数理解析研究所講究録
第 53 巻 1968 年 1-23

可換環のBrauer群

東京教育大・理　遠藤静男

序.　ここでは「SchemeのBrauer群」に関する後の報告の準備として，環のBrauer群について現時点までに得られている諸結果を整理して解説する。

環のBrauer群の研究は1951年の東屋[8]を起源とする。[8]では主としてHensel的局所環について考察しているがついで1960年のAuslander-Goldman [5]においてより広範囲の基礎的結果が示された。[5]は環論における種々の方向に関する問題を提起しているため多くの研究者の興味をよび，中でもGalois理論，整環の理論，多元環論等についてはこれまでにかなり深い研究がなされてきた。しかし中心課題であるBrauer群自身の研究は本文で見られるようにその後あまり進展していない。

後の報告でとり上げられるGrothendieck [20]による結果は[8]，[5]の代数幾何学への応用として重要な意味をもつも

かと思われる。基礎的面だけを見ても体の場合と異なって環の場合には不十分な Galois cohomology の代りに étale cohomology を用いることにより、多くの重要な環について Brauer 群が2次の cohomology 群であらわせることを示している点は特に重要である。

体の Brauer 群に関する基礎的結果は多くの成書に見られるのでここでは述べないことにする。これまで体の Brauer 群は数論において特に基本的な役割を果してきた。Scheme の Brauer 群の研究はもちろんこれらの結果を踏まえて進めなければならない。そこで体の場合にも数論との関係で得られた諸結果については説明を与えることにする。

なおページ数の関係から本文中では証明はすべて省略することにした。その代り各定理に文献を明示してあるので必要な場合にはそれらを参照していただきたい。末尾の文献表はこの報告の基礎になる成書，論文，および直接引用した論文にかぎって掲げてあり，完全な文献表とはいえないことを注意しておく。

本文中では環はすべて単位元をもつものとし，環上の加群はすべて単位元が恒等写像として作用するものとする。また可換環を R, S, . . . 等であらわし，必ずしも可換でない環を Λ, Γ, . . . 等であらわすことにする。環 Λ が R−多元環

であるとは R から Λ の中心への環準同型で単位元を単位元にうつすものが与えられていることを意味する。R-多元環 Λ と逆同型な R-多元環を Λ° であらわすことにする。

§1. 分離多元環, Brauer 群の定義

R-多元環 Λ でそれ自身左 $\Lambda \otimes_R \Lambda^\circ$-加群として射影的であるようなものを R 上分離的な多元環, または**分離 R-多元環**という ([5])。分離 R-多元環 Λ が R-加群として射影的なとき, Λ は有限生成 R-加群であり, 特に R が体のときには, 分離 R-多元環ということと R 上有限次元の絶対半単純多元環ということと同じである。これより分離 R-多元環を考えるときには R-加群として有限生成のものだけ考えてもそれほど一般性は失われない。

分離多元環の定義に関連してつぎの定理は重要である。

定理 1.1 ([5], [18]). R-加群として忠実かつ有限生成の R-多元環 Λ に対してつぎの条件は同値である。

(1) Λ が R 上分離的である。

(2) R の各極大イデアル $\mathfrak{m}$ について $\Lambda_{\mathfrak{m}}$ が $R_{\mathfrak{m}}$ 上分離的である。

(3) R の各極大イデアル $\mathfrak{m}$ について $\Lambda/\mathfrak{m}\Lambda$ が $R/\mathfrak{m}$ 上分離的である。

4

分離R-多元環で中心がRと一致するもの，すなわち中心的分離R-多元環を，簡単に東屋R-多元環とよぶ（[8]，[11]）．

まず東屋R-多元環の特徴づけを与える．

定理 1.2（[5]）． R-多元環Λが東屋R-多元環であるために必要十分な条件はΛがR-加群として忠実かつ有限生成射影的であり，かつ $\Lambda \otimes_R \Lambda^\circ \cong \mathrm{End}_R(\Lambda)$ となることである．

