

## 工学における偏微分方程式の 応用例 [シミュレーション実験の例]

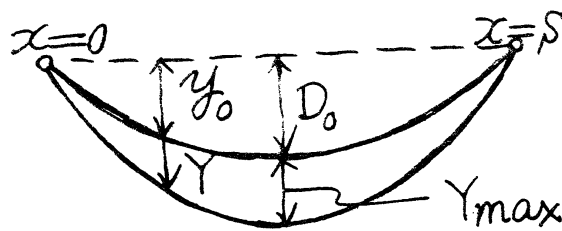
慶大工学部 鬼頭史城

1. 緒言. シミュレーションと模型実験と、  
どちらがよいか? そこに議論の余地はあると思われる。こ  
こでは、私が十数年以前から手がけてきたところの、氷雪  
跳躍 (sleet jump) の問題について、その理論と、  
実験との概要を述べたいと思う。研究は現に継  
続中である。

2. 氷雪跳躍 (sleet jump) の問題.  
送電線の電線にスリート (氷雪) が附着すると、そ  
の重量によって電線は弛度 (sag) を増す。急に  
sleet が脱落すると、電線は、ハネ上げられる。この  
「はねあがり」の高さを求める問題である。私共  
は、実物や模型の送電線を使って、大規模な実  
験を行なってきたが、現在なお引続いて (電

カ技術研究所などで) 実験研究が行なわれている。一方において、理論的研究を行なった。

ここで、電線とは、曲げに抵抗しないところの、弾性のある「ひも」の一種とみなす。その実長は、張力  $T$  の値により、弾性的伸びのために変わるものとする。ここで、第1図 に示すとき、耐張型の場合だけを示す。



第1図

3. 記号.  $w =$  電線の自重 ( $\text{kg}/\text{m}$ ),  
 $T =$  電線の張力 ( $\text{kg}$ ),  $T_0 =$  弛度  $D_0$  のときの張力 ( $\text{kg}$ ), 電線の断面積 ( $\text{cm}^2$ ),  $E =$  ヤング率 ( $\text{kg}/\text{cm}^2$ ),  $L =$  1 方向の電線の長さ,  $t =$  時刻 ( $\text{sec}$ ),  $S =$  方向長 ( $\text{m}$ ),  $g = 9.80$  ( $\text{m}/\text{sec}^2$ ),  
 $y =$  或る瞬間、或る場所における電線の縦坐標 ( $\text{m}$ ),  $y_0 =$  静止のときの  $y$  の値,  $D_0 =$  静止のときの弛度の値 ( $\text{m}$ ),  $Y =$  静止位置から測った  $y$  の変化部分 [ $y = y_0 + Y$ ],  
 なお、便宜上、下記の諸係数を用いる。

$$\xi = \frac{1}{2} k S, \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \xi, \quad Y_{\max}/D_0 = \delta,$$

$$\delta = (H/D_0)(1 - \cos \xi),$$

$$Y = H[\sin(kx + \alpha) - \sin \alpha],$$

$$k_1 = \frac{1}{2} \left[ 1 + 2 \cos^2 \xi - \frac{3}{5} \sin \xi \cos \xi \right],$$

$$k_4 = \sqrt{g(8k_1 D_0)}, \quad \tau = k_4 t,$$

$$\omega = 2\xi \sqrt{g/(8D_0)}, \quad C = \frac{W^2 A E}{T_0^3 S}, \quad C_k = \frac{W^2 A E}{T_0^3 S} S^2$$

初期条件  $t < 0$  においてスリット附着し、静止している。そして  $D_0 + Y_{\max 0}$  だけ重んでいる。

$t = 0$  において、急にスリット脱落せるものと、 $0 < t$  における電線の運動を求める。

#### 4. 電線の振動の基礎方程式 張力 $T$ で

張られ、自重が  $w$  であるところの、電線の運動の方程式は ( $y$  は下向きを正とする)

$$-\frac{w}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial y}{\partial x} \right) = -w$$

である。厳密的に、 $T$  は時刻  $t$  のみの関数とする。

静止のときには

$$y_0 = \frac{4}{5^2} D_0 x (s - x)$$

ここで、 $y = y_0 + Y$  とおくと、

$$\left. \begin{aligned} -\frac{w}{g} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + T \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} &= \frac{T-T_0}{T_0} w \\ T &= T_0 + \frac{AE}{2S} \int_0^S \left[ \left( \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial y_0}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial y_0}{\partial x} \right)^2 \right] dx \end{aligned} \right\} \text{----- (1)}$$

方程式(1)は、 $Y$ について非線形偏微分方程式であり、微分積分方程式の形をしている。

5. 基礎方程式の線形化.  $|Y|$ は $|y_0|$ に比して小さいときには、方程式(1)は近似的に

$$\left. \begin{aligned} -\frac{w}{g} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + T_0 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - \frac{8AED_0 w}{T_0 S^3} \int_0^S Y dx &= 0 \\ T &= T_0 - \frac{8AED_0}{S^3} \int_0^S Y dx \end{aligned} \right\} \text{---- (2)}$$

