omega
$$

の最小の固有値を $\mu_1\{f_u(x,0)\}$ で表わす。そのとき，問題 (B) は $0 < \lambda < \mu_1\{f_u(x,0)\}$ なるすべての λ に対して一意的な解 $u(x;\lambda)$ をもつ.

(証明) Bellman-Kalaba の quasilinearization による.
$\lambda > 0$ に対して函数列 $\{v_n(x;\lambda)\}$ を次の様式で定める：

$$L v_1 = \lambda [f(x,0) + f_u(x,0) v_1], \quad x \in \Omega \quad ; \quad v_1 = 0, \quad x \in \partial\Omega$$

$$L v_{n+1} = \lambda [f(x, v_n) + f_u(x, v_n)(v_{n+1} - v_n)], \quad x \in \Omega, \quad v_{n+1} = 0, \; x \in \partial\Omega$$

$$n = 1, 2, 3, \cdots$$

$0 < \lambda < \mu_1\{f_u(x,0)\}$ ならば

$v_n(x;\lambda)$ はすべて正で，単調減少列であることが証明される。この事実を考慮すれば，Ω に関する L の Green 函数 $K(x,y)$ を用いた式

$$v_{n+1}(x;\lambda) = \lambda \int_\Omega K(x,y) [f(y, v_n(y;\lambda)) + f_u(y, v_n(y;\lambda))(v_{n+1}(y;\lambda) - v_n(y;\lambda))] dy$$

$$n = 1, 2, 3, \cdots$$

において積分記号下の極限移行 $n \to \infty$ が許され，極限函数 $u(x;\lambda) = \lim_{n\to\infty} v_n(x;\lambda)$ が

$$u(x;\lambda) = \lambda \int_\Omega K(x,y) f(y, u(y;\lambda)) dy$$

を満たすことが示される。よって $u(x;\lambda)$ は (B) の解である。一意性は別途に証明される。（終）

（参考文献：[4]，[9]，[2]，[8]）

注意1. Picard 式の逐次近似

$$L u_{n+1} = \lambda f(x, u_n), \quad x \in \Omega \; ; \quad u_{n+1} = 0, \quad x \in \partial\Omega \quad (u_0(x) \equiv 0)$$

$$n = 0, 1, 2, \cdots$$

を用いてもよい。この場合 $\{u_n(x;\lambda)\}$ は単調増加列になる。

注意2. $\{v_n(x;\lambda)\}$ の収束の方が $\{u_n(x;\lambda)\}$ の収束より速い。

$$\max_x | v_{n+1} - v_n | \leqq k_1 \max_x | v_n - v_{n-1} |^2 \qquad (\text{quadratically})$$

$$| u_{n+1} - u_n | \leqq k_2 | u_n - u_{n-1} | \qquad (\text{geometrically})$$

参 考 文 献

1. C. M. Ablow and C. L. Perry, J. Soc. Indust. Appl. Math. 7(1959), 459 - 467.
2. R. E. Bellman and R. E. Kalaba, Quasilinearization and Nonlinear Boundary Value Problems, American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1965.
3. L. Bers, J. Res. Nat. Bur. Stand. 51(1953), 229 - 236.
4. D. S. Cohen, J. Math. Mech. 17(1967), 209 - 215.
5. R. Courant, Partial Differential Equations (Courant-Hilbert Vol.II), Wiley(Interscience), New York, 1962.
6. R. Gouyon, Compt. Rend. 251(1960), 26 - 28.
7. D. Greenspan and S. V. Parter, Numer. Math. 7(1965), 129 - 146.
8. R. Kalaba, J. Math. Mech. 8(1959), 519 - 574.
9. H. B. Keller and D. S. Cohen, J. Math. Mech. 16(1967), 1361 - 1376.
10. J. B. Keller, Comm. Pure Appl. Math. 10(1957), 503 - 510.
11. S. I. Khudiaev, Dokl. Akad. Nauk SSSR 148(1963), 44 - 46.
12. S. I. Khudiaev, Dokl. Akad. Nauk SSSR 154(1964), 787 - 790.
13. M. A. Krasnosel'ski, Positive Solutions of Operator Equations, P. Noordhoff, Groningen, 1964.
14. M. A. Krasnosel'ski and V. Ya. Stecenko, Sibirski Mat. 4(1963), 120 - 137.
15. T. Kusano, Funkc. Ekvac. 7(1965), 1 - 13.
16. T. Kusano, Japan. J. Math. 35(1965), 31 - 59.
17. O. A. Ladyzhenskaia and N. N. Ural'tseva, Linear and Quasilinear Equations of Elliptic Type, Moscow, 1964.
18. N. Levinson, J. Math. Mech. 12(1963), 567 - 575.
19. Z. Nehari, Proc. Amer. Math. Soc. (1963), 829 - 836.
20. R. Osserman, Pacific J. Math. 7(1957), 1641 - 1647.
21. S. V. Parter, Numer. Math. 7(1965), 113 - 128.
22. S. V. Parter, Numerical Solutions of Nonlinear Differential Equations (ed. D. Greenspan), 213 - 238, Wiley, New York, 1966.
23. S. I. Pokhozhaev, Dokl. Akad. Nauk SSSR 134(1960), 769 - 772.
24. S. I. Pokhozhaev, Dokl. Akad. Nauk SSSR 138(1961), 305 - 308.
25. G. Stampacchia, Comm. Pure Appl. Math. 16(1963), 383 - 421.