数理解析研究所講究録
第51巻 1968年 73-92

流体力学におけるSIMILITUDE

東大 宇宙研 橋本 英典

§1. いとぐち

英和辞典によればsimilitudeとは相似とかそっくりの物;像……と非常に巾の広い意味をもつ言葉である。これを最近意識的にとりあげたのはBirkoffのHydrodynamic, A Study in Logic, Fact and Similitude (1960)であり、そこには流体力学における種々のパラドックス，模型，次元解析，相似則などの概念が数学者の見方からまとまりよく述べられている。

さてふつう流体として考えられる液体や気体は微視的に見れば多数の粒子の集合体として不連続的な描像をもつものであるが、これをぬりつぶし連続的な場として把握しようとするのが流体力学の方法であり、そこには独得の普遍的な法則が支配する。その基礎となる方程式は統計的な連続化の過程によって生じる場の偏微分方程式系であるが、特性線や特異点が示す挙動は新たな不連続的描像である。近来行なわれ

。数値解法は偏微分方程式を定差方程式になおすものである。オイラー表示でははっきりしないとしてもラグランジュ表示に移れば各格子点が流体粒子に対応する。然しその間の関連は個々の分子におけるものとは全く異質的なものである。

さて古典流体力学にあらわれる流体は縮まない、渦なしの流れであり、たゞちに静電場，磁場、熱流などの古典的な場に対応し、ポテンシャル論、等角写像論と一体化した完全な *Similitude* を形成している。

航空機の発展は更に圧縮性、粘性をとり入れた近代流体力学への発展をうながしたが、この傾向はジェットエンジンやロケット，核融合，宇宙開発によって助長され，状態相変化や解離電離などの化学変化を伴なう現象をとりあつかうことが要請されると共に、輻射現象をも含めて電磁場との相互作用をとり入れた電磁流体力学や星間物質や星雲の集合をとりあつかう宇宙気体力学ともいうべき非常に広汎な媒質をとりあつかうことが必要となっている。しかしこれをとりあつかうべき態度は一貫して居り、流体物理学の方法ともいえようが，とにかく　この様な複雑な対象に対し古典的な *similitude* の考えを拡張することは思考の経済から見ても、また現象の理解を深める上からいっても重要なことであろう。

§2. similitude の可能性

similitude の可能性を大まかに示すのはすべての場について適当な保存則が成立することである。流体力学の方程式が一般に質量，運動量，エネルギー等の保存則の形に書けることからこれと並行な関係があればsimilitudeを見出すのに好都合と言えよう。Lighthill－Whitham が提唱したKinematic wave というconcept は質量の保存則という最も簡単な保存則

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial x}=0 \qquad (2.1)$$

から出発する（ρ は密度，q はflux）勿論これでは未知数が２つで閉じていないが，例えば $q=f(\rho)$ の型の状態方程式があったとすれば(2.1)はその特性線として $dx/dt=f'(\rho)$ を持ち，無限小の不連続が特性速度 $f'(\rho)$，不連続（衝撃波）の伝播速度が $\delta q/\delta \rho$ であることを示す。q を振動数，ρ を波数とすれば分散波（$f'(\rho)$ は群速度，q/ρ は位相（速度））に対応し，また交通の流れ，（ρ は単位道路長の車数，q：交通量），洪水波（ρ は実效深さ，q：流量）の特長をよくあらわすことができる。勿論運動量の保存則と連立した，Dynamical wave も存在するがそれを大局化したものがKinematic Wave といえよう。