これは森田（[26]）の定理の応用として直接示される．[8]で最初に与えられた定義はこの定理の条件によるものであった．

可換環R上の有限生成射影的加群で階数1のものの同型類からなる集合は $\otimes_R$ により積を定めると群をなす．これをRのPicard群といい $\mathrm{Pic}(R)$ であらわす．またR-多元環ΛのR-自己同型群の内部自己同型群による剰余類群をSkolem-Noether群といい，$\mathrm{Sk\text{-}N}(\Lambda)$ であらわすことにする．

Skolem-Noetherの定理はつぎのように一般化されている．

定理 1.3（[5]，[29]）． Λを東屋R-多元環とするとき，ΛのR-自己準同型はすべて自己同型であり，かつ $\mathrm{Sk\text{-}N}(\Lambda) \subseteq \mathrm{Pic}(R)$ とみなされる．これより特に $\mathrm{Pic}(R) = 0$ なら，ΛのR-自己準同型はすべて内部自己同型である．

Pを忠実かつ有限生成射影的なR-加群とするとき，明らかに $\mathrm{End}_R(P)$ は東屋R-多元環である．いまこのような型のも

のとR-多元環として同型な東屋R-多元環を分解型の東屋R-多元環とよぶことにする。

二つの東屋R-多元環Λ_1, Λ_2に対して$\Lambda_1 \otimes_R \Lambda_2$はまた東屋R-多元環となるので，R上の東屋多元環の全体からなる集合は$\otimes_R$により半群となっている。いま二つの東屋R-多元環Λ_1, Λ_2に対して

$$\Lambda_1 \otimes_R \Gamma_1 \cong \Lambda_2 \otimes_R \Gamma_2$$

となるような分解型の東屋R-多元環Γ_1, Γ_2があるとき，$\Lambda_1 \sim \Lambda_2$とおくと，$\sim$は同値関係を定める。そこで同値類の集合を$Br(R)$であらわすことにする。このとき$\otimes_R$よりひき起された積に関して$Br(R)$はアーベル群となる。実際単位元は分解型のものが属する類であり，Λが属する類の逆元は(1.2)よりΛ^{o}が属する類のことがわかる。$Br(R)$を可換環RのBrauer群という（[20]の言葉でいうと，affine scheme specR の（étale site の）Brauer群ということである）。

Λを東屋R-多元環とするとき，任意の可換R-多元環Sに対して$S \otimes_R \Lambda$は東屋S-多元環になる。これより群準同型$Br(R) \longrightarrow Br(S)$がひき起される。そこでこの核を$Br(S/R)$で表わすことにする。東屋R-多元環$\Lambda$に対して$S \otimes_R \Lambda$がS上で分解型となるような可換R-多元環Sを$\Lambda$の分解環といい

特にSがR上忠実のとき，固有分解環ということにする。このとき $Br(S/R)$ はSを分解環としてもつような東屋R-多元環の類全体からなる $Br(R)$ の部分群ということができる。

§2. 可換環の分離拡大，Galois拡大，分離閉被

可換R-多元環SがR-加群として忠実かつ有限生成射影的であり R上分離的であるとき，SをRの分離拡大ということにする。またSを可換R-多元環，GをSのR-自己同型からなる有限群とするとき，つぎの条件がみたされているなら，SをGalois群GをもつRのGalois拡大という([5], [14], [19])。

i) SはRの分離拡大である。

ii) $R = S^G$

iii) 相異なる二つのGの元 σ, τ，およびSの0でない巾等元eに対して $\sigma(s)e \neq \tau(s)e$ となるようなSの元sがある。

この定義の下に可換環についても体の場合とほとんど同様の形のGalois理論が構成されている([14])。しかしここではこれ以上深く立ち入らないことにする。

定理 2.1 ([5], [24], [33]). SがRの分離拡大なら，SはRのあるGalois拡大 $\tilde{S}$ に含まれる。ここでSが連結なら $\tilde{S}$ も連結にとれる。

