数理解析研究所講究録
第52巻 1968年 1-23

Navier-Stokes 方程式の定常解

東大工　高見穎郎

§1. はしがき

この小文の目的は

(1) 数学者の研究によって Navier-Stokes 方程式の定常解について現在どれだけのことがわかっているかを概観すること（§3〜5），および

(2) 数学的にはまだ証明されていない事柄に対して，流体力学の立場からある推測を行ってみること（§6）

である．

(1)については池部晃生氏が数理解析研究所講究録24（1967年5月）に書いておられる．したがって，その後にえられた結果を紹介するだけで十分なはずではあるが，説明の便宜上さかのぼって話を始める．そのため，(1)の多くの部分は池部氏の論文と重複することになるが，できるだけ流体力学の問題としての具体的な意味を考えることに重点をおくつもりである．解の存在と一意性についての結果は§4の最後の表にまとめてある．

(2)は単に一つの臆測にすぎないから，読者の中には異論をとなえられる方が多いと思う．むしろこれが今後の治

発な議論の導火線になれば，筆者の目的は達せられる．また数学者の方々が，この臆測の真偽を証明して下されば大変ありがたいのである．

§2. Navier-Stokes 方程式

縮まない粘性流体の定常運動は次の方程式にしたがっておこると考えられている：

$$\begin{cases} \nu \Delta w + w \cdot \nabla w + \dfrac{1}{\rho} \nabla p = f, & (2.1) \\ \nabla \cdot w = 0. & (2.2) \end{cases}$$

ここで $w = w(x)$ は流速，$f = f(x)$ は流体の単位質量に作用する外力，$p = p(x)$ は圧力，ρ は密度，ν は運動粘性率である．* ρ と ν は共に一定である．

式 (2.1) は，流体の運動量の保存則をのべたいわゆる Navier-Stokes 方程式，(2.2) は質量の保存則をのべた連続の方程式である．

ρ, ν, $f(x)$ が与えられれば，適当な境界条件のもとで $w(x)$ と $p(x)$ が，したがって流体の運動が完全にきまる．

---

* 細字で書いたが w, f, x はベクトルである．∇w はテンソル $\{\partial w_i / \partial x_j\}$ を，$\nabla \cdot w$ はスカラー $\partial w_i / \partial x_i$ を表わす．

以下では外力 f を 0 とする.[*] 方程式に現れる量を, 代表的な長さ L, 代表的な速度 U, および密度 ρ によって無次元化すれば, (2.1) と (2.2) は次のようになる:

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{1}{R}\Delta w + w\cdot\nabla w + \nabla p = 0, & (2.3) \\ \nabla\cdot w = 0. & (2.4) \end{array}\right.$$

ただし $R = UL/\nu$. また w, p, ∇, Δ は L, U, ρ によって無次元化してある. 無次元数 R のことを Reynolds 数とよぶ. 幾何学的に相似な流れは, R の値が等しいときに限って力学的にも相似となる. すなわち, 流速が大きいこと, 境界が大きいこと, 粘性が小さいこと の三つは同等である.

以後 方程式 (2.3) と (2.4) とをあわせて NS 方程式とよぶことにしよう. そして, 考えている領域で NS 方程式が成立つことを単に

$$NS[w] = 0 \qquad (2.5)$$

と書くことにする.

NS 方程式 (2.5) は楕円型である. w については 2 階だが p については 1 階なので, その解 $w(x)$ と $p(x)$ は境界上で w

---

[*] f が重力や遠心力のようなポテンシャルから導かれる力の場合には, 圧力 p を適当に定義しなおせば $f\equiv 0$ の場合に帰着する.

の値だけを指定すればきまってしまう. 以下ではそのような境界値問題を考える.

§3. 内部問題

流体が境界Σに囲まれた有界領域$\mathcal{V}$の内部に存在する場合を内部問題とよぶことにしよう(図3.1). Σは十分なめらかであると仮定する.