問題を差分形式に書くことが有用なことは最小作用の原理などに見るように古くから知られたことであるし，また相反

関係などの概念もよく引合いに出されるものであり、こゝでは省略する。

§3. 古典的相似則と若干の拡張

古典的な*similitude*として引き合いに出される例はKirchhoff(1845)によって行なわれた錫ハクに加えた電位Φとその中を流れる面電流$\mathfrak{g}$の関係である。ハクの電導度をαとすれば(符号を除いて)

$$\mathfrak{g} = \alpha \nabla \Phi \qquad (3.1)$$

の関係があり、これと電流の保存則

$$\nabla \mathfrak{g} = 0 \qquad (3.2)$$

を組合わせれば、ポテンシャル論の基礎式

$$\nabla(\alpha \nabla \Phi) = 0 \qquad (3.3)$$

がたゞちに導かれる。$\alpha = 1$, $\mathfrak{g}$を流速とすれば(3.1)は完全流体の渦なし流の速度ポテンシャル, (3.2)は連続の式に他ならず、完全な*similitude*が成立する。実際問題としては球や円柱をめぐる完全流体の渦なしの流れなどはむしろ理想化だが、それが*similitude*によって実現出来るというわけである。以下古典的な媒質について対応関係を示せば下の表のようになる。

第一表

場	流体	静電場	静磁場	電流	熱流	拡散	浸透流
g Flux	ρV	電束密度	磁気誘導	〃	〃	〃	V
Φ ポテンシャル	〃	電位	磁位	電位	温度	濃度	圧力
$\nabla\Phi$ 勾配	速度 V	電場	−磁場	−電場	−〃	勾	配
α	密度	−透電率	−透磁率	電導度	温度伝導度	拡散係数	透過率
	ρ	$-\varepsilon$	$-\mu_m$	σ			

記号は慣用のものだが、縮まない流れではρが一定なので流束gは速度Vと同一になる。電流によるsimilitudeとしては、他に電解質溶液を満した電解槽、石墨質を紙に塗布したTeledeltos、が用いられるが、流れの場を定差方程式を用いて網目に分けた場合と完全に等価なのは回路網である。また浸透流のに属するもので最も有名なのはHele Shaw(1898)のモデルで、2枚の平行ガラス板の間の狭い間隙にうすい模型をはさみ、色素を局所的に混ぜた液体を流すことによって、2次元の完全流体の渦なし流れの模様を表現する。このときのCは粘性係数をμとすればh^3/μに比例する。すなわちこのばあいに粘性流によって非粘性流をsimulateすることになっている。この他にもSand bedと言って砂をかためたブロックに色素に混ぜた浸透流を流すことも行なわれる。

よく使われる概念の例として容量C、誘導質量m^*を挙げておこう。Cは導体の(無限遠点に基準をおいた)電位Φを1としたときの全表面電荷

$$C=\int \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS \qquad (3.4)$$

(nは法線方向)、m^*は速度1で無限に広がった完全流体の中を定常運動する物体の生じる流体の全運動エネルギー

$$2m^* = \int (\nabla\Phi)^2 dV = \int \Phi \underset{\overset{\|}{0}}{\Delta\Phi}\, dV - \int \Phi \frac{\partial x}{\partial n} dS \qquad (3.5)$$

である。ただし$\partial x/\partial n$は表面の法線と運動方向のなす角(法線方向の速度$\partial\Phi/\partial n$に等しい)。

渦なしでない流れに対してはよく渦度$\omega=\nabla\times V$の生じる流れVと電流$i=\nabla\times H$の生じる磁場のsimilitudeが引き合いに出され、有効なばあいが多い。このときは特に集中渦の系(渦糸や渦管)のラグランジュ的力学が有用である。

2次元の場(zに無関係でz成分なし)については(3.2)に対応した流れの関数Ψを用いれば(i_zはz方向の単位ベクトル)

$$g = \alpha\nabla\Phi = \nabla\times(i_z\Psi) \qquad (3.6)$$

と書け

$$= \alpha\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}, -\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) \qquad (3.7)$$

自由度が更に拡大する。すなわち(3.7)から

$$0=\left[\nabla\times\left(\frac{g}{\alpha}\right)\right]_z = -\nabla\cdot\left(\frac{1}{\alpha}\nabla\Psi\right)=0 \qquad (3.8)$$