つぎに分離閉被の概念を拡張しよう。

定理 2.2 ([24]). 連結な可換環 R に対してつぎの二つの性質をもつような連結な可換 R-忠実多元環 R_s が存在する。

i) 有限個の元 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t \in R_s$ に対してそれらをすべて含む R の分離拡大 S で R_s の部分環となるものがある。

ii) R_s の分離拡大で連結なものは R_s 自身しかない。

しかもこのような R_s は R-同型なものを同一視するとき ただ一つしかない。

(2.2) で定まった R_s を R の分離閉被とよぶ。

§3 東屋多元環の固有分解環

東屋 R-多元環の固有分解環に関してはつぎの定理は基本的である。

定理 3.1 ([5], [15]). Λ を東屋 R-多元環とし、S を Λ の極大可換 R-部分多元環で Λ が S 上射影的であるようなものとするとき、S は Λ の分解環である。また S が R-加群として忠実かつ有限生成射影的な可換 R-多元環で、ある東屋 R-多元環 Γ の分解環となっているものとすると、Γ と同値な東屋 R-多元環 Λ で S を極大可換 R-部分多元環とするものがある。

(3.1) により東屋 R-多元環 Λ に対して R の分離拡大であるような極大可換 R-部分多元環を見出せるなら、Λ に R の分離拡大である固有分解環が存在することがわかるので、更に (2.1)

を用いて、Galois拡大であるような固有分解環の存在が確められる。

実際半局所環の場合はつぎの定理がある。

定理 3.2 ([5], [16], [18]). Rが半局所環なら、すべての東屋R-多元環は極大可換分離R-部分多元環をもっている。したがって東屋R-多元環はRの分離(Galois)拡大であるような分解環をもつ。特にRがHensel的局所環なら、分解環も局所環にとれる。

系 ([16]). Rが連結な半局所環とするとき $Br(R_s)=0$.

しかし一般の可換環については東屋R-多元環は分離拡大を分解環としてもたないことがあり、また $Br(R_s)\neq 0$ となることもある。たとえば$Q(\sqrt{5})$の整数環Rは分離的に閉じた単項イデアル環であるが $Br(R)=Z/2Z$ であり、Iに対応する東屋R-多元環はいかなる分離拡大でも分解しない([36]および後述の(7.5))。

このためGalois cohomologyではBrauer群は完全には記述できないことになり、環のBrauer群の研究は困難なものとなる。そこでGrothendieckによるétale cohomologyが重要な意味をもつことになる。(3.2)は後に$Br(R)$を2次のétale cohomology群と関係づけるときに重要な役割をすることになる。

これまで分離拡大であるような分解環の存在について考えてきたが，全く一般の可換環 R に対しては東屋 R-多元環が固有分解環をもつかどうかさえわからない。わずかに R の全商環が半局所的のとき（たとえば R が Noether 的のとき），(3.2) より R-平坦な固有分解環の存在がわかる。これを用いて一般の可換環 R 上の東屋多元環に被約トレースが定義でき，東屋 R-多元環が対称多元環であることを示せる（[18]）。なお最近 R. Hoobler は Noether 環 R が Q を含むか標数 >0 のときには東屋 R-多元環は R-加群として有限生成，忠実に平坦な固有分解環をもつことを示し，それを用いて $Br(R)$ がある種の2次の cohomology 群で表わせることを証明した。

§4. Galois cohomology と Amitsur cohomology

可換環 R の単元（正則元）全体のなす群を $U(R)$ であらわすことにする。

L/K を体の有限次 Galois 拡大とするとき，

$$H^1(G, U(L)) = 0, \quad (\text{Hilbert の定理 } 90)$$

であり，また 2-cocycle に接合積を対応させることにより，

$$H^2(G, U(L)) \cong Br(L/K)$$

となることはよく知られている。これは可換環に対してはつぎのように一般化される。

定理 4.1 ([5], [14], [37]). S を R の Galois 拡大とし、その Galois 群を G とするとき、つぎの完全系列がある。

$$0 \longrightarrow H^1(G, U(S)) \longrightarrow Pic(R) \longrightarrow H^0(G, Pic(S))$$

$$\longrightarrow H^2(G, U(S)) \longrightarrow Br(S/R) \longrightarrow H^1(G, Pic(S)) \longrightarrow H^3(G, U(S)).$$

特に R が半局所環のときには

$$H^1(G, U(S)) = 0, \quad H^2(G, U(S)) \cong Br(S/R).$$

(3.2), (4.1) より半局所環に対しては体の場合と同様に Galois cohomology は有用であることがわかる。最近神崎氏([37])は Picard 群をも考慮に入れた接合積の拡張概念として一般接合積を定義し、それによって $Br(S/R)$ を完全に記述することに成功された。