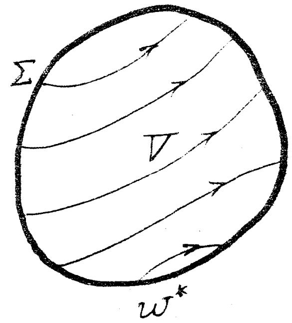


図3.1

内部問題の解は常に存在する

[定理](2次元, 3次元)(Leray [8])

境界値問題

$$\begin{cases} NS[w] = 0, \\ w(\Sigma) = w^* \text{(与えられた十分なめらかな関数)} \end{cases}$$

は, w^*が次の条件

$$\int_\Sigma w^* \cdot n \, d\sigma = 0 \text{*}$$

をみたすならば解をもつ.

---

* nはΣの法線ベクトル, $d\sigma$はΣの面素又は線素. この条件は, 境界のどこかからはいって来た流体は必ず境界のどこかへ吸込まれるべきことを表わす. $\nabla \cdot w = 0$から当然である.

Rが小さければ内部問題の解は一意である

［定理］（2次元，3次元）（Finn［3］，p. 242）

上の境界値問題の解は，w^* および w^* の Σ 内での2階偏微係数の値が十分小さければ一意である．

Rが大きいときのことは不明である．

§4. 外部問題

流体が有界な境界 Σ の外側の無限領域にある場合を外部問題とよぶことにしよう（図4.1）．Σ は十分なめらかであると仮定する．

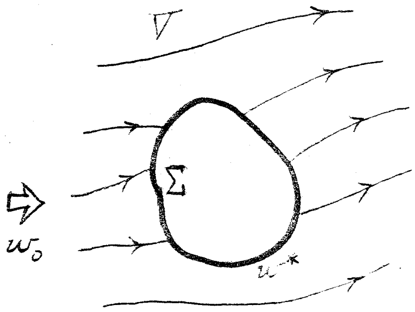


図4.1

外部問題で流体力学的に最も興味のあるのは，物体をすぎる一様流の問題である．そこで，以下では境界条件として次のものを考える：

$$
\begin{cases}
w(\Sigma) = w^* & \text{（与えられた十分なめらかな関数）} \\
w(\infty) = w_0 & \text{（与えられた定ベクトル）}
\end{cases}
$$

まず，2次元でも3次元でも成立つ重要な定理をのべよう．

定常流をつくるには無限大のエネルギーがいる

［定理］（2次元，3次元）（Wolibner［11］，Finn［2］）

次の境界値問題

$$\begin{cases} NS[w] = 0, \\ w(\Sigma) = 0, \\ w(\infty) = w_0 \ (\neq 0) \end{cases}$$

をみたす w に対しては

$$T \equiv \frac{1}{2}\int_V |w - w_0|^2 dx = \infty.$$

Tは，遠方で流体が静止しているような座標系で見たときの，流体の全運動エネルギーである．流体中に静止していた物体が動き出して一定速度に達し，流れが最終状態に落着いたとすると，それまでに流体には無限大のエネルギーがつぎこまれるべきであることをこの定理はのべている．

この結果は，ポテンシャル流の場合といちじるしく異なる．すなわち，遠方で渦なしであるような流れでは

$$|w - w_0| = \begin{cases} O\left(\frac{1}{r^2}\right) & (2\text{次元}), \\ O\left(\frac{1}{r^3}\right) & (3\text{次元}) \end{cases}$$

であるから，Tは有限である．

粘性がいくら小さくても0でない限りは，上の定理によって$T = \infty$である．したがって，$R \to \infty$ $(\nu \to 0)$ の極限において，NS方程式の解の表わす流れが遠方で渦なしの流れ

に近づくことはありえない．それゆえ，Batchelor [1] が言ったような，物体背後に有限のひろがりをもつ渦を伴いその外では渦なしであるような流れ（図4.2）は，完全流体（$R=\infty$）の方程式の解ではありえても，NS方程式の解の $R\to\infty$ の極限とは考えられない．

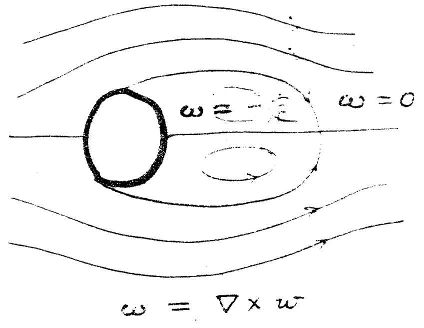


図 4.2

エネルギー散逸の有限な解

［定義］（2次元，3次元）

Dirichlet 積分が有限な解，すなわち

$$\begin{cases} NS[w] = 0, \\ \int_V |\nabla w|^2 dx < \infty \end{cases}$$

をみたす w の集合を $\mathcal{D}_2$（2次元）又は $\mathcal{D}_3$（3次元）と名づける．

このような解については，次の定理が証明されている．

［定理］（2次元，3次元）（Leray [8]）

w^* が次の条件

$$\int_\Sigma w^* \cdot n \, d\sigma = 0$$

をみたすならば,

$$\begin{cases} w \in D_2 \quad 又は \quad D_3, \\ w(\Sigma) = w^* \end{cases}$$

をみたす w が少くとも一つは存在する.

