数理解析研究所講究録
第52巻 1968年 91-103

Navier Stokes 方程式の円柱外部問題の数値計算に関する一方法（特に大 Reynolds 数）

東大 生研 金子幸臣

この問題は、主な近づき方が２つあって，１つは非定常流の時間→∞ での極限を外挿する方法，もう一つは定常の方程式を直接考えるものである。空間座標の適当なものを選んで，その整数の点を格子点とよび，その間隔が，例えば円柱の半径に比較して，十分小さいとき，取扱う函数の滑らかさから，それらの格子点上での値によって，十分正確に代表されているものとして，差分方程式を導びき，計算というのは実はその差分方程式の解を求めることになる。これまで，Reynolds 数が大きくなると，急速に計算量が増加して，例えば直径に対する Reynolds 数が100 位になると，労多くして，むくいがそれに見合わない感があった。しかし，それらの方法では，主流（一様流）が大きいために，渦度 ω に関する方程式の（流れの函数 ψ を固定，境界値も固定）差分方程式も極端な under relaxation でないと numerical instability を

惹おこすものであった。これは別に非線型性によるものではなく，実際，適当な格子をとると，over relaxation すら許されることが分る。本稿では そのような格子の例をあげることを目的としている。勿論，非線型性に関する安定性はやってないので，完全なものでありません。

1） 格子のとり方として，次のようなものを考える。

i） 各格子点の重要性はなるべく同等になること。

ii） 計算が簡単になるように，直交（曲線）格子とする。

iii） 境界（円柱表面）は1つの座標曲線上に乗ること。

iv） 遠方で一方の座標の座標曲線は流線とほぼ一致する。

i），ii），iii）は直接，計算の能率を上げるためであるが，iv）は stability に関連して，iteration の回数そのものを，倹約するためである。

2）

デカルト座標：（x，y）

対応する速度：（u，v）

領域の形 ： $r=\sqrt{x^2+y^2}\geq 1$

対称条件 ： $y=0$ で $v=0$

境界条件 ： $r=1$ で $(u, v)=0$

$r\to\infty$ で $(u, v)\to(1, 0)$

運動方程式 ： $\begin{cases} \Delta\psi = -\omega \\ \Delta\omega = -\dfrac{1}{\nu}\dfrac{\partial(\psi,\omega)}{\partial(x,y)} \end{cases}$

但し ψ ： $u=\dfrac{\partial\psi}{\partial y}$, $v=-\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$ は流れの函数

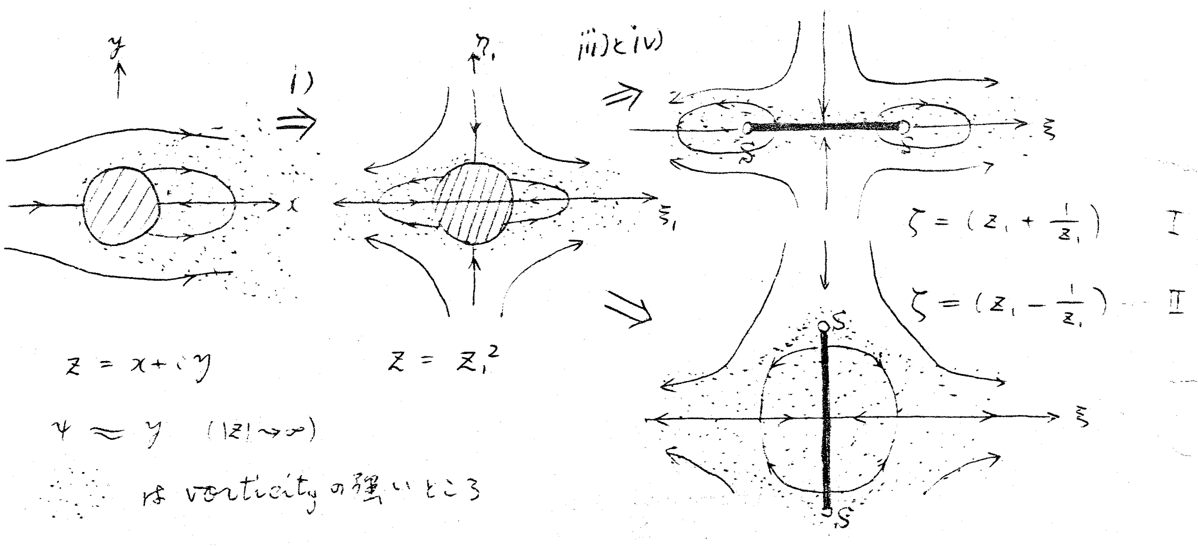
ω ： $\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}$ は渦度

