

プラズマのシミュレーション — 流体模型 —

日大 理工 川上 一郎

§ 1. プラズマの流体模型

プラズマとは、一種類以上のイオンと電子 — 場合によっては中性分子 — の集団である。その粒子数は、 1cm^3 中に 10^{10} 個から 10^{17} 個もあり、その個々の粒子を、ニュートンの運動方程式によって追跡することは、不可能である。そこでこの集団を何らかの方法で、統計力学的に取扱う必要が生れてくる。

プラズマの統計力学として、古くから知られているのは、いわゆる BBGKY^{*}理論である¹⁾。今、 N 個の粒子を考え、 i 番目の粒子の座標を x_i 、速度を v_i とすれば、 N 体分布関数 $f_N(x_1, x_2, \dots, x_N; t)$ 、 $x_i = (x_i, v_i)$ に対しては、Liouville の方程式

$$\partial f_N / \partial t + \{ f_N, H_N \} = 0$$

が成立つ。 $\{ \}$ は Poisson の bracket で、 H_N は N 個の粒子系の Hamiltonian である。次に、 S 体分布関数を次のように

* Bogoliubov - Born - Green - Kirkwood - Yvon

定義する: \mathcal{V} を系の体積として,

$$f_s(X_1, X_2, \dots, X_s; t) \equiv \mathcal{V}^s \int dX_{s+1} \dots dX_N f_N.$$

N と \mathcal{V} を ∞ にもって行き, $N/\mathcal{V} \rightarrow n_0$ (有限) にすれば, Liouville 方程式から, f_s の従う方程式がえられる:

$$\partial f_s / \partial t + \{H_s, f_s\} = n_0 \int dX_{s+1} \left\{ \sum_{i=1}^s \phi_{i, s+1}, f_{s+1} \right\},$$

$\phi_{i,j}$ は, 相互作用項で, 右辺は $s+1$ 体の分布関数を含む。特に $s=1$ に対する方程式は, Boltzmann の方程式 ($f_1 = f$)

$$\partial f / \partial t + \underline{v} \cdot \partial f / \partial \underline{x} + \underline{F} \cdot \partial f / \partial \underline{v} = (\partial f / \partial t)_{\text{coll}}$$

$$\underline{F} = \frac{e}{m} (\underline{E} + \frac{1}{c} \underline{v} \times \underline{B})$$

である。右辺の衝突項は, プラズマ・パラメタ $g \sim 10^{-3} \sim 10^{-9}$ の展開の最低次ではおちて, いわゆる Vlasov 方程式を得る。これらの方程式と Maxwell の方程式 — H_N の中に電磁場を含めておけば, 上述の取扱いで自動的に導出される — によって, プラズマを記述することが出来る。

以上のいわゆる Kinetic theory では, f は $(\underline{x}, \underline{v})$ 空間, すなわち位相空間の量である。問題によっては, f の \underline{v} 依存性は不要で, もっぱら \underline{x} に依存する量 — 密度, 圧力, 温度, 巨視的速度など — だけが必要なことがある。そのような場合には, Boltzmann 方程式に, \underline{v} のべきを乗じて, \underline{v} について積分してしまった方程式 — 輸送方程式²⁾ — を解くことになる。この場合にも, f_s に対する方程式に f_{s+1} が入って来

たように、 n 次の f の moment $\int d^3v \overbrace{v v \dots v}^n f$ に対する方程式に、 $n+1$ 次以上の moment が入って来る。熱平衡に近いプラズマに対しては、2次から3次まで取れば十分である。輸送方程式は、適宜に定義された密度・圧力・温度・速度などに対する方程式となり、通常の中性流体に対する方程式と異なるところはない：すなわち、諸量は、時間 t と座標 x に依存し、方程式は非線型偏微分方程式となる。

現在までに Computer による Simulation になったのは、主として簡単さのために、Kinetic theory では、1次元 ^{*}Vlasov 方程式と、輸送方程式は1次元あるいは2次元の場合にすぎない。それらについて以下に述べる。