が得られるのでΦのかわりにΨ、αのかわりに$\frac{1}{\alpha}$、(x, y)の

かわりに$(y, -x)$をとるAnalogyが成立する。これをDirect Analogyに対してInverse Analogyといい、電解槽の実験において有用である。すなわち、深さをh、面電流密度を$\boldsymbol{i}$とすれば

$$\boldsymbol{i} = \lambda h \nabla \Phi = \nabla \times (\boldsymbol{i}_z \Psi), \quad \nabla \cdot \left(\frac{1}{\lambda h} \nabla \Psi \right) = 0 \quad (3.9)$$

（Φはポテンシャル Ψは電流の流れ関数）と書けるので

第2表

	Direct Analogy (D.A.)	Inverse Analogy (I.A.)
Φ : 等ポテンシャル線	$\lambda \Phi$	$\lambda' \Psi$ 電流の流線
Ψ : 流線	$\mu \Psi$	$\mu' \Phi$ 等ポテンシャル線
α :	$\mu a h / \lambda$	$-\mu' / (\lambda' \lambda h)$
$\mathbb{W}$:	$\nabla \Phi$	$\lambda' \boldsymbol{i}_z \times \boldsymbol{i}$
$\alpha \mathbb{W}$:	$\boldsymbol{i}$	$\mu' \nabla \times (\boldsymbol{i}_z \Phi)$
物体面 ($\mathbb{W}_n = 0$) :	絶縁体	導体

循環 $= \oint \mathbb{W}_s \, ds = [\Phi]_c = \frac{1}{\alpha} \int \frac{\partial \Psi}{\partial n} ds$: 物体面での全電流 $= \lambda' [\Psi]_c$

わき出し $= \oint \alpha \mathbb{W}_n \, ds = [\Psi]_c = \alpha \int \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds$; $\mu' [\Phi]_c$

ただし$[\ ]_c$は物体を一周したときの値の増加をあらわす。またλ, μ, λ', μ'は任意の定数で、場の適当な縮尺を可能にする。循環、わき出しのある流れに対しては表が示すようにI.A.が便であり、わき出しに対しては導体壁を切って絶縁物をはさむなどの方法がとられる。

第2表は軸対称流に対しても有効である。対称軸(x軸)

からの距離をyとすればストークスの流れ関数を用いて、軸を含む(x, y)面内の流れが

$$\mathbb{W} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) = \frac{1}{y}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}, -\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)$$

あるいは(x, y)面の中だけで考えれば

$$\nabla \cdot (y\mathbb{W}) = 0,\quad \nabla \times \mathbb{W} = 0$$

となることからD.A.ではαとしてy, I.A.では$1/y$をとればよいことがわかる。D.A.では電解槽の深さhをyに比例させ(Inclined tank), I.A.ではhをyに反比例(双曲型タンク)して設計しておけばよいことがわかる。

Taylor, Sharmanは縮む流れに対して有名な電解槽実験を行なった。こゝではαすなわち密度が速さ$|\mathbb{V}|$の関数として変化するが((4.9)参照)表の示すようにD.A.では$h \propto \rho$, I.A.では$h \propto 1/\rho$となる事実を用いる。底面を加工容易なパラフィンで作りまず深さ一定のばあいから出発して電解槽のポテンシヤルを計り、$\mathbb{V}$の第1近似を求める。次に$|\mathbb{V}| \to \rho$の関係から定まる深さまで底をけずり、更に電流を流してポテンシヤルを測り、収束するまで同じ手続をくりかえすというわけである。

縮む流体については一様深さの浅底水槽での流れの上昇hと断熱指数2の2次元気流の密度が速度の関数として同一となることを用いたアナロジーも行なわれて来た。

§4 一般の similitude

一般の流体についてはパラメタが増加し、その間の関係を適当にとらなければ、完全な similitude を実現することは困難である。またそれが可能とすれば非常に便利である。パラメターの関係次第ではその一部が表面から姿を消し、数学的な近似と容易に見てとることも可能となるわけである。