ii) の性質を考えて, 等角写像 $z=z(\zeta)$ で $z=x+iy$ から $\zeta=\xi+i\eta$ に移ると 微分方程式は

$$\Delta\psi = -\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|^2\omega \qquad 但し\ \Delta=\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$$

$$\Delta\omega = -\frac{1}{\nu}\frac{\partial(\psi,\omega)}{\partial(\xi,\eta)}$$

i) に関しては $r\to\infty$ での漸近形(今井先生の論文)を考慮し, iii), iv) をもつものとしては



$z=x+iy$ $\quad z=z_1^2$

$\psi\approx y\ (|z|\to\infty)$

は vorticity の強いところ

などがよさそうである。

座標変換Ⅰでの singular point S は ω の値がⅡでのそれにくらべて小さい（Re が大きいとき）ので，その近くでの近似が悪くても重大ではない。その代り，興味のある領域が多少局在してしまうきらいがある。Ⅱでは S の近くでの ω は他の点での ω（それは大部分下流にある）の影響が少ないので，適当な処理をすれば良い精度が得られるであろう。

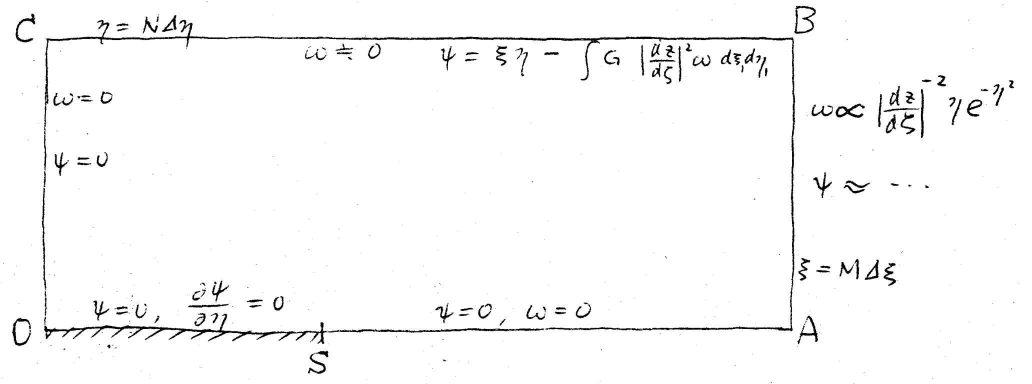
差分方程式も普通に使われるもの：

$$\frac{\partial\psi}{\partial\xi} \Rightarrow \frac{\left(\psi(\xi+\Delta\xi)-\psi(\xi-\Delta\xi)\right)}{2\Delta\xi}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} \Rightarrow \frac{\psi(\xi+\Delta\xi)-2\psi(\xi)+\psi(\xi-\Delta\xi)}{\Delta\xi^2}$$

などの置き換えを微分方程式に行なったものを使う。

relaxation を行う領域は $0\leqq\eta\leqq N\Delta\eta$, $0\leqq\xi\leqq M\Delta\xi$ の $(N+1)\times(M+1)$ 個の格子点の上である。