さて, 無限遠点が含まれるため, 外部問題は内部問題より複雑である. また, その中でも 2次元の問題は, 3次元の問題に比べてはるかにむずかしく, 3次元の場合ほど多くのことはわかっていない.

はじめに, 3次元問題について えられている 主な結果をのべよう.

<u>遠方で一様流になる D_3 の解は存在する</u>

[定理] (3次元) (Finn [3], p. 228)

$\int_\Sigma w^* \cdot n \, d\sigma$ が十分小さければ,

$$\begin{cases} w \in D_3, \\ w(\Sigma) = w^*, \\ w(\infty) = w_0 \end{cases}$$

をみたす w が少くとも一つは存在する.

<u>上の解の一意性は不明である</u>

これについては, 次の定理があるだけである.

[定理]（3次元）（Finn [3], p 237）

w^*とw_0が共に小さければ，この境界値に対するD_3の解はたがいに（一様に）近い．

物理的によさそうな解

流体力学で問題となる物体をすぎる一様流とは，次のようなものである．

[定義]（3次元）

ある正の定数 C, ε, およびある定ベクトル $w_0 (\neq 0)$ が存在して，

$$\begin{cases} NS[w] = 0, \\ |w - w_0| < \dfrac{C}{r^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} \end{cases}$$

であるような w の集合を PR_3 と名づける．

PR_3 の解はたしかに Physically Reasonable である

上のように定義された解は，遠方で Oseen 方程式*の基本解と同じ振舞をすることが示される．

---

* ここでいう Oseen 方程式とは，方程式系 (2.3), (2.4) の中の非線型項における w を定ベクトル w_0 でおきかえた方程式系のことである．

[定理] (3次元) (Finn [4], §5)

$w \in PR_3$ ならば

$$|w - w_0| = \begin{cases} O(1/r^{1+2\sigma}), & |\theta| = A/r^{\frac{1}{2}-\sigma},\ 0 \le \sigma \le \frac{1}{2}, \\ O(1/r^2), & |\theta| = \text{定数} \neq 0. \end{cases}$$

すなわち，この解が表わす流れでは，物体のうしろに後流が放物面状に広がっている．つまり上式で $\sigma = 0$ とおけば，$|\theta| = A/r^{\frac{1}{2}}$（回転放物面）の上で $|w - w_0| = O(1/r)$ がえられる．この曲面に沿って遠方へいくときに w が w_0 に近づいていくはやさは，放射線 $|\theta| = \text{定数} \neq 0$ に沿って遠ざかるときの近づき方 $O(1/r^2)$ に比べておそい．

PR_3 の定義では，w が解であることのほかに単に $|w - w_0| < C/r^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ を要請しただけであったが，結局は定理でいうような評価がえられたことは注目すべきである．

<u>エネルギー散逸の有限な解は，物理的によさそうな解のすべてなのか？</u>

[定理] (3次元) (Finn [3], p. 229)

次の条件

$$\begin{cases} \int |\nabla w|^2 dx < \infty, \\ w(\infty) = w_0 \end{cases}$$

をみたす w を考える．この関数 w については，原点を通るほとんどすべての直線に沿って遠方へいくとき

$$|w - w_0| < \frac{C}{r^{\frac{1}{2}}}$$

が成立つような正の定数 C が存在する．

この定理で注意すべきことは，w が NS 方程式の解である必要がないということである．それならば，w が解であるという条件 $NS[w] = 0$ を課したら（つまり $w \in \mathcal{D}_3$ としたら），上の不等式の右辺が $C/r^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ （$\varepsilon > 0$）とはならないだろうか．しかし，そのようなことはまだ示されていない．つまり，$\mathcal{D}_3$ に属する解が後流を伴う流れを表わす PR_3 の解であるかどうかは不明である．