§4.1 次元解析

そのようなばあいの一番基本的な定理は有名なパイ定理である。すなわち 誘導量 b_0 が j この基本量 $a_1, \cdots, a_j$、k この誘導量 $b_1, \cdots, b_k$ の関数

$$b_0 = f(a_1, a_2 \cdots, a_j; b_1, b_2 \cdots b_k) \quad (4.1)$$

であり、b_n の次元 $[b_n]$ が a_n の次元

$$[a_n] = A_n \quad (4.2)$$

を用いて

$$[b_n] = A_1^{m_{n1}} \cdots\cdots A_j^{m_{nj}} \quad (4.3)$$

の形に書けるとすれば、無次元量 Π_n

$$\Pi_n = b_n / (a_1^{m_{n1}} \cdots\cdots a_j^{m_{nj}}) \quad (4.4)$$

を用いて無次元の関係式

$$\Pi_0 = f(1, 1, \cdots\cdots 1; \Pi_1, \Pi_2, \cdots \Pi_k) \quad (4.5)$$

が成立する。

系として；$k=0$ すなわち $b_0=f(a_1,\cdots a_j)$
のときは f が定数 C となることに着目すれば(4.5)(4.4)から

$$b_0 = C a_1^{m_{01}} \cdots\cdots a_j^{m_{0j}} \qquad (4.6)$$

例として；縮まない粘性流

密度 ρ，粘性係数 μ の流体の中を代表長 L の相似物体が速度 U で定常運動するとき、物体の受ける抵抗 D は

$$D=f(\rho, U, L; \mu) \qquad (4.7)$$

と書ける、いま ρ, U, L を力学的基本量とすれば $j=3$, $k=1$ で D が b_0, μ が b_1 に対応する。次元式

$[D]=[\rho][U]^2[L]^2$, $\mu=[\rho][U][L]$ に着目し(4.4)(4.5)を用いれば Π_0 は抵抗係数 $C_D=D/(\rho U^2L^2)$, Π は $\mu/(\rho UL)=1/R$ で

$$C_D=f(1,1,1;1/R)=f_1(R) \qquad (4.8)$$

すなわち C_D はレイノルズ数 $R=\rho UL/\mu$ によって定まることになる。

粘性の非常に小さいばあいは $C_D=\lim_{R\to\infty} f_1(R)$ であり C_D の意義が更にはっきりするし、粘性が非常に大きいばあいは粘性力すなわち ρ の影響が小さくなることに着目し U, L, μ を基本量として(4.6)を用いるなり、(4.8)が ρ に無関係なことを要求すれば f_1 が $1/R$ の一次斉次関数であることがわかる；

$$\frac{D}{\rho U^2L^2}=\frac{\mu}{\rho UL}\times 定数$$

すなわちストークスの抵抗法則

$$D \propto \mu U L \qquad (4.9)$$

が導かれる。

もちろん運動量の保存と質量の保存をあらわす基礎方程式（ナビエーストークスの方程式）

$$\begin{cases} \rho \dfrac{D\mathbb{V}}{Dt} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbb{V} \quad , \quad \dfrac{D}{Dt} = \dfrac{\partial}{\partial t} + (\mathbb{V}\cdot\nabla) \\ \nabla\cdot\mathbb{V} = 0 \end{cases} \qquad (4.10)$$

がわかっていれば、それで速度$\mathbb{V}$、時間t、長さ$\mathbb{X}$、圧力pの単位をそれぞれU, L/U, L, ρU^2にとって無次元化した式

$$\begin{cases} \dfrac{D\mathbb{V}}{Dt} = -\nabla p + \dfrac{1}{R} \Delta \mathbb{V} \\ \nabla\cdot\mathbb{V} = 0 \end{cases} \qquad (4.10')$$