境界条件　$\overline{OC}$上と$\overline{OSA}$上は問題ない。$\overline{CB}$上での

$\omega \fallingdotseq 0$ も　十分よい近似を与えるであろう。

$$\psi = \xi\eta - \int G \left|\frac{dz}{d\zeta}\right|^2 \omega \, d\xi_0 d\eta_0 \quad \text{の} \quad G \propto c\log\left\{\frac{|\zeta-\zeta_1||\zeta-\zeta_3|}{|\zeta-\zeta_2||\zeta-\zeta_4|}\right\}$$

$$\zeta_1 = \xi_0 + i\eta_0, \quad \zeta_3 = -\xi_0 - i\eta_0$$

$$\zeta_2 = \xi_0 - i\eta_0, \quad \zeta_4 = -\xi_0 + i\eta_0 \qquad = \log\frac{|\zeta^2-\zeta_1^2|}{|\zeta^2-\zeta_2^2|}$$

は　$\xi \geqq 0$, $\eta \geqq 0$, に対する　Δ (Laplacian) の Green 函数

ここに現われた積分は　$\overline{CB}$上で $\omega \fallingdotseq 0$ であるので数値積分も容易である。

$\overline{AB}$上では　G が singular であるので，あまり積分は易しくない。従って次の方法による。しかし，あくまでも便宜上であって，精密な計算には向いていない。

先ず，幸い，$\omega \approx \left|\frac{dz}{d\zeta}\right|^{-2} \eta e^{-\eta^2}$ であるので，

$$\Delta\psi = -\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|^2 \omega \approx \eta e^{-\eta^2} \quad \text{indep of } \xi$$

$$\Delta(\psi - c\,\mathrm{erf}(\eta)) \approx 0$$

$$\text{即ち} \quad \psi \approx -\int_0^\eta\int_0^\eta \left|\frac{dz}{d\zeta}\right|^2 \omega \, d\eta d\eta + \text{harmonic f.}$$

境界条件から

$$\approx \xi\eta - c\,\mathrm{Im}\log\zeta - \int_0^\eta\int_0^\eta \left|\frac{dz}{d\zeta}\right|^2 \omega \, d\eta d\eta + \cdots$$

$$\approx \left(\xi - \frac{c}{\xi}\right)\eta - \int_0^\eta\int_0^\eta \left|\frac{dz}{d\zeta}\right|^2 \omega \, d\eta d\eta + \cdots$$

c は　$\xi = 0$ 上で　$\psi = 0$ になるように選ぶ定数

これは　$\xi \gg \eta$ と考えると，$\eta = N\Delta\eta$ 上で　積分で与えられた ψ に連続につながるように　$\psi = (\xi - c)\eta - \int_0^\eta\int_0^\eta \, d\eta d\eta$

をとれば大体正しい。ωについては、ψが与えられたとき、微分方程式は、流れの中の拡散をあらわし、$\overline{AB}$上でのωの値は上流に向っての拡散の形で他に影響するので、単に

あまり大きくさえならなければ、他の点でのωに大きな影響を与えない。一方差分方程式の方は格子間隔が大きいので、いくら流れが速くても、十数格子までは無視できない影響が逆のぼって行く。従って少し注意が要るが、実はそれは振動性のものであって、(註)もし差分方程式の解が$\overline{CB}$上でξ方向に滑らかであれば、微分方程式の良い近似になっているはずで、従って上流に逆のぼる悪い影響は小さいものとなっている。即ち滑らかな解を与えるような境界条件を付す。

$\xi \to \infty$の漸近形の形から

$$|\zeta^2|\,\omega(\xi-\Delta\xi) = |\zeta^2|\,\omega(\xi)$$

を用いるのが良さそうである。

以上、安定性を特に良くする事なしに、大体の近似的境界条件の計算手順をきめた。これを使って、計算が安定に進めば、より精密な境界条件の下に計算を進める可能性がでるだろうというわけである。勿論、それが保障されたことになるのではない。　(註)その点での格子間隔と速度のReynolds数$\gg 2$

安定な relaxation の順序

ψ : fixed とする。

安定性に本質的なのは，さきの一様流であると考えて，

$$\psi \sim \xi\eta = (k\Delta\xi)(l\Delta\eta) \quad , \quad k, l = 0, 1, 2, \cdots$$