Galois cohomology はもちろん Galois 拡大のみに有効な cohomology 論であるが、一般の可換 R-多元環に関する cohomology 論としては Amitsur cohomology とよばれるものがある([2], [28])。

$\mathbb{K}$ を可換 R-多元環の圏とするとき、$\mathbb{K}$ の対象 S に対して $S^n = \overbrace{S \underset{R}{\otimes} S \underset{R}{\otimes} \cdots \underset{R}{\otimes} S}^{n}$, $n > 1$ とおき、$\mathbb{K}$ の射 $\varepsilon_i^{(n)} : S^{n+1} \longrightarrow S^{n+2}$, $i = 0, 1, \ldots, n+1$, $n \geq 0$ を $\varepsilon_i^{(n)}(s_0 \otimes s_1 \otimes \cdots \otimes s_n) = s_0 \otimes \cdots \otimes s_{i-1} \otimes 1 \otimes s_i \otimes \cdots \otimes s_n$ で定める。$\mathbb{K}$ からアーベル群の圏 $\mathbb{A}b$ への共変函手 F に対して n-cochain を $C^n(S/R, F) = F(S^{n+1})$, $n \geq 0$, n-coboundary $d^n : C^n(S/R, F) \longrightarrow$

$C^{n+1}(S/R,\ F)$ を $d^n = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k F(\varepsilon_k^{(n)})$ により定めるとき，$C(S/R,\ F)$ は cochain complex となる。この complex の cohomology 群を $H(S/R,\ F)$ であらわし，S の F 係数の Amitsur cohomology 群という。このとき $\mathbb{K}$ から $\mathbb{A}\mathrm{b}$ への共変函手の完全系列 $0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$ に対して cohomology 完全系列

$$\cdots \longrightarrow H^{n-1}(S/R,\ F'') \longrightarrow H^n(S/R,\ F') \longrightarrow H^n(S/R,\ F)$$
$$\longrightarrow H^n(S/R,\ F'') \longrightarrow H^{n+1}(S/R,\ F') \longrightarrow \cdots$$

を得る。

Brauer 群に関しては (4.1) とよく似たつぎの定理がある。

定理 4.2 ([2], [28], [15]). S を可換 R-多元環で R-加群として忠実かつ有限生成射影的なものとするとき，つぎの完全系列がある。

$$0 \longrightarrow H^1(S/R,\ \mathbb{U}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(R) \longrightarrow H^0(S/R,\ \mathrm{Pic})$$
$$\longrightarrow H^2(S/R,\ \mathbb{U}) \longrightarrow \mathrm{Br}(S/R) \longrightarrow H^1(S/R,\ \mathrm{Pic}) \longrightarrow H^3(S/R,\ \mathbb{U}).$$

特に R が半局所環なら

$$H^1(S/R,\ \mathbb{U}) = 0, \qquad H^2(S/R,\ \mathbb{U}) \cong \mathrm{Br}(S/R).$$

Galois cohomology との関係についてはつぎの結果がある。

定理 4.3 ([2], [15]). S を R の Galois 拡大とし，G をその Galois 群，F を $\mathbb{K}$ から $\mathbb{A}\mathrm{b}$ への有限個の積を保存する共変函手とするとき，

$$H^2(G, F(S)) \cong H^2(S/R, F).$$

L/K が体の純非分離拡大のとき，$Br(K) \longrightarrow Br(L)$ は全準同型であることが知られている（[23]）．特に L/K が有限次で exponent 1 の拡大のとき Hochschild [23] により $Br(L/K)$ は L/K の derivation からなる制限 Lie 多元環の cohomology としてあらわせることが示された。Amitsur が上述の cohomology を考えたのは Galois cohomology とこのような cohomology を統一するためであった。Amitsur cohomology は体 K の Brauer 群 $Br(K)$ の p-準素成分を研究するのに役だつ．（ここで p は K の標数をあらわす）．L/K が体の純非分離拡大のとき $Br(L/K) \cong H^2(L/K, U)$ であり，$q > 2$ のとき $H^q(L/K, U) = 0$ のことが知られている。また Amitsur cohomology を用いて p-多元環の基礎理論（[1]）を整理することが可能になっている（[35]）．

(4.2) により半局所環 R に対しては，Amitsur cohomology は体のときと同様に有用である。しかし全く一般の可換環 R にに対しては §3 で述べた理由によりあまり有効ではない。

§5. 半局所環の Brauer 群.