PR_3 の解は R が小さければ存在する

［定理］（3次元）（Finn [4], §4）

w_0 が十分小さければ

$$\begin{cases} w \in PR_3, \\ w(\Sigma) = 0, \\ w(\infty) = w_0 \end{cases}$$

をみたす w が少くとも一つは存在する．

PR_3 の解は R が小さければ一意である

[定理] (3次元) (Finn [4], §4)

w_0 が十分小さければ，前の定理の解は一意である．

次に2次元の場合に移ろう．

エネルギー散逸の有限な解は一意でない

エネルギーの散逸が有限であるというだけでは，同一の境界値に対して解が無数に存在する場合がある．その具体例については§5の最初にのべる．

物理的によさそうな解

[定義] (2次元)

ある正の定数 C, ε およびある定ベクトル $w_0 (\neq 0)$ が存在して，

$$\begin{cases} NS[w] = 0, \\ |w - w_0| < C / r^{\frac{1}{4}+\varepsilon} \end{cases}$$

であるような w の集合を PR_2 と名づける．

3次元の場合と同様，この解は Oseen 方程式の解と遠方で同様の振舞を示し，それが表わす流れは物体のうしろに放物線状に広がる後流をもつ．すなわち，次の定理が成立つ．

[定理] (2次元) (Smith [9], §4)

$w \in PR_2$ ならば

$$|w-w_0| = \begin{cases} O(1/r^{\frac{1}{2}+\sigma}), & |\theta| = A/r^{\frac{1}{2}-\sigma}, \quad 0 \leq \sigma \leq \frac{1}{2} \\ O(1/r), & |\theta| = \text{定数} \neq 0. \end{cases}$$

PR_2 の解は R が小さければ存在する

［定理］（2次元）（Finn & Smith ［6］）

w_0 が十分小さければ

$$\begin{cases} w \in PR_2, \\ w(\Sigma) = 0, \\ w(\infty) = w_0 \end{cases}$$

をみたす w が少くとも一つは存在する．

PR_2 の解の一意性は不明である

ある種の解についての一意性は示されている（Finn & Smith ［6］）が，PR_2 に属する解についてはまだはっきりしたことは何も証明されていない．

要約

以上をまとめて表にすれば次のようなことになる．ただし，境界条件は $w(\Sigma) = 0$，$w(\infty) = w_0$ とする．また，《存在》の欄の○印は，《その左に書かれた条件をみたす任意の w_0 に対して存在する》という意味である．

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">内部問題</td><td colspan="3">外部問題</td></tr>
<tr><td>次元</td><td>2</td><td>3</td><td></td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">存在</td><td colspan="2" rowspan="2">○</td><td>D</td><td></td><td>○</td></tr>
<tr><td>PR</td><td>R小 ○</td><td>R小 ○</td></tr>
<tr><td rowspan="2">一意性</td><td colspan="2" rowspan="2">R小 ○</td><td>D</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>PR</td><td></td><td>R小 ○</td></tr>
</table>

Σ の上の境界条件を $w(\Sigma) = w^* \neq 0$ とした場合でも, $w^* - w_0$ と $\int_\Sigma w^* \cdot n \, d\sigma$ に対して適当な条件を付加すればほとんど同様の結果が成立つ. この場合には外部問題2次元 D の一意性が破れる (§5, 最初の例).

§5. 一意でない解

円柱に吸込まれる流れ

前節で注意したように, 2次元の外部問題では,

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l} NS[w] = 0, \\ \int_V |\nabla w|^2 dx < \infty, \end{array}\right\} \text{すなわち } w \in D_2 \\
w(\Sigma) = w^*, \\
w(\infty) = w_0
\end{array}
\right.
$$

をみたすような w が一意にきまらない場合がある.

Ladyzhenskaya [7, p.xi] は次のような解を見出した:

$$
\begin{cases}
u_r = -\dfrac{a}{r}, \\[2ex]
u_\theta = b\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r^{aR-1}}\right), \\[2ex]
p = -\dfrac{a^2+b^2}{2}\dfrac{1}{r^2} + \dfrac{2b^2}{aR}\dfrac{1}{r^{aR}} - \dfrac{b^2}{2(aR-1)} r^{2(aR-1)}.
\end{cases}
$$

ただし, u_r と u_θ は w の極座標成分, a と b は任意の定数である.