の場合を調べてみる。

$\frac{1}{\nu} = \frac{Re}{2}$　　ν : 動粘性率，　Re : Reynolds数　とおくと，

差分方程式は

$$\frac{{}_\cdot\omega - 2\omega + \omega_\cdot}{(\Delta\xi)^2} - \frac{R}{2}\cdot\frac{\cancel{2\Delta\eta}\,k\Delta\xi}{\cancel{2\Delta\eta}}\frac{(\omega_\cdot - {}_\cdot\omega)}{2\Delta\xi} + \frac{\dot\omega - 2\omega + \underset{\cdot}{\omega}}{(\Delta\eta)^2} + \frac{R}{2}\frac{2\Delta\xi\, l\Delta\eta}{2\Delta\xi}\frac{\dot\omega - \underset{\cdot}{\omega}}{2\Delta\eta} = 0$$

即ち

$$\frac{{}_\cdot\omega - 2\omega + \omega_\cdot}{A^2} - k(\omega_\cdot - {}_\cdot\omega) + \frac{\dot\omega - 2\omega + \underset{\cdot}{\omega}}{B^2} + l(\dot\omega - \underset{\cdot}{\omega}) = 0$$

となる　ここに　$\omega(\xi+\Delta\xi, \eta) = \omega_\cdot$　　$\omega(\xi, \eta+\Delta\eta) = \dot\omega$

$\omega(\xi-\Delta\xi, \eta) = {}_\cdot\omega$　　$\omega(\xi, \eta-\Delta\eta) = \underset{\cdot}{\omega}$

は実際の格子点の位置関係に合わせた記号である。また

$$A^2 = \frac{R(\Delta\xi)^2}{4}, \qquad B^2 = \frac{R(\Delta\eta)^2}{4}$$ である。

relaxation は一定の η について

$$\frac{{}_\cdot\omega - 2\omega^* + \omega_\cdot}{A^2} - k(\omega^*_\cdot - {}_\cdot\omega^*) + \frac{\dot\omega - 2\omega^* + \underset{\cdot}{\omega}}{B^2} + l(\dot\omega - \underset{\cdot}{\omega}) = 0$$

を解く。　次に over relaxation const. α を使って

新しい　$\omega = \omega_{old} + \alpha(\omega^* - \omega_{old})$　とする。

次に　$\eta \to \eta + \Delta\eta$　について同じことを繰り返す。

このとき，その収束率を λ とすると，一回終ると

$$\dot{\omega} \longrightarrow \dot{\omega}$$

$$\underset{\cdot}{\omega} \longrightarrow \lambda\, \underset{\cdot}{\omega}$$

$$\omega \rightarrow \omega^* = \left(\frac{\lambda}{\alpha} - \frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\omega \equiv c\sqrt{\lambda}\,\omega$$

$${}^{\cdot}\omega,\ \omega_{\cdot} \rightarrow {}^{\cdot}\omega^* = (\qquad 〃 \qquad)({}^{\cdot}\omega) \equiv c\sqrt{\lambda}({}^{\cdot}\omega) \ \cdots$$

（但し $c = \frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha} - \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ ）であるから

$$c\sqrt{\lambda}\left[\frac{{}^{\cdot}\omega - 2\omega + \omega_{\cdot}}{A^2} - k(\omega_{\cdot} - {}^{\cdot}\omega)\right] + \frac{\dot{\omega} - 2c\sqrt{\lambda}\,\omega + \lambda\underset{\cdot}{\omega}}{B^2} + l(\dot{\omega} - \lambda\underset{\cdot}{\omega}) = 0$$

$\lambda^{-\frac{l}{2}}\omega$ をあらためて ω と書くと、

$$c\left[\frac{{}^{\cdot}\omega - 2\omega + \omega_{\cdot}}{A^2} - k(\omega_{\cdot} - {}^{\cdot}\omega)\right] + \frac{\dot{\omega} - 2\omega + \underset{\cdot}{\omega}}{B^2} + l(\dot{\omega} - \underset{\cdot}{\omega}) + \frac{2(1-c)}{B^2}\,\omega = 0$$

即ち変数分離しており

固有値問題（一次元の）

(1) $k=0,\ \omega=0$, $\quad k=\bar{k}:\ \omega=0$

$$\frac{{}^{\cdot}\omega - 2\omega + \omega_{\cdot}}{A^2} - k(\omega_{\cdot} - {}^{\cdot}\omega) - K\omega = 0$$