を見れば何でもないが、それなしでもかなりのことが言えるわけである。Rは慣性項$\rho D\mathbb{V}/Dt$と粘性項$\mu\Delta\mathbb{V}$の大きさの比をあらわすパラメータであった。

§4.2 アフィン相似則

例としてx軸に平行な細い物体を過ぎるx軸に平行な速度Uを持つ縮む流れを考えよう。流れの擾乱は小さいと考えられるので(3.3)は2次以上の項を無視すれば($\alpha = \rho$)

$$U \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \nabla\cdot\mathbb{V} = U \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \Delta \Phi = 0 \qquad (4.11)$$

と書けるが、粘性を0とおいた運動方程式(4.10)のx成分 $U\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = -\dfrac{a^2}{\rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial x}$ (a^2は音速) またはベルヌーイの式から

$$\frac{U}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{U^2}{a^2}\frac{\partial u}{\partial x} = M^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \qquad (4.12)$$

Mはマッハ数 u/a）と書けるので結局，現象は

$$(1-M^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=0 \qquad (4.13)$$

の形の $M<1$（亜音速）では楕円形 $M>1$（超音速）では双曲型の方程式によって支配されることになる。（縮む流れについてはマッハ数が相似のパラメタになることに注意）

uが一様流の速度Uに近いとして更に近似し $M=M_\infty$（無限遠のマッハ数）とおき、更に変数変換

$$\xi=x,\quad \eta=\mu y,\quad \zeta=\mu z,\quad \mu=\sqrt{|1-M_\infty^2|}$$

を行なえば標準形

$$\left(\pm\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\right)\Phi=0 \qquad (4.14)$$

に帰する。境界条件で色々のことがあるが、流れに垂直な方向のスケールを変えた流れを議論すれば、$M<1$ では $M\ll 1$ すなわち縮まない流れ，$M>1$ では適当な標準流（波動方程式に従う）からのほんやくが可能となる。

§4.3 Local Similitude

§4.1 でレイノルズ数→0のとき，ストークスの法則が導かれた。∵ 無次元化したナビエ・ストークスの式で Rを0に近づけ $(\mathbb{V}\cdot D)\mathbb{V}$ を $\Delta\mathbb{V}/R$ にくらべて無視したものが，ストークスの方程式であるが，更に Rp のかわりに p とおけば

$$\Delta\mathbb{V}=\nabla p \qquad (4.15)$$

となって，流れ模様は Rにも無関係となり，完全な相似則が

支配する。しかし事実は必ずしも簡単ではない。第1，2次元物体を過ぎ無限遠で速度1の一様な流れは求められないし(Stokes の paradox)，3次元物体でもこれを才1近似として、才2近似を求めようとする簡単な摂動論は失敗する。(Whitehead の paradox)。

その原因が単に R が小さいといっても、無限遠で代表的な長さとして物体の距離 $|\mathbb{x}|$ をとればむしろ $R\to\infty$ となることに対応することを指摘し，$(\mathbb{V}\cdot\nabla)\mathbb{V}$ をその中で無限遠で最大の寄与をすると考えられる $\nabla\frac{\partial\mathbb{V}}{\partial x}$ でおきかえたのは Oseen で

$$\frac{\partial\mathbb{V}}{\partial x}=-\frac{1}{R}\Delta\mathbb{V}+\nabla p \qquad (4.16)$$

を Oseen の方程式と呼ぶ。事実,球に対する抵抗の才2近似も円柱の抵抗も出て来るし，$R\backsim 0$ での流れの模様も実際に近い。このようにして(4.12)の similitude は物体の近傍に限られ(Local similitude)ることとなった。一方(4.16)は $\mathbb{x}'=R\mathbb{x}$，のおきかえで,R を含まない形(物体から遠い所での Local similitude)に書ける。

$$\frac{\partial\mathbb{V}}{\partial x'}=-\Delta'\mathbb{V}+\nabla' p' \qquad (4.17)$$

