数理解析研究所講究録
第 53 巻 1968 年 24-41

Brauer 群 A_{II}
—— Witt 群と Brauer Wall 群

阪大 理　　渡辺 豊

体の上の多元環の理論を可換環上のそれに移し，その中で独自の新らしい理論を展開させようという気運のさ中で当然のことであろうが，体係数の二次型式の理論を可換環上の projective modules の上で定義された二次型式とそれに附随した（環上の）Clifford algebra の理論に拡張しようという動きが Flamant（[3], [4]），Micali, Villamayor（[5]），Bass（[2]）等によって各々異った角度から独立に起りつつある。まだそれらは満足すべき所に到達しているとは云い難いが，整係数の二次型式が今までのところそれ自身の Clifford algebra を持たず，従って直接には代数的（狭い意味での）に処理されていなかったことを思えば，最近の多元環論にうまく乗ったこれらの方法が整係数——もっと一般に可換環係数——の二次型式について一つの新しい見方を提起していることは確かである。可換環係数の二次型式

について，しかし乍ら，こういった方法がどれだけの効果を挙げ得るのかは，これからの発展に待たねばならない。そういうわけで，こゝに紹介するのはこの問題提起者達の，そのつかみ方，を紹介するにとゞまることをおことわりしておかなければならない。中で，H. Bassのは代数的K-理論を二次型式の理論の中に持ち込んで彼らしくスケールを大きくしているが，それが（それだけで充分興味あることであろうが）唯それだけにとゞまるものなのか，何らかの具体的な問題を定式化する為の準備なのか，筆者のよく分るところではない，がともかく彼の方法の示唆するところは魅力に富み，こゝでもそれを中心として紹介することにしよう。

Rを可換環，Pを finitely generated（以下 f.g. と略記）projective R-module とする。map $q: P \longrightarrow R$ が quadratic form defined on P とは

1) $q(ax) = a^2 q(x)$ for $\forall a \in R$, $\forall x \in P$,

2) $Q(x, y) = q(x+y) - q(x) - q(y)$ が bilinear form である，

こととする。pair (P, q) を quadratic module over R と呼ぶ。2) の Q が引き起す自然な R-準同型 $P \longrightarrow P^* = Hom_R(P, R)$ が同型なるとき (P, q)

が non-singular であると云う.

R上の non-singular な quadratic module 全体の作る category を $\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{Q}}(R)$ とかくことにしよう. そこでの morphism は quadratic form を保つもの, 即ち $f : (P, q) \longrightarrow (P', q')$ は $q(x) = q'(f(x))$ を満す R-homo $f : P \longrightarrow P'$ のこととする. 特に $f : P \rightarrow P'$ が R-iso のとき isometry と云う.

P を f.g. projective R-module とする. その時, $\mathcal{H}(P) = (P \oplus P^*, h) : h(x, f) = f(x)$, は non-singular な quadratic module である. $\mathcal{H}(P)$ に isometric な quadratic module を hyperpolic であると云う.

二つの quadratic modules (P, q), (P', q') について $(P, q) \perp (P', q') = (P \oplus P', q \perp q') : q \perp q'(x, x') = q(x) + q'(x')$, で orthogonal sum $\perp$ を定義する.

<u>PROPOSITION 1</u> $\mathcal{H}(P \oplus P') \cong \mathcal{H}(P) \perp \mathcal{H}(P')$

<u>PROPOSITION 2</u> $(P, q) \in \underline{\underline{Q}}$ について $(P, q) \perp (P, -q) \cong \mathcal{H}(P)$

今 $\underline{\underline{Q}}$ の objects 全体に同値関係 "$(P, q) \sim (P', q') \Longleftrightarrow$ f.g. projective R-module P'' が存在して $(P, q) \perp (P', -q') \cong \mathcal{H}(P'')$" を入れる。この同値

類全体は上から２演算に induce された演算で Abel 群をなす。かかる群を $W(R)$ とかいて可換環 R の Witt 群と呼ぶ。

$(P, q) \in \underline{\underline{Q}}(R)$ とする. P の tensor algebra を $T(P) = \sum^{\oplus} T^i(P)$ とする。$T_0(P) = \sum^{\oplus\, even} T^i(P)$, $T_1(P) = \sum^{\oplus\, odd} T^i(P)$. とおけば $T(P) = T_0(P) \oplus T_1(P)$ は $\mathbb{Z}/2$ で grading の入った graded algebra と考えられる. その時 $\{x \otimes x - q(x)\}_{x \in P}$ で生成された $T(P)$ の両側 ideal は homogeneous ideal $I(P, q)$ をなし, $Cl(P, q) = T(P)/I(P, q)$ はやはり $\mathbb{Z}/2$ で grading の入った graded algebra である; $Cl(P, q) = Cl_0(P, q) \oplus Cl_1(P, q)$. $Cl(P, q)$ を (P, q) の Clifford algebra と呼ぶ. $q = 0$ のとき (この時は $\in \underline{\underline{Q}}$ ではないが, 同様に construct したところの) $Cl(P, q)$ は P の exterior algebra ΛP と同型である.