(2) $l=0:\ \omega=0$, $\quad l=\bar{l}:\ \omega=0$

$$\frac{\dot{\omega} - 2\omega + \underset{\cdot}{\omega}}{B^2} + l(\dot{\omega} - \underset{\cdot}{\omega}) - \Lambda\omega = 0$$

これから λ は

$$\begin{cases} c = \dfrac{\sqrt{\lambda}}{\alpha} + \dfrac{\alpha-1}{\alpha}\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} \\ c\left(K - \dfrac{2}{B^2}\right) + \left(\Lambda + \dfrac{2}{B^2}\right) = 0 \end{cases}$$

で与えられる。

Λについて考えよう。差分が微分をよく近似していると

すると、$\bar{l} \ll \frac{1}{B^2}$ である。これを q と書く。方程式は

$$(q+l)\dot{\omega} + (q-l)\underset{\circ}{\omega} = (\Lambda+2q)\omega$$

これを初期条件 $\omega(0)=0$, $\omega(1)=1$ で解いた解を

$\omega(l, \Lambda+2q)$とする。これは$(\Lambda+2q)$の$(l-1)$次の実係数多項式

である。$\omega(l,-x) = (-1)^{l-1}\omega(l,x)$ の対称性をもつ

$$\boxed{\begin{array}{l} \omega(l, x) = 0 \quad , l < q \text{ の根はすべて実数.} \\ \text{かつ} \quad |x| < x_0 < 2q-4 \end{array}}$$

証 ① $\omega(l+1, 2q) > 0$

$$\because \quad (q+l)(\omega(l+1)-\omega(l)) = (q-l)(\omega(l)-\omega(l-1))$$

$$\frac{\omega(l+1)-\omega(l)}{\omega(l)-\omega(l-1)} = \frac{q-l}{q+l} > 0$$

$$\omega(1)-\omega(0) = 1-0 > 0$$

$$\Rightarrow \quad \omega(l+1) - \omega(l) > 0$$

$$\omega(l+1) > \omega(l) > \cdots > \omega(0) = 0$$

② $\omega(0, x) = 0$

1) $\omega(1, x) = 1$

2) $\mathrm{sign}\,\omega(2, \pm x_0) = \pm 1$

よって実根 $|x_{21}| < x_0$ があるが $\omega(2,x)$ は一次で

あるからこれ以外にない。対称性から $x_{21} = 0$

よって

$$\left.\begin{array}{lll} \omega(2, x) < 0 & & -x_0 < x < x_{21} \\ \omega(2, x) > 0 & & x_{21} < x < x_0 \end{array}\right\} (1.2a)$$

また (1.1) から $\omega(1, x_{21}) > 0$ - (1.2b)

3) $\mathrm{sign}\, \omega(3, \pm x_0) = 1$

$$\omega(3, x_{21}) = \frac{x_{21}\,\omega(2, x_{21}) - (q-\ell)\,\omega(1, x_{21})}{(q+\ell)}$$

$$= -\left(\frac{q-\ell}{q+\ell}\right)\omega(1, x_{21}) < 0 \Leftarrow (1.2b)$$

よって $\omega(3, x)$ は $-x_0 < x_{32} < x_{21} < x_{31} < x_0$ なる2根：

x_{31}, x_{32} をもつ。 $\omega(3, x)$ は2次だから他の根はない

対称性から $x_{32} = -x_{31} < 0$

よって
$$\left.\begin{array}{ll} \omega(3, x) > 0 & -x_0 < x < x_{32} \text{ or } x_{31} < x < x_0 \\ < 0 & x_{32} < x < x_{31} \end{array}\right\} \quad (1.3a)$$

また (1, 2a) から
$$\left.\begin{array}{l} \omega(2, x_{32}) < 0 \\ \omega(2, x_{31}) > 0 \end{array}\right\} \quad (1.3b)$$