たゞし物体の大きさは RL で R の小さいばあいは無限小の物体を考えることゝなる。$R\to 0$ とするとき2つの領域に共通の収束域があれば(4.15)の $\mathbb{x}\to\infty$ と(4.17)の $\mathbb{x}'\to 0$ とを Match させることが或る程度可能となるわけである。それを意識的

にとり上げてN.S.方程式の近似を高めるこゝろみが最近 Proudman-Pearson, Kaplun, Lagerstrom等により行なわれている。

似たようなことが$R\to\infty$に対しても存在する。たとえば流線型の物体を考えよう。$R=\infty$とおけば(4,10')は階数が落ちて、古典的な非粘性の方程式に帰着し、事実に近い。しかしそれでは抵抗が説明されない。プラントルはその解だと流れが物体面ですべってしまい、(高階の式としては満すべき)粘着条件を満足できぬことに着目し、境界層の概念を導入した。すなわち物体面に垂直な座標をn 平行な座標をsとするとき、$\partial/\partial n$が$\partial/\partial s$にくらべて大きいとして、尺度の変更(Rescaling)を行ない、$s=x'$, $n=\lambda y'$とおいて$\lambda\to 0$とすればRを含まない形に帰着することができる。このときλは$1/\sqrt{R}$ととればよいことがわかる。たとえば2次元流をとれば

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u'}{\partial x'}+\dfrac{\partial v'}{\partial y'}=0 \\ u'\dfrac{\partial u'}{\partial x'}+v'\dfrac{\partial u'}{\partial y'}=-\dfrac{dp}{dx'}+\dfrac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \end{cases} \qquad (4.18)$$

たゞし u'はx'方向の速度, v'はy'方向の速度を$\sqrt{R}$倍したものである。こゝで圧力は運動方程式のもう一つの式から、外側の非粘性流の圧力が境界でとる圧力$p(x)$に等しいとおける。このようにして、境界層の方程式は局所相似の考えから導かれるが、外側の非粘性解との接合と近似の改良は後者

で$\eta \to 0$，境界層で$y' \to \infty$でのmatchingを行なうことにより行なわれる。

§ 4.4 Self-Similitude

特に半無限の平板の境界層について見よう。このときはx' y'はアフィン変換を除けばふつうの直交座標x, yと同視できる。このときはさらに新しい変換

$$x \to \beta^2 x,\ y \to \beta y,\ u \to u,\ v \to v/\beta \quad (4.19)$$

に対しても基礎的(4.18)が不変となる。境界条件も不変なので解が

$$u = f'(\eta), \quad v = \frac{1}{\sqrt{x}} g'(\eta), \quad \eta = y/\sqrt{x} \quad (4.20)$$

の形にあらわされることは$y/\sqrt{x}$, $\sqrt{x}v$がこの変換に対して不変なことから明らかであろう。

連続の式を用いてgを消去しブラジウスの常微分方程式

$$2f''' + ff'' = 0 \quad (4.21)$$

が得られる。（境界条件は$f(0) = f'(0) = 0$, $f'(\infty) = 1$）

こゝでは平板に沿って進むにつれて，yのスケールをその進みの平方根にとれば、ことがらが同じというわけで自己相似(self-similar automodel)といわれるが、この考えは線型，非線型たるを問わず，境界層だけではなく、衝撃波の伝播などの現象に到るまで広く用いられる考えで，基礎式の独立変数を少なくして、とりあつかいをやさしくすると共に事柄の理解を深めるのに役立つ。特に半無限平板の問題は放物

座標を用いれば外部とのMatchingがかなりうまく行くのでナビエーストークの式について高い近似か今井、Goldstein、Marray等によって進められている。