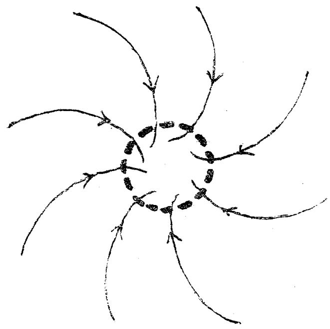


図 5.1

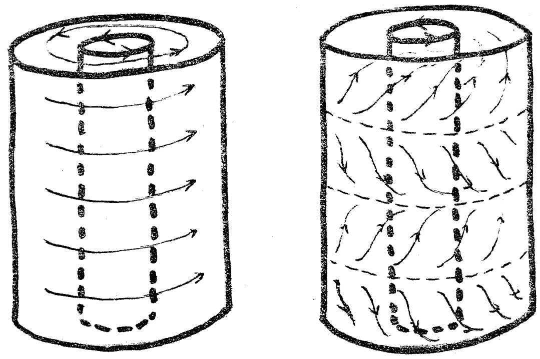
まず, 上の u_r, u_θ, p は方程式 $NS[w]=0$ をみたす. 次に, $aR-1>\delta>0$, すなわち $aR>1+\delta$ となるように a を選べば $\int_V |\nabla w|^2 dx < \infty$ となる. このときには $w(\infty)=w_0=(0,0)$ である. さらに, 境界 Σ として円周 $r=1$ をとれば, $(u_r)_{r=1}=-a$, $(u_\theta)_{r=1}=0$ だから $w(\Sigma)=w^*=(-a,0)$. この解は図5.1のような流れを表わす.

ところが, 定数 b は境界条件の中に現われていない. したがって, 境界値 $w^*=(-a,0)$, $w_0=(0,0)$, $a>\frac{1}{R}(1+\delta)$,

に対して，D_2 に属する解が無数に存在することになる．

同心円筒内の流れ（Taylorの問題）

無限に長い同心円筒の間に流体があるとし，内側の円筒を一定の速さで回転させる．このとき，図5.2(a)のように，流体が円筒に引きずられてまわるという2次元的な流れがNS方程式の解になることは容易にわかる．ところが円筒の回転をはやくすると，上の解のほかに，図5.2(b)のように流体が等しい厚さの層に分れてらせん状の3次元的な運動をする解も可能となる（Velte [10]）．これは§3,4で考えた問題の中にははいらないけれども，解の一意性が破れるいちじるしい例である．この問題は，この講究録中の次の論文[桒原真二]でくわしく論ぜられるはずである．



(a)　(b)

図5.2

§6. 一つの臆測

一様流の中に物体をおいたときどういう流れが生ずるかは，流体力学における最も基本的な問題の一つである．§4でのべたように，このような流れの解の存在と一意性

については，これまでのところ Reynolds 数 R が十分小さい場合についてしか明らかにされていない．これらの数学的に確実となった事柄は，幸にして（あるいは不幸にして）流体力学の常識ではすでにほとんど自明であったことばかりである．そこで，想像をたくましくして §4 の表のあいている所をうめてみたのが次の表である．

PR に属する解

境界条件： $w(\Sigma)=0$ ， $w(\infty)=w_0$

		2次元			3次元	
存在	R小	A ◎			B ◎	
存在	R大	○			○	
一意性		PR_2の中で	3次元定常流まで含めた中で	非定常流まで含めた中で	PR_3の中で	非定常流まで含めた中で
一意性	R小	C ○	D ○	E ○	F ◎	G ○
一意性	R大	○	×	×	○	×

ここで，◎（存在する，又は一意である）はすでに証明ずみのこと，○（存在する，又は一意である）および ×（一意でない）は推測である．

まず解の存在については，次元を問わずRの任意の値に対して解は存在すると考える（欄 A, B）．また，一意性についても同様と考える（C, F）　つまり，§4で扱った問題に関してはあらゆる場合に解PRは一意に存在するというのが筆者の推測である．