以下 $\frac{q-\ell}{q+\ell} > 0$ のかぎり 同様のことが成立って，証明が終る。

$\max x = x_0$ と もっと詳しく評価するために，

$$q(\dot{\omega} - 2\omega + \underset{\cdot}{\omega}) + \ell(\dot{\omega} - \underset{\cdot}{\omega}) = \Lambda\omega$$

これは $-\Lambda = \min$ 近くでは 緩やかに変化する $\omega(\ell)$ を与える。

従って，微分方程式で十分近似される。 $x = \frac{\ell}{\sqrt{q}}$ とすると，

$$\frac{d^2\omega}{dx^2} + 2x\frac{d\omega}{dx} - \Lambda\omega = 0, \qquad \begin{array}{l} \omega(0) = 0 \\ \omega\left(\frac{N\ell}{\sqrt{q}}\right) = 0 \end{array}$$

これの最小固有値は > 4 であることから $\Lambda_{max} = -4$

$$\min \Lambda = \min(x_0) - 2q = -\max x_0 - 2q = 4 - 4q$$

Kについて、

$$\boxed{\left(K+\frac{2}{A^2}\right)^2 \text{ はすべて実数 } \leqq \left(\frac{2}{A^2}-2\right)^2}$$

証明の　　　$\omega_0(x)\equiv 0$,　$\omega_1(x)\equiv 1$,

方程式は　（$\frac{1}{A^2}=P$,　　$K+\frac{2}{A^2}=x$　とおいた）

$$(p-k)\omega_{k+1}(x) - x\,\omega_k(x) + (p+k)\omega_{k-1}(x) = 0$$

kについて1つおきに消去すると

$$(p-k)(p-k-1)\,\omega_{k+2}(x) - (x^2+2k^2-2p^2-2p)\,\omega_k(x) + (p+k)(p+k-1)\,\omega_{k-2}(x)=0$$

$2N<P<2N+1$ の形のとき　$\Omega_k(x^2) \equiv \frac{2P-2}{x}\,\omega_{2k+2}(x)$　　(I)

$2N-1<P<2N$ の 〃　　$\Omega_k(x^2) \equiv \omega_{2k+1}(x)$　　(II)

（p キ整数と仮定する）　$\Omega_k(M)$ は M の k 次の実係数多項式

となり，そのk次の係数は正（そのようにするため(I),(II)に

わけた。）$\omega_k(2(p-1))=k$　であるから

$$\Omega_k\left((2p-2)^2\right) = \begin{cases} 2k+2 & (\mathrm{I}) \\ 2k+1 & (\mathrm{II}) \end{cases} > 0$$

また

$$\mathrm{sign}\ \Omega_k(-\infty) = (-1)^k$$

漸化方程式から　Ω_k の根 $M_{k,j}$ では　$(\Omega_k(M_{k,j})=0)$

$$\mathrm{sign}\ \Omega_{k+1}(M_{k,j}) = -\,\mathrm{sign}\ \Omega_{k-1}(M_{k,j})$$

これらから Λ のときと同様に $\Omega_k(M)$ と $\Omega_{k-1}(M)$ とは

互いに根を分離して（すべて実根）$<(2p-2)^2$

これで、ω_kはkを1つおきに性質がわかった。中間のkについては、元の方程式に立帰って、両側のω（これはΩ_kからわかる）との関係から、やはり証明される。

こうして、$\dfrac{\lambda}{\alpha} + \left(1-\dfrac{1}{\alpha}\right)\dfrac{1}{\lambda} \equiv C = \dfrac{\Lambda + \frac{2}{B^2}}{-K + \frac{2}{B^2}}$ は

$$(\mathrm{I}) \qquad C = 実数, \qquad |C| \leqq C_0 \fallingdotseq \frac{\frac{1}{B^2} - 2}{\frac{1}{B^2} + 1} < 1$$