§4.5 Quasi-similitude

前節のひに$\sqrt{x}$が乗ぜられているが、解析的な話をもっと拡張すればxの勝手な関数としてよいばあいもあるだろうしあるいは、全然別の問題に帰着するようなこともあってよいであろう。以下2,3の例を挙げて見る。

例1）流れに垂直におかれた板を過ぎるストークス流

板に垂直にx軸，その方向の単位ベクトルを$\boldsymbol{i}$とすれば，(4.15)の解を板面で$\boldsymbol{v}=0$，無限遠で$\boldsymbol{v}\to\boldsymbol{i}$の境界条件の下に解けばよい。

Roscoeは解が$\Delta\Phi=0$を満足する調和関数を用いて

$$\begin{cases}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{i}\Phi-x\nabla\Phi & \text{ただし}\ \Delta\Phi=0\\ p=-2\,\partial\Phi/\partial x\end{cases}\qquad(4.22)$$

となることを示した。

ただし境界条件から板面で$\Phi=0$，無限遠で$\Phi=1$であればよい。このようなΦはまさしく板を導体としたときの静電ポテンシャルであり，(4.22)で示される圧力の表面にわたっての積分すなわち板に働く抵抗は(3.4)に従えば板の静電容量に比例し、抵抗係数C_Dはただちに

$$C_D = \frac{2}{R} C \qquad (4.23)$$

で与えられる。

例2)　スクリーンを通過するストークス流

波動現象でのバビネの原理によれば板の問題をそれと同形の孔をあけたスクリーンの問題には簡単な対応がある。例1の対応問題を考えよう。こんどの問題は両側での圧力差P_∞を与えて流量を見出だすことにある。すなわち$x = \pm\infty$で圧力が$\mp\frac{P_\infty}{2}$でスクリーン上で$\mathbb{V} = 0$の条件を満足すればよい。(4.22)のおきかえを今のばあいにあてはめると、対称性も考慮して、

$$\text{無限遠で}\quad \nabla\Phi = \frac{P_\infty}{4}\mathbf{i}$$
$$\text{孔で}\quad \partial\Phi/\partial n = 0,\quad \text{壁で}\ \Phi = 0 \qquad (4.24)$$

を満すことになる。これは、丁度孔と同型の板を過ぎる速度$\frac{P_\infty}{4}\mathbf{i}$のポテンシャル流の問題であり、孔を通る流量を$P_\infty$で割った孔の透過率$Q$は$\mathbb{V}\cdot\mathbf{i}$すなわち$\Phi\,(\partial x/\partial n = 1)$の積分として(3,5)から

$$Q = \frac{m^*}{4} R \qquad (4.25)$$

で与えられることになる。

例3)　磁気流体力学におけるFrozen Flow

完全電導性の流体の定常流では磁場$\mathbb{H}$と流れ$\mathbb{V}$が無限遠で平行ならば、至る所並行性を保つ(Aligned Field)：

$$\mathbb{H} = \beta \rho \mathbb{V} \qquad (4.26)$$

たゞし β は流線に沿って一定。

いま流れが縮まないものとし、$\beta=1$, $\rho=1$ のときを考えれば運動方程式の中でローレンツ力 $(\mathbb{H}\cdot\nabla)\mathbb{H}$ は $\beta^2(\mathbb{V}\cdot\nabla)\mathbb{V}$ でおきかえられ、無次元化した形で

$$(1-\beta^2)(\mathbb{V}\cdot\nabla)\mathbb{V}=-\nabla p+\frac{1}{R}\Delta\mathbb{V} \qquad (4.27)$$

(たゞし p は磁気圧を含めた全圧) と書ける。これはいわば密度 ρ が $(1-\beta^2)$ 倍された粘性流に他ならないが

$$\mathbb{V}=\mathbb{V}^*/(1-\beta^2), \quad p=p^*/(1-\beta^2), \qquad (4.28)$$

とおけば、(4.10') と同一の式

$$(\mathbb{V}^*\cdot\nabla)\mathbb{V}^*=-\nabla p^*+\frac{1}{R}\Delta\mathbb{V}^* \qquad (4.27)^*$$