ところで，当然のことながら，どういう範囲の解の中で考えるかによって一意性はかわってくる．例えば，ある境界条件のもとでおこる2次元の流れ（$\in PR_2$）は，PR_2の中では唯一であっても（C），比較の対象を3次元的な流れにまでひろげれば，同じ境界条件をみたす別の流れがRの大きいときには存在しうるであろう（D）．内部問題ではこういうことがたしかに起っていると考えられる．すなわち，§5でのべた同心円筒内の流れは，2次元の問題としては恐らく一意であろうが，3次元的な流れまで考えれば一意でなかった．

また次元によらず，対象とする流れの範囲を同一の（定常）境界条件のもとでおこる非定常流にまでひろげれば，やはりRが大きいときに一意性が破れるのではないだろうか（E, G）．Rが大きいと，図6.1(a)のような定常流のほかに同図(b)の

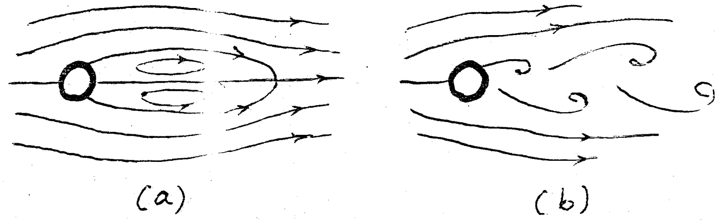
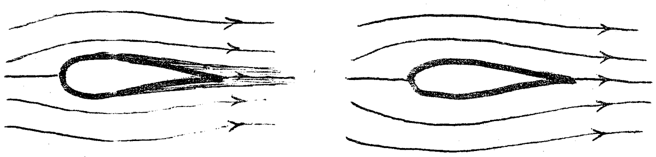


図6.1

ような非定常流も可能である.(Rが大きいときには,現実にはむしろ非定常流の方が観測にかかる.しかし定常解も存在しそうなことは,数値解の多くの例から十分予想できる.)

以上の臆測の中で A, B, D, E, G はこれ以上説明を要しないであろう.これに対して.C と F の《Rが大きくても解は一意である》というところは問題である.

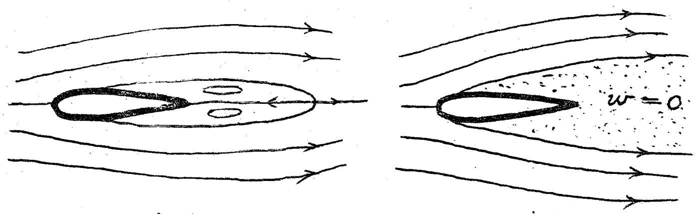
いま,いわゆる流線形の物体をすぎる流れで,Rを大きくしていったときのことを考えよう.ごく素朴に考えると,大きなRに対しては,流れは図 6.2 (a) のように,物体の前縁から発達した境界層(流速と垂直な方向に速度・圧力が急激に変化している薄い領域)が物体後縁のあたりで流れの中に押出されていくようなもので,$R\to\infty$ の極限では同図 (b) のようなポテンシャル流に連続的に移行するように思われる.しかしこれは,§4 の最初の定理のあとにのべた(p.6)《$R\to\infty$ の極限は決してポテンシャル流にならない》ということと矛盾しないだろうか.一見それはそうである.というのは,運動エネルギー $T\equiv\frac{1}{2}\int_{V}|w-w_0|^2dx$ が ∞ になるというこの定理では,境界 Σ の形が十分なめ



(a)　　　(b)

図 6.2

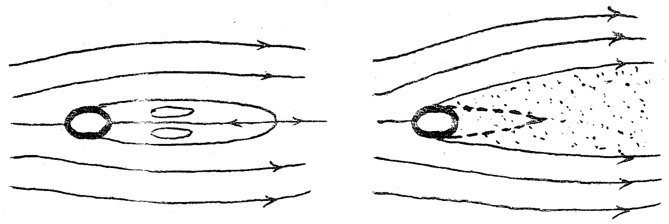
らかであることが仮定されていたからである．しかし，とがった後縁の先端近くを少しでも丸めた物体については $T=\infty$ である．それならばもとの流線形物体についてもやはり $T=\infty$ ではないのか．そうすると，図6.2のような流れはすこし疑わしくなる．それでは，Rが大きいときには，たとえ流線形でも図6.3(a)のように



(a)　(b)