§2. 1次元 Vlasov 方程式の数値解法

対象となる方程式は、適宜に無次元化 (dimensionless 化) すれば、次のように書ける：

$$\begin{cases} \partial f(x, v, t) / \partial t + v \partial f(x, v, t) / \partial x + E(x, t) \partial f(x, v, t) / \partial v = 0 \\ \partial E(x, t) / \partial x = \int_{-\infty}^{\infty} dv f(x, v, t) - 1 \\ \partial E(x, t) / \partial t = - \int_{-\infty}^{\infty} dv v f(x, v, t) \end{cases}$$

あとの E についての2式は、 f についての適当な境界条件に対しては、同等であるために、どちらか一方を使えばよい。

* x について1次元、 v について1次元

この方程式の数値解法は、大きくわけて、四つある。

2.1 直接法³⁾

(x, v) 空間を網目にわけて、格子真 $(i\Delta x, j\Delta v)$ にあって、時刻 $n\Delta t$ にある f の値を、 $f_{i,j}^n$ と記す。直接法は、与えられた方程式を、そのまま $f_{i,j}^n$ であらわす。 $f_{i,j}^{n+1} = f_{i,j}^n + [v\partial f/\partial x + E\partial f/\partial v]_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t$ および $f_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = f_{i,j}^{n-\frac{1}{2}} + [v\partial f/\partial x + E\partial f/\partial v]_{i,j}^n \Delta t$ の2つの式を交互に使う (leap frog)、時空方向に積分を進める。向題は、 (x, v) 方向の差分のとり方である。Kellogg は、最初次のような差分を用いた:

$$[v\partial f/\partial x]_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = (v_j/2\Delta x) [f_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + f_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}]$$

これは、 $\Delta t/\Delta x$ を十分小さくとれば安定なはずである* (条件付安定)。しかし、実際にはひどい不安定性をもっていた。

そこで、次のような差分を用いた:

$$[v\partial f/\partial x]_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = (1/2\Delta x) \{ v_{j+\frac{1}{2}} [f_{i+1, j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - f_{i, j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}] + v_{j-\frac{1}{2}} [f_{i+1, j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - f_{i, j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}] \}$$

これは、 $v\partial f/\partial x$ を保存形 $\partial v f/\partial x$ にして差分を取ったことに相当する。この形は、理論的にも実際にも安定であった。

$E\partial f/\partial v$ の項は、この形にしたにもかかわらず、不安定であったという。しかし、この不安定性は弱かったので、それほど困らなかつたそうである。いずれにせよ、直接法は、あまり易しくはないようである。

* Courant - Friedrichs - Lewy の意味での安定⁴⁾

2.2 特性曲線法 ^{5, 6, 7)}

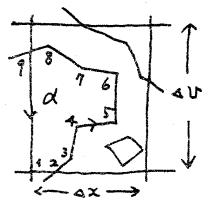
Vlasov 方程式の特性曲線は、Lagrangian 形式と同じく、粒子の運動方程式

$$dx/dt = v, \quad dv/dt = E$$

と同じである。この運動方程式の積分は、数値的不安定性をもたないで、容易に遂行できる（たとえば leap frog で）。

問題は、Maxwell の方程式 $\partial E/\partial x = \int dv f - 1$ の積分である。Stocker ⁵⁾ の用いた方法は、数値解法としては、複雑であるので、Roberts - Berk ⁷⁾ の方法をのべよう。

(x, v) 平面上に、 f の値の等しい点を結んで、“等高線”を画き、この等高線上の点の運動を追跡する。等高線の向では、 f は一定と考える。ある時刻では、一つの網目の中には、何本かの等高線がありうる。網の糸と等高線によってかこま



れた領域では、 f は一定である。この領域は多角形であるから、頂点に $l = 1, 2, \dots$ と番号を反時計まわりにつければ、多角形 α につ

いて $\int_{\alpha} dx dv f = f_{\alpha} \int_{\alpha} dx dv = f_{\alpha} \oint x^{\alpha} dv^{\alpha} = f_{\alpha} \sum_{l=1} \frac{1}{2} (x_{l+1}^{\alpha} + x_l^{\alpha}) (v_{l+1}^{\alpha} - v_l^{\alpha})$ と近似できる。