R を連結な半局所環とするとき，(3.2)，(3.2) の系および (4.1) より

$$\mathrm{Br}(R) = \mathrm{Br}(R_s/R) = \bigcup_T \mathrm{Br}(T/R)$$

$$= \varinjlim_T H^2(G(T/R),\ U(T)) = H^2(G(R_s/R),\ U(R_s)).$$

ここで T は分離閉被 R_s の部分 R-多元環で R の Galois 拡大であるもの全体を動くものとする。

R を Hensel 的局所環とし $\mathfrak{m}$ をその極大イデアルとすると R_s は $\mathfrak{m}R_s$ を極大イデアルとする Hensel 的局所環となり $R_s/\mathfrak{m}R_s$ は $R/\mathfrak{m}$ の分離閉被と一致する。

また R を Noether 的局所整閉整域とすると，R_s も整閉整域であり，R_s の商体は R の商体 K の分離閉被 K_s の部分体となる。これを K_{ur} で表わし，R の商体 K の*極大不分岐拡大体*とよぶ。ここで更に R が Hensel 的なら K_{ur}/K の Galois 群は $R/\mathfrak{m}$ の分離閉被の Galois 群と一致する。

定理 5.1 ([8]). R を Hensel 的局所整域とし $\mathfrak{m}$ をその極大イデアルとするとき，自然な環準同型 $R \longrightarrow R/\mathfrak{m}$ により Brauer 群の同型：$\mathrm{Br}(R) \cong \mathrm{Br}(R/\mathfrak{m})$ がひき起される。

いま R を特に階数 1 の離散的付値環で Hensel 的なものとすると R の連結な Galois 拡大 T はまた離散的付値環であり，$G = G(T/R)$，L をその商体とすると，G-加群としての分解完全系列

$$0 \longrightarrow U(T) \longrightarrow U(L) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

を生じる。これより $q \geq 0$ について分解完全系列

$$0 \longrightarrow H^q(G, U(I)) \longrightarrow H^q(G, U(L)) \longrightarrow H^q(G, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

を得る。$q = 2$ のものと (5.1) よりつぎの定理がでる。

定理 5.2 (Witt－中山, [31]). R を階数 1 の離散的付値環で Hensel 的なものとし, K, k をそれぞれ R の商体, 剰余体, G を k_s/k の Galois 群とするとき, つぎの分解完全系列がある.

$$0 \longrightarrow Br(k) \longrightarrow Br(K_{ur}/K) \longrightarrow Hom(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow 0.$$

特に k が完全体なら $Br(K_{ur}/K) = Br(K)$ である。また R, k が同じ標数をもつか, または R の標数 0 で k の標数 $p > 0$ であり R が 1 の原始 p 乗根を含む場合には, k が完全体のときにかぎって $Br(K_{ur}/K) = Br(K)$ となる。

Hensel 的という仮定を除くとき, (5.2) はつぎのように一般化される。

定理 5.3 ([6], [38]). R を階数 1 の離散的付値環とし, K をその商体, G を剰余体の分離閉包の Galois 群とするとき, つぎの分解完全系列がある.

$$0 \longrightarrow Br(R) \longrightarrow Br(K_{ur}/K) \longrightarrow Hom(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow 0.$$

(5.2) の後半の事柄も全く同様にいえる。

(5.3) より, 階数 1 の離散的付値環 R に対して, 剰余体が完全体であり, $[G, G] = G$ のときには $Br(R) = Br(K)$ となることがわかる。

§6. Brauer群が0であるような体，数体のBrauer群

体Kがつぎの条件をみたすとき，Kを擬代数的閉体，または(C_1)-体という（[25]）．

(C_1)　次数$d>0$でKの元を係数とする同次多項式 $f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ が$(0, 0, \ldots, 0)$だけを零点としてもつとき，必ず$d \geq n$である．