に帰着する。これは $\beta<1$. (Super-Alfvenic Flow) では無限遠の速度を $(1-\beta^2)$ の因子だけ下げたふつうの粘性流であるが $\beta>1$ (Sub-Alfvenic Flow) だと流れの方向を逆転したものであって、(4.27) の解ではふつうの流れでの後流が前方に出現するという効果を生じる。

また物体に働く力の係数も

$$C_{\mathbb{F}}=(1-\beta^2)C_{\mathbb{F}}^*((1-\beta^2)R) \qquad (4.28)$$

であらわされる。たゞし $C_{\mathbb{F}}^*$ は(方向まで含めて)レイノルズ $(1-\beta^2)R$ のふつうの流れについての力の係数。縮む流れについても粘性を無視すれば同様な *similitude* が成立し、特別な密度と速度の関係を満足する非伝導性気流のばあいに帰

鮒ることは今井・肥田等によって示されている。

例4)　低レイノルズ数で磁場が垂直にかつた絶縁板を過ぎる流れ

基礎式としては、(4.27)に相当する

$$\Delta \mathbb{V} = +\frac{1}{R}\nabla p - \frac{\beta}{R}\frac{\partial}{\partial x}\mathbb{H},$$

$$\Delta \mathbb{H} = \qquad -\frac{\beta}{R_m}\frac{\partial}{\partial x}\mathbb{V}$$

か問題になる(R_mは磁気粘性と呼ばれる量でσに比例する)

例1に対応し

$$\mathbb{V} = \dot{i} + \frac{1}{k}(k\Phi\cosh kx\,\dot{i} - \sinh kx\,\nabla\Phi)$$

$$\mathbb{H} = \beta\quad \dot{i} - \frac{2}{R}(k\Phi\sinh kx\,\dot{i} - \cosh kx\,\nabla\Phi + \frac{1}{2}\nabla\phi_0)$$

$$p = -\frac{1}{R}\frac{\partial\phi_0}{\partial x},\quad 2k = \beta/\sqrt{RR_m}\ \text{(ハルトマン数)}$$

とおけば　Φはヘルムホルツの方程式

$$(\Delta - k^2)\Phi = 0$$

の解, ϕ は調和関数で

板上の境界条件 $\Phi = -1,\ \partial\phi_0/\partial x = 2\partial\Phi/\partial x$

を満足すればよい。

この問題は入射波が$\widetilde{\Phi}_i = \exp(ikx)$となるSoft Diskの散乱問題と似ておりたゞそこで$k \to ik$のおきかえをしただけである。特に前方散乱波$\widetilde{\Phi}$についてのレイリー公式$kx \gg 1$で

$$\widetilde{\Phi}(x, 0, 0 : k) = \widehat{A}(k)e^{ikx}/x$$

たゞし　$$\widehat{A}(k) = -\frac{1}{2\pi}\int_{DISK}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_{x=+0} dS$$

に着目すれば$\hat{A}$と板の抵抗との関係がつき

$$C_D = \frac{8\pi}{R}\hat{A}(ik)$$

が得られる。

これらは虚数的な similitude ともいえよう。

Screen を過ぎる流れについても同じことがいえ，透過率が Soft Screen の孔による散乱振巾と結びつけられることになる。

参 考 書

G. Birkhoff: Hydrodynamics (Princeton University Press, 1960)

L.I. Sedov : Similarity and Dimensional Method in Mechanics (Academic Press, 1959)

D. Vitkovich: Field Analysis (V. Nostrand, 1965)

M. Van Dyke: Perturbation Methods in Fluid Mechanics (Academic Press, 1964)

今井 功：流体力学，岩波講座 現代物理学(1955)

Magneto-Fluid Dynamics: Supplement, Prog. Theor. Phys. (Kyoto) No 24 (1963)