もう一つの方法は、Maxwell の方程式として $\partial E/\partial t$ の式 ⁶⁾ を解く方法である。これについては、ここではのべない。

2.3 Fourier 展開法 ⁸⁾

特性曲線法は、不安定性に関してはずぐれているが、粒子軌道の追跡と本質的には同じであるため、 E に統計的ゆらぎが生ずる。追跡粒子の数を十分多くとれば、ゆらぎは小さくなるが、もともとの Vlasov 方程式は "ならされた" ものであるから、この種のゆらぎは存在しないはずである。この難点は、Fourier 展開法にはない。

分布関数と電界を次のように Fourier 展開をする：

$$F_k(y, t) = (1/L) \int_0^L dx e^{-ikx} \int_0^\infty dv e^{i\gamma v} f(x, v, t)$$

$$E_k(t) = (1/L) \int_0^L dx e^{-ikx} E(x, t)$$

$$k = n k_0, \quad k_0 = 2\pi/L \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

F_k, E_k に対する方程式は、

$$\partial F_k(y, t) / \partial t + k \partial F_k(y, t) / \partial y - \gamma \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{q \neq 0}{q} \frac{F_q(0, t)}{q} F_{k-q}(y, t) = 0$$

$$ik E_k(t) = F_k(0, t), \quad E_0(t) = 0.$$

この形では、 E を求めるのに特別な積分がいらないこと、また F_k の式は、その特性曲線 $dy/dt = k = nk_0$ は直線であることのために $\Delta y / \Delta t$ を k_0 になるようにきめておけば、特性曲線は必ず格子点を通るという利点がある。 n は、
 $|n| \leq 2$ ぐらいでよいと Knorr ⁸⁾ は言っているが、肉題によることであろう。

2.4 直交関数展開法 ^{9) 10)}

Vlasov 方程式の解析的解法 (もちろん線型近似などの近似解) では, x については Fourier 展開も行なうが, v については普通は行っていない。また, v については Fourier 展開をいっせいにやらずに必ずしも必要はなく, おしる Maxwell 分布などでは, Hermite 多項式による展開の方が自然である。

⁹⁾ Armstrong は, 次のような展開を行っていい:

$$f(x, v, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-inK_0 x} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-v^2/2} H_m(v) Z_{nm}(t)$$

$$E(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-inK_0 x} E_n(t)$$

H_m は, 適当に定義された Hermite 多項式である。求めねばならぬのは Z_{nm} で, E_n は Z_{nm} によって表わされる:

$$E_0(t) = 0; \quad E_n(t) = i(2\pi)^{1/4} / nK_0 \cdot \text{Re} Z_{0n}(t) \quad (n \neq 0)$$

Z_{nm} に対する方程式は, 常微分方程式で,

$$Z_{0n}(t) + iK_0 n Z_{1n}(t) = 0$$

$$dZ_{nm}/dt + inK_0 (\sqrt{m} Z_{m-1, n} + \sqrt{m+1} Z_{m+1, n})$$

$$+ i(2\pi)^{1/4} \sqrt{m}/K_0 \cdot \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{Z_{0, n-q}}{n-q} Z_{m-1, q} = 0.$$

Armstrong によると, m については, 1200 項とれば, 十分よい近似となるという。(n については $|n| \leq 2$) (x, v) 空間を網目に分けることに比べれば, これは多いとは言えぬが, それにしても, 少ないとは言えない。この真に因りて,

¹⁰⁾ Sadowski は, artificial collision term $(\partial f/\partial t)_{coll} = \nu_c [$

$\partial(vf)/\partial v + \partial^2 f/\partial v^2]$ を導入して $|m| \leq 99$ でもよい、と言っている。