となる。これは線形の微分積分方程式であるが、下記のような簡単な解をもっている。

$$Y = H_0 [\sin(kx + \alpha) + a] \cos kt, \text{--- (3)}$$

$\frac{1}{2} kS = \xi$  とおくと、 $\xi$ は方程式

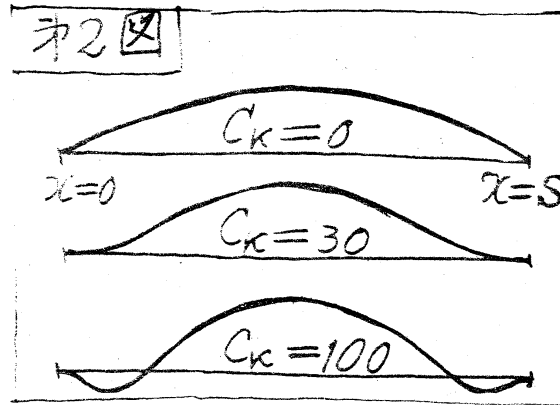
$$\tan \xi = \frac{C_k - 4\xi^2}{C_k} \xi \text{----- (4)}$$

の根でなくてはならない。(3)の表わす波形は、係数 $C_k$ によって支配されることか、わかった。波形の例を 図2図 に示す。

## 6. 非線形問題

### の取扱い.

線形問題に suggest  
されて, 非線形問題  
でも, 近似的に



$$Y = H[\sin(kx + \alpha) + a] \quad \text{--- (5)}$$

とおく。H は  $t$  の関数とする。基礎方程式  
(1)の両辺に  $\partial Y / \partial t$  をかけ、且つ  $x=0$  から  $x=S$   
まで積分すれば

$$\begin{aligned} -\frac{w}{g} \int_0^S \frac{\partial Y}{\partial t} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} dx + \int_0^S T \frac{\partial Y}{\partial x} \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} dx \\ = \int_0^S w \left( \frac{T - T_0}{T_0} \right) \frac{\partial Y}{\partial x} dx \quad \text{--- (6)} \end{aligned}$$

となる。これを (5) を代入すると

$$-A_1 \frac{dH}{dt} \frac{d^2 H}{dt^2} + B_1 T H \frac{dH}{dt} = w C_1 \left( \frac{T - T_0}{T_0} \right) \frac{dH}{dt} \quad \text{--- (7)}$$

という非線形常微分方程式が得られる。こ  
こで  $A_1, B_1, C_1$  は定数であって、下記の値をもつ。

$$A_1 = \int_0^S [\sin(kx + \alpha) + a]^2 dx$$

$$B_1 = \int_0^S [\sin(kx + \alpha) + a] [-k^2 \sin(kx + \alpha)] dx$$

$$C_1 = \int_0^S [\sin(kx + \alpha) + a] dx$$

次ぎに, (1)の第2式に対しては, これに

$$y_0 = \frac{D_0}{S^2} 4x(S-x)$$

と(5)の値とを代入すれば

$$T = T_0 + T_1 H + T_2 H^2 \quad \text{--- (8)}$$

となる。ここで

$$T_1 = \frac{4AED_0}{S^3} k \int_0^S (S-2x) \cos(kx + \alpha) dx,$$

$$T_2 = \frac{AE}{2S} k^2 \int_0^S \cos^2(kx + \alpha) dx$$

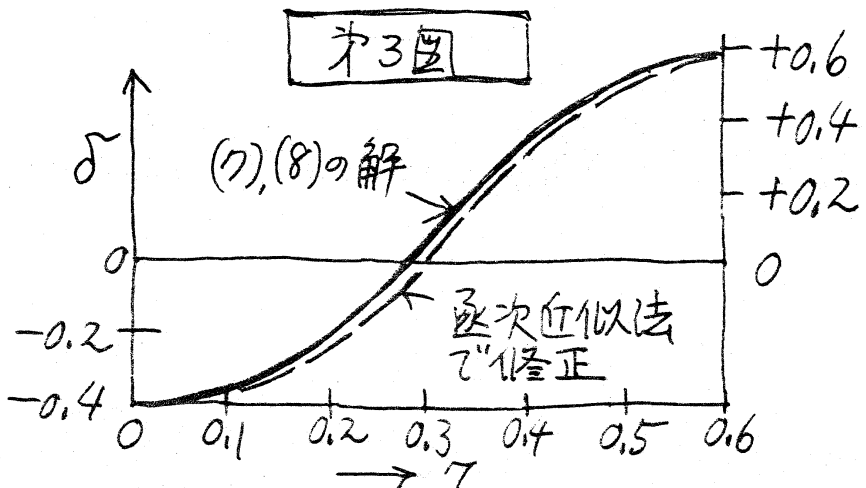
とおいてある。(7)と(8)とを組み合わせたものは, 未知関数  $H(t)$  に対する非線形常微分方程式となる。既知方法によつて近似解が求められる [文献(2)]。すなわち, 下式の形に改められる。

$$-\frac{1}{2} \frac{W}{g} k_1 L \left( \frac{dH}{dt} \right)^2 + F(H) = \text{const.} \quad \text{--- (9)}$$