(C_1)-体としてはつぎのようなものがある．

i)　代数的閉体

ii)　有限体

iii)　代数的閉体k上の一変数有理函数体$k(X)$．（Tsenの定理）．

iv)　Rを階数1の完備離散的付値環で剰余体が完全体であるようなものとするとき，Rの商体Kの極大不分岐拡大体K_{ur}．

定理 6.1（[25]）．体Kを(C_1)-体とするとき，つぎの事柄がいえる．

(1)　$Br(K) = 0$．

(2)　Kの代数拡大体はすべて(C_1)-体である．

(3)　Kの有限次拡大体Lに対して$N_{L/K}(U(L)) = U(K)$となる．

一方つぎの定理が知られている．

定理 6.2（Tate，[32]）．体Kについてつぎの三つの条件は同値である．

(1)　Kの任意の代数拡大体Lに対して$Br(L)=0$.

(2)　Kの任意のGalois拡大体Lについて，$U(L)$が$G(L/K)$-加群として cohomologically trivial である。

(3)　(2)と同じL/Kについて$N_{L/K}(U(L))=U(K)$である。

ここで(1)，(3)はLをKの有限次分離拡大にかぎってよい。

(6.2)における同値な条件をみたす体Kを$\dim K \leq 1$の体という([32])。これは[32]の言葉でいいかえることができ，たとえばKが標数0なら cohomological dimension ≤ 1ということと同じである。

明らかに分離的に閉じた体は$\dim K \leq 1$である。

定理 6.3 ([32]).　体Kが(C_1)-体なら$\dim K \leq 1$であって，Kの標数$p>0$のとき$[K : K^p] = 1$またはpとなる。

しかしこの定理の逆はいえない(Ax の例. [9])。

また$Br(K)=0$でも必ずしも$\dim K \leq 1$ではない(Auslander の例，[32]の付録)。

つぎに数体の Brauer 群について述べよう。これらは類体論において重要な役割をなすものである。

i)　$\mathbb{R}$を実数体とするとき$Br(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$である.

ii)　p-進体またはより一般に剰余体kが有限体であるような階数1の離散付値環でHensel的なものの商体Kに対して$Br(K)=\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$となる。これは(5.2)から直接示される.

iii) K を数体とし，$\hat{K}_v$ を K の付値 v による完備化とするとき，i)，ii) から

$$\mathrm{Br}(\hat{K}_v) = \begin{cases} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & : v \text{ が離散的のとき} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\ (\subseteq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & : \hat{K}_v = \mathbb{R} \text{ のとき} \\ 0 & : \hat{K}_v = \mathbb{C} \text{ のとき}. \end{cases}$$

そしてつぎの有名な定理がある.

定理 6.4 (Hasse, [3], [17]). K を数体とし，$\hat{K}_v$ を K の付値 v による完備化とするとき，つぎの完全系列がある。

$$0 \longrightarrow \mathrm{Br}(K) \xrightarrow{f} \coprod_v \mathrm{Br}(\hat{K}_v) \xrightarrow{g} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

ここで和は K の付値全体にわたってとるものとする。また f は自然な準同型 $\mathrm{Br}(K) \longrightarrow \mathrm{Br}(\hat{K}_v)$ からひき起されたものとし，g は $g((\alpha_v)) = \sum_v \alpha_v$ によって定まるものとする。

最近東屋氏は，A_K を K の Adèle 環とするとき $\mathrm{Br}(A_K) = \coprod_v \mathrm{Br}(\hat{K}_v)$ となることを証明された.

有限体 k 上の一変数の函数体についても (6.4) と同様の完全系列の存在がわかる. なお体 k 上の一変数函数体の Brauer 群の構造に関しては最近 [38] において精密な研究がなされているが，ここでは触れないことにする.

§ 7 整閉整域の Brauer 群

R を整域とし，K をその商体とするとき，自然な埋入準同

型 $R \longrightarrow K$ により Brauer 群の準同型 $Br(R) \xrightarrow{\Phi} Br(K)$ がひき起される。Φ は一般には単準同型ではない。まず R が Noether 的整閉整域のとき、Φ が単準同型となるための条件を与えよう。

定理 7.1 ([5], [7]). R を Noether 的整閉整域, K をその商体とするとき, R に対しつぎの条件は同値である.