直交関数系とすれば、他のものも考えられようが、実際に行った例はないようである。

§3. 輸送方程式の数値解法

0次、1次、2次の moment まではとったときの輸送方程式は、次の形をもつ：²⁾

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial n/\partial t + \text{div}(n\mathcal{V}) = 0 \\ mn(\partial/\partial t + \mathcal{V} \cdot \partial/\partial \mathcal{X})V_\alpha = -\partial p/\partial x_\alpha + en(E_\alpha + \frac{1}{c}(\mathcal{V} \times \mathcal{B})_\alpha) \\ \quad - \partial \pi_{\alpha\beta}/\partial x_\beta \pm R_\alpha \\ (3/2)n(\partial/\partial t + \mathcal{V} \cdot \partial/\partial \mathcal{X})T + p \text{div} \mathcal{V} \\ \quad = -\text{div} \underline{q} - \pi_{\alpha\beta} \partial V_\alpha/\partial x_\beta + Q \end{array} \right.$$

これは、それぞれ連続の方程式、運動方程式、状態方程式である。nは密度、 \mathcal{V} は速度、pは圧力、Tは温度などについては明きらかである。特にQ、 R_α は、衝突項から出て来たものであることを注意しておく。これらの式は、イオンや電子などの各々の種類に対して成立つものである。熱平衡に近いときは、3次までで十分であるが、そうでないときには、もっと高次の moment まで必要となる。

上の形を変形して、質量、運動量、エネルギーの保存則の

形に書いて、体積積分をすれば、次の形の式を得る：

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int dV p &= - \int dS p v \\ \frac{\partial}{\partial t} \int dV p v &= - \int dS \left[p + \frac{B^2}{8\pi} \right] v - \int dS \cdot \left(p v v + \frac{B B}{4\pi} \right) + \int dV \Pi \\ \frac{\partial}{\partial t} \int dV \left(\frac{1}{2} p v^2 + \frac{p}{\gamma-1} + \frac{B^2}{8\pi} \right) \\ &= - \int dS \cdot \left[\left(\frac{1}{2} p v^2 + \frac{\partial p}{\partial t} \right) v + \frac{1}{4\pi} (\underline{E} \times \underline{B}) \right] + \int \epsilon dV \end{aligned} \right.$$

空間を cell に分け、体積積分を各 cell について行なうことにする。この形で差分に直すと、差分方程式でも物理量の保存が保証される。すなわち面積積分の項は、隣り合った cell 間の物理量の受け渡しを保証するからである。

特に1次元の場合には、上に書いた Euler 型方程式よりも、Lagrangean 形式の方程式の方がすぐれている。それは、オ1に Lagrangean では、物理量の保存が成立する形になっていること、オ2に、不安定性のおこりやすい $v \cdot \partial / \partial x$ の項がないためである。2次元以上になると、“turbulent”な状態になることがあるため、必ずしも Lagrangean 形式が良いとは言えない。“turbulent”にならなければ、Lagrangean 形式がすぐれていることは、通常言えることである。Lagrange 形式がそのまま使いにくいような2次元以上の問題には、Euler 形式と混合した方法が考案されている。¹⁾

問題によっては、上述の artificial collision term の如く、

もとの微分方程式には含まれていないような輸送係数を含む項を \rightarrow け加えて、目的に合致した解をえらび出す方法をこゝになければならない。昔から用いられたものとして、衝撃波を simulate するためには、artificial viscosity⁴⁾を導入しなければならぬことが知られている。

文献

- 1) たとえば D. C. Montgomery and D. A. Tidman : Plasma Kinetic Theory, McGraw-Hill, 1964
- 2) たとえば Braginskii : Reviews of Plasma Physics Vol 1.
- 3) Kellog : Phys. Fluids 8 102 (1965)
- 4) たとえば Richtmyer : Difference Methods for Initial Value Problems, Interscience, 1957
- 5) Stocker : Dissertation, Culham Lab. 1958
- 6) Knorr : Dissertation, Max Plank Inst. 1963
- 7) Roberts and Berk : Phys. Rev. Lett. 19 297 (1967)
- 8) Knorr : Zeits. f. Natf. 18a 1304 (1963)
- 9) Armstrong : Dissertation, Univ. Iowa, 1966
- 10) Sadowsky : Proc. Symp. on Computer Simulation of Plasma.
- 11) Alder ed. : Methods in Computational Phys. vol. 3, Academic Press, New York 1964