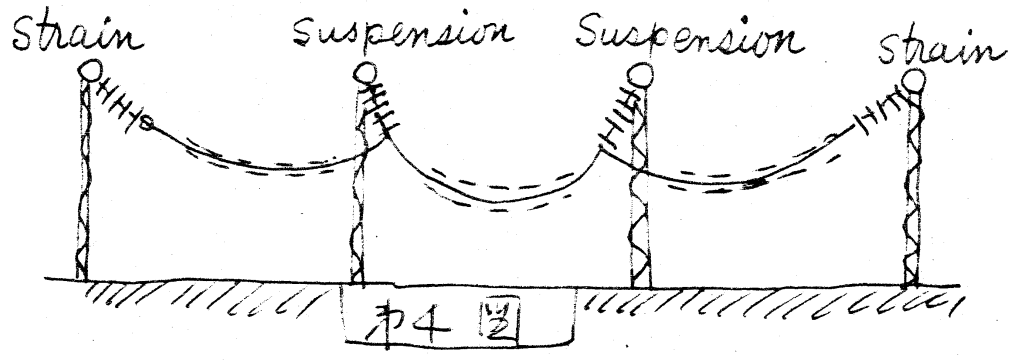
## 7. 計算結果と今後の問題点。

(9)の数値解を多数試みた。それぞれ,

(5) の仮定をおき、且つ方程式(1)を方程式(6)でスリかえたことは、非常に粗雑である。しかし、多数の数値計算を行なって、実験結果と比較してみると、両者可なりよく一致していることが認められた。計算結果は、第3図のときグラフに示される。



これにいても、(7),(8)の扱ただけでは十分でないので、更に、(7),(8)の解からスタートし、逐次累進法(Picard)によって修正値を求めてみた。



今後の課題としては、単独歪曲の場合だけに止めないで、連続歪曲の場合を調べてみたい。せめて二歪曲の場合「表+図」なら、何とかなりわいはいか、と思っている。

### 参考文献

- (1). 鬼頭, スリット・ジャンプの理論的研究, 「雪氷の研究」, 1号, (雪氷学会), 昭28, 11月
- (2). J. J. Stoker, Nonlinear Vibrations, Interscience Publishers, 1950.

### 8. 実験方法.

題目: 送電線における氷雪跳躍 (sleet jump)

実物実験: (1) 猪苗代送電線, (2) 国鉄, 武蔵境線

模型実験: (1) 大阪, 牧方変電所構内 (木柱), (2) 電力技術研究所構内 (鉄柱, 継続中)

比較法則:

(1) 荷重率  $(\text{電線自重} + \text{氷雪重量}) \div (\text{電線自重})$



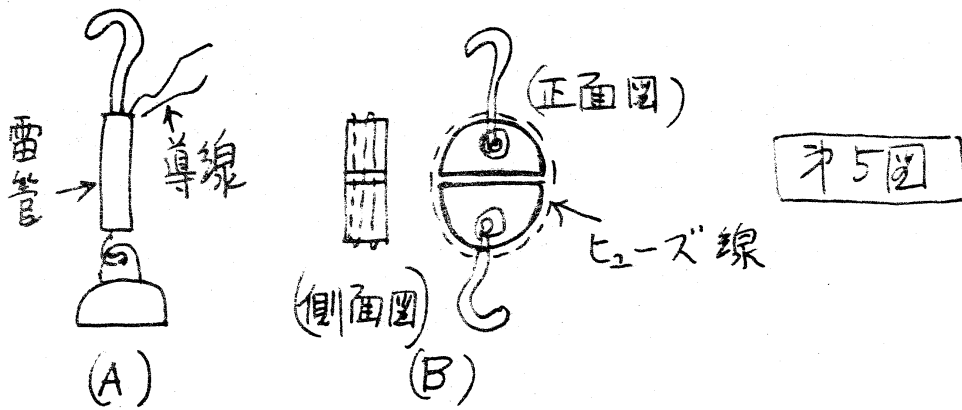
(ロ) 張線係数  $C_k = \frac{W^2 A E S^2}{T_0^3}$

(ハ) 歪曲数 1 (耐張の場合) 乃至 5.

発射方法:

(イ) 同時落下, (ロ) 段階落下

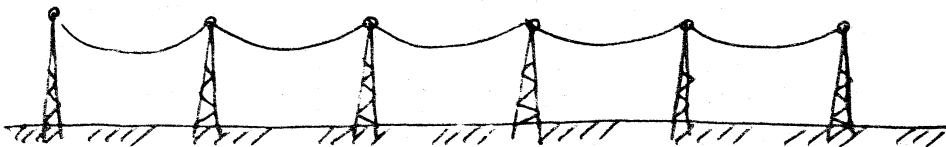
(A) 工業用雷管 (B) ヒューズ・コイル



懸吊方法の區別:

(イ) 懸垂碍子 (suspension insulators)

(ロ) 耐張碍子 (strain insulators)



才0図