又は

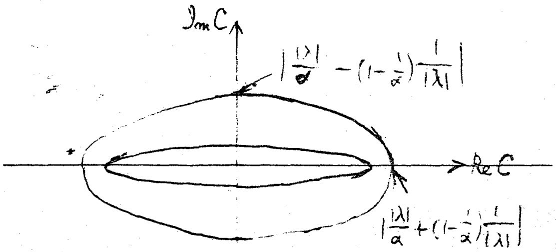
$$(\mathrm{II}) \qquad C = \frac{\Lambda + \frac{2}{B^2}}{\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} - i\chi} = \frac{g}{1 - i\xi}, \quad \xi, g : 実数$$

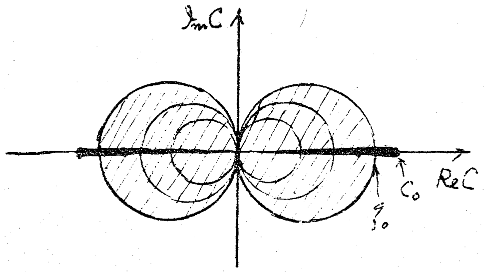
$$-\infty < \xi < +\infty, \qquad |g| \leqq g_0 \fallingdotseq \frac{\frac{1}{B^2} - 2}{\frac{1}{B^2} + \frac{1}{A^2}} < C_0$$

これから $\displaystyle\min_{\alpha<2} \max_{\Lambda, K} |\lambda|$ を調べる

以上の議論は、はじめに簡単化の都合で、近似を行っている。そのため、Cの分布はこれに似ているものであっても、全く同じものではないので、ここで、問題を幾何学的に表現して、上のCが一応本質を近似している事を納得しよう。

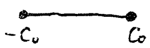
左辺 $\dfrac{\lambda}{\alpha} + \left(1-\dfrac{1}{\alpha}\right)\dfrac{1}{\lambda}$ の $|\lambda| = \mathrm{const}$ の contour はダ円で　　右辺 $\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{g}{1 - i\xi}, \ g < g_0 \\ C : 実数, \ |C| < C_0 \end{array} \right.$ とは





$|\lambda_0|<|\lambda|$ なるすべての λ について　左のダ円が右の~~⊗~~の外側に完全に出てしまう λ_0 を，α を適当に選んで，最小にするという幾何学的な意味をもつ。

与えられた α について

(I) 

に関しては
$$\lambda_0=\begin{cases}\dfrac{c_0+\sqrt{c_0^2-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}} & k\leq c_0\\[2mm] \sqrt{\dfrac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}}} & k\geq c_0\end{cases}$$

(II) 

に関しては
$$\lambda_0=\begin{cases}\rho_0\left(\dfrac{1+\sqrt{1-k^2/\rho_0^2}}{1+\sqrt{1-k^2}}\right) & k\leq\dfrac{\rho_0}{\sqrt{2}}\\[2mm] \sqrt{\dfrac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}}\cdot\dfrac{2k+\rho_0}{2k-\rho_0}} & k\geq\dfrac{\rho_0}{\sqrt{2}}\end{cases}$$

但し　$\alpha=\dfrac{2}{1+\sqrt{1-k^2}}$，　$k=\sqrt{\dfrac{4}{\alpha}\left(1-\dfrac{1}{\alpha}\right)}$

一般性を失うことなく $c_0\geqq\rho_0$ と仮定してよく

α（即ち k）を動かして λ_0 の minimum になるのは

$$k=k_0=\max\left\{\frac{\rho_0}{\sqrt{6-2\sqrt{5-\rho_0^2}}},\ \frac{c_0}{2}\left[\sqrt{1+\frac{\rho_0}{c_0}}+\sqrt{1-\frac{\rho_0}{c_0}}\right]\right\}$$

であり，そのときの λ_0 は

$$\min_{\alpha}\lambda_0=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-k_0^2}}{1+\sqrt{1-k_0^2}}\cdot\frac{2k_0+\rho_0}{2k_0-\rho_0}}=\frac{k_0}{1+\sqrt{1-k_0^2}}\sqrt{\frac{2k_0+\rho_0}{2k_0-\rho_0}}$$

また $\lambda_0<1$ なるための α に対する条件は (II) に関して

必要で　$\alpha<\dfrac{4}{2+\sqrt{1+\rho_0}-\sqrt{1-\rho_0}}$　が必要十分である。