図6.3

なり，$R\to\infty$ の極限では(b)のような死水を伴ういわゆるKirchhoff流に移行するのであろうか．前縁付近では同じ形で後部をすっかりけずりとってしまったような物体のまわりにはおそらく図6.4のような流れがおこるであろうから，それにしっぽをつけた流線形の



(a)　(b)

図6.4

場合にも同様な流れになっても別に不思議はない．しかしそれでは現実に見られる図6.2のような流れは一体何なのか．こう考えてくると，直感的には最も自然に見えた図6.2の流れは非定常流なのではないかという気がしてくる．

CとFの中にXをつけずにEとGの中にXと書いたのは上のように考えたためである.

さてReynold数の意味を拡張して, 空間の各軸x, y, z (2次元ではx, y) 方向の物体の長さからつくったReynolds数R_x, R_y, R_zを定義しよう. いま考えている流れではR_xとR_yは有限である. 3次元問題ではR_zも有限である. 2次元問題にはR_zは現れてこない. しかし, 2次元流を3次元流の特別な場合とみなす立場をとるときには$R_z = \infty$とすべきであろう. また, 定常流を非定常流の一員とみなすこともできる. そして, 定常流はある非定常流が$t \to \infty$の極限で到達したものであると考えて, 定常流では時間軸t方向の長さに関係した数R_tが∞であるとする. このようにR_x, R_y, R_z, R_tを定義し, 前表の一意性の欄C, D, E, F, Gをこれら《Reynolds数》によって分類すると次のような表ができる. これと前の表と

	2次元				3次元	
R_x, R_y	C 有限	D 有限	E 有限		F 有限	G 有限
R_z	—	∞	—	∞	有限	有限
R_t	—	—	∞		—	∞

を比べると，∞ がある欄と X がある欄とが一致している．もし前の臆測が正しいとすると，この点でも形式的に大変すっきりするのだがどうだろうか．

以上，かなり乱暴な臆測をこころみた．その真偽については，読者およびこの講究録中の他の論文［今井功］でいろいろな角度から議論して頂けることを期待する．

文　献

1) Batchelor, G. K.: A proposal concerning laminar wakes behind bluff bodies at large Reynolds number, J. Fluid Mech. 1 (1956) 388-98.

2) Finn, R.: An energy theorem for viscous fluid motions, Arch. Rational Mech. Anal. 6 (1960) 371-81.

3) Finn, R.: On the steady-state solutions of the Navier-Stokes equations, III, Acta Math. 105 (1961) 197-244.

4) Finn, R.: On the exterior stationary problem for the Navier-Stokes equations, and associated perturbation problems, Arch. Rational Mech. Anal. 19 (1965) 363-406.

5) Finn, R.: Stationary solutions of the Navier-Stokes equations, Proc. Symp. Appl. Math. vol. XVII (Amer. Math. Soc., 1965) 121-53.

6) Finn, R. & D. R. Smith: On the stationary solutions of the Navier-Stokes equations in two dimensions, Arch. Rational Mech. Anal. 25 (1967) 26-39.

7) Ladyzhenskaya, O. A.: The mathematical theory of viscous incompressible flow (Gordon & Breach, 1963).

8) Leray, J.: Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique, J. Math. Pure Appl. 9 (1933) 1-82; Les problèmes non linéaires, Enseignement Math. 35 (1936) 139-51.

9) Smith, D. R.: Estimates at infinity for stationary solutions of the Navier-Stokes equations in two dimensions, Arch. Rational Mech. Anal. 20 (1965) 341-72.

10) Velte, W.: Stabilität und Verzweigung stationärer Lösungen der Navier-Stokesschen Gleichungen beim Taylorproblem, Arch. Rational Mech. Anal. 22 (1966) 1-14.

11) Wolibner, W.: Sur le mouvement plan du liquide visqueux, incompressible, entourant une courbe simple fermée, Studia Math. 12 (1951) 279-85.

これらの文献は本文で直接引用したものだけであって、決して網羅的なものではない。この中で F... による解説 5) は、これまでの研究の経過を概観するのに大変役立つ。それには文献も豊富に挙げてある。

---

§6 は今井功先生の suggestion に負うところが多い。もっとも、そこでの推測が誤っていたらそれは筆者の責任である。

(1967. 8. 31)