(1) Φ が単準同型である. すなわち $Br(R) \subseteq Br(K)$.

(2) 有限生成, 反射的 R-加群 E で $Hom_R(E, E)$ が R-射影的であるようなものに対して, $E \cong P \otimes_R \mathfrak{a}$ となるような射影的 R-加群 P と R の反射的イデアル $\mathfrak{a}$ がつねに見出せる.

(7.1) は [7] にあるような一般的事柄を用いないで, 直接容易に証明できる (筆者による注意).

系 ([5]). R を正則整域, K をその商体とするとき, $Br(R) \subseteq Br(K)$ である。

一般に Φ の核を記述する方法は [7], [20] に与えられている。

系より, R が正則整域の場合には R の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対し

$$Br(R) \subseteq Br(R_{\mathfrak{p}}) \subseteq Br(K)$$

となることがわかるので, R の局所化の Brauer 群との関係を調べることが可能になる.

定理 7.2 ([5]). R を正則整域で $\mathrm{Krull\,dim}\, R \leq 2$ なるも

のとすると

$$Br(R) = \bigcap_{ht_R \mathfrak{p}=1} Br(R_{\mathfrak{p}}).$$

(7.2)の証明には，任意の中心的単純多元環の中に極大R-整環でR上射影的なものが存在することが基本的である。一般の正則整域についてこのことが示されるなら，(7.2)からKrull次元に関する仮定を除くことができる。しかしこれは現在のところ未解決の問題である。

つぎに特殊な型の正則整域として体の上の多項式環について考えよう。

一般に環Rを係数環とし，不定元 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ をもつ多項式環，形式的巾級数環をそれぞれ $R[X_1, X_2, \ldots, X_n]$，$R[[X_1, X_2, \ldots, X_n]]$ であらわすことにする。このとき $Br(R)$ は $Br(R[X_1, X_2, \ldots, X_n])$，$Br(R[[X_1, X_2, \ldots, X_n]])$ の直和因子となる。形式的巾級数環については(4.1)の証明と同様の方法で，実際 $Br(R) = Br(R[[X_1, X_2, \ldots, X_n]])$ となることがわかる。しかし多項式環に関しては事情はかなり複雑である。

定理 7.3 ([5], [28]). Kを体とし，Xを一つの不定元とするとき，$Br(K) = Br(K[X])$ となるための必要十分条件はKが完全体のことである。Kの標数を $p > 0$ とするとき，一般に $Br(K[X]) \longrightarrow Br(K)$ の核は p-準素的である。

系 ([5]). Rを標数0の正則整域とするとき，$Br(R) =$

$\mathrm{Br}(R[X_1, X_2, \ldots, X_n])$ である.

Amitsur cohomology と (7.3) を用いて, (5.2) はつぎのように一般化できる.

定理 7.4 ([34]). R を階数 1 の完備離散的付値環とし, K, k をそれぞれ R の商体, 剰余体, G を k_s/k の Galois 群とし, 更に K, k の標数がともに $p > 0$ と仮定する。このときつぎの分解完全系列がある.

$$0 \longrightarrow \mathrm{Br}(k[X]) \longrightarrow \mathrm{Br}(K) \longrightarrow \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow 0.$$

最後に数体の整数環に関する結果を与える.

定理 7.5 ([20]). K を数体とし, R をその整数環とする. いま l を K の付値ので完備化が $\mathbb{R}$ であるようなものの個数とし (すなわち実無限素点の個数), $r = \max(0, l-1)$ とおくとき $\mathrm{Br}(R) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$ となる. したがって K が総虚な体のときには $\mathrm{Br}(R) = 0$ であり, また $\mathrm{Br}(\mathbb{Z}) = 0$ である.

これは (6.4) より直接示される.

参考文献

[1] A.A.Albert, Structure of algebras, Publ.A.M.S., 1939.

[2] S.A.Amitsur, Simple algebras and cohomology groups of arbitrary fields, Trans.A.M.S., 90(1959), 73-112.

[3] E.Artin and J.Tate, Class field theory, Harvard Univ. Press, 1961.

[4] M.Auslander and O.Goldman, Maximal orders, Trans.A.M.S., 97(1960), 1-24.

[5] ___________, The Brauer group of a commutative ring, Trans.A.M.S., 97(1960), 367-409.

[6] M.Auslander and A.Brumer, Brauer groups of fields with discrete rank one valuation, A.M.S. Notices, 11(1964), 119.

[7] B.Auslander, The Brauer group of a ringed space, J.Algebra, 4(1966), 220-273.

[8] G.Azumaya, On maximally central algebras, Nagoya Math. J., 2(1951), 119-150.

[9] J.Ax, Proof of some conjectures on cohomological dimension, Proc.A.M.S., 16(1965), 1214-1221.

[10] H.Bass, Topics in algebraic K-theory, Tata Inst., Bombay, 1967.

[11] N.Bourbaki, Algèbre commutative, Chap. I-II, Hermann, Paris, 1961.

[12] R.Brauer, Über Systeme hyperkomplexer Zahlen, Math. Zeit., 30(1929), 79-107.

[13] H.Cartan and S.Eilenberg, Homological algebra, Princeton Univ.Press, 1956.

[14] S.U.Chase, D.K.Harrison and A.Rosenberg, Galois theory and Galois cohomology of commutative rings, Memoirs A.M.S., 52(1965), 15-33.

[15] S.U.Chase and A.Rosenberg, Amitsur cohomology and the Brauer group, Memoirs A.M.S., 52(1965), 34-79.

[16] F.R.DeMeyer, The Brauer group of some separably closed rings, Osaka J.Math., 3(1966), 201-204.

[17] M.Deuring, Algebren, Erg.der.Math., Springer, 1935.

[18] S.Endo and Y.Watanabe, On separable algebras over a commutative ring, Osaka J.Math., 4(1967), 233-242.

[19] A.Grothendieck, Géometrie formelle et géometrie algebrique, Sem.Bourbaki, 11(1958), n° 182.

[20] ____________, Les groupe de Brauer I, Sem.Bourbaki, 17(1964/65), n 290°, II, Sem.Bourbaki, 18(1965/66), n 297, III,... .

[21] M.Harada and T.Kanzaki, 環のガロアの理論，数学 18, (1966), 144-159.

[22] M.Harada and T.Kanzaki, Brauer群，日本数学会，代数学分科会報告集. 11(1967), 64-69.

[23] G.Hochschild, Simple algebras with purely inseparable fields of exponent 1, Trans.A.M.S., 79(1955), 477-489.

[24] G.J.Janusz, Separable algebras over commutative rings, Trans.A.M.S., 122(1966), 461-479.

[25] S.Lang, On quasi algebraic closure, Ann. of Math., 55(1952), 373-390.

[26] K.Morita, Duality for modules and its application to the theory of rings with minimum condition, Sci.Reports Tokyo Univ.Education, 6(1958), 83-142.

[27] M.Nagata, Local rings, Interscience, 1962.

[28] A.Rosenberg and D.Zelinsky, On Amitsur complex, Trans.A.M.S., 97(1960), 327-356.

[29] ____________, Automorphisms of separable algebras, Pacific J.Math., 11(1961), 1109-1117.

[30] O.F.G.Schilling, The theory of valuations, A.M.S.Publ., 1950.

[31] J.P.Serre, Corps locaux, Act.Sci.Ind., Paris, 1962.

[32] ____________, Cohomologie Galoisienne, Springer, Lect. Notes Series, 5, 1964.

[33] O.E.Villamayor, Separable algebras and Galois extensions, Osaka J.Math., 4(1967), 161-171.

[34] S.Yuan, On the Brauer groups of local fields, Ann.of Math., 82(1965), 434-444.

[35] ________, On the theory of p-algebras and the Amitsur cohomology groups for inseparable field extensions, J. Algebra, 5(1967), 280-304.

[36] S.N.Kuroda, Minkowskiの定理について, 数学, 14(1963), 171-172.

[37] T.Kanzaki, On generalized crossed product and Brauer group, To appear.

[38] M.Auslander and A.Brumer, Brauer groups of discrete valuation rings, Indag. Math. 30(1968), 286-296.