<u>PROPOSITION 3</u> $(P, q) \in \underline{\underline{Q}}$ に対し $Cl(P, q)$ は R-separable algebra である.

<u>PROPOSITION 4</u> 更に $\operatorname{rank} P =$ even なら $Cl(P, q)$ は Azumaya R-algebra であり, $=$ odd なら $Cl_0(P, q)$ が Azumaya R-algebra である. ([2], [4], [5], [6])

従って, 例えば R を normal Noetherian domain, K をその商体とし, (V, q) を K 上の non-singular な quadratic space とした時, $(P, q|P) \in \underline{Q}$ であるような f.g. proj. R-lattice P について $Cl(P, q|P)$ は $Cl(V, q)$ の中の第一種不分岐な maximal order である.

$Cl(P, q)$ それ自体は必ずしも Azumaya algebra にはならないので取り扱いに多少不便である. そこで Wall [6] Bass [2] による "graded Azumaya algebra" なる概念を持ち込む.

R を可換環, A を R-algebra とし, A には $\mathbb{Z}/2$ で grading が入っているとする.(*) (即ち $A = A_0 \oplus A_1$ (as additive groups), $A_i A_j \subset A_{i+j}$ $(i, j \in \mathbb{Z}/2)$) $M = M_0 \oplus M_1$ を R-module とすれば $Hom_R(M, M)$ の元 f は $f = f_0 + f_1$ $f_i(M_j) \subset M_{i+j}$ と分解出来るから, この見做し方で graded algebra の構造が入る.

A に新しい乗法; a, b を homogeneous elements of degree $\partial a, \partial b$ とする時 $a \cdot b = (-1)^{\partial a \partial b} ab$: を入れた graded algebra を A' で表し, A' の opposite algebra を A^* で表わす。

A, B を graded R-algebra とする. R-module $A \otimes_R B$

(*) 以下 grading は必ず $\mathbb{Z}/2$ によるものとする.

に乗法 $(a\otimes b)\cdot(a'\otimes b')=(-1)^{\partial b \partial a'}(aa'\otimes bb')$：但し a, a', b, b' は A, B の homogeneous element で ∂ はその degree：を入れれば $A\otimes_R B$ は又 graded R-algebra になるが，これを $A\hat{\otimes}_R B$ で表わすことにする．A, B が ordinal な R-algebras 即ち degree 0 なる graded algebras ならば $A\hat{\otimes} B = A\otimes B$ である．

$A^e = A\hat{\otimes} A^*$ を A の enveloping algebra と呼ぶ．

少しく例を挙げよう．$R=k$ を $ch \neq 2$ なる体，$a\in k$ を non-zero element とする時 $x^2=a$ なる x で k 上生成された k-algebra（それを $k\langle a\rangle$ とかく）は graded k-algebra である；$k\langle a\rangle_0=k$, $k\langle a\rangle_1=kx$．$(a, b)_k$ で generalized quoternion algebra，$k\oplus ki\oplus kj\oplus kij$, $i^2=a$, $j^2=b$, $ij=-ji$ を表せば $k\langle a\rangle\hat{\otimes}k\langle b\rangle\cong(a, b)_k$ である．$k\langle a\rangle^*\cong k\langle -a\rangle$ であり従って $k\langle a\rangle$ の enveloping algebra は $k\langle a\rangle\hat{\otimes}k\langle -a\rangle\cong(a,-a)_k\cong M_2(k)\cong \mathrm{End}_k(k\langle a\rangle)$ である．この isomorphisms の合成は canonical な homothety で得られる．

$P=P_0\oplus P_1$ を可換環 R 上の f.g. faithful projective module とすると $\mathrm{End}_R(P)$ は前述の如く，graded R-algebra であるが，かかる algebra に同型な algebra を split type の R-algebra と云う．こゝでは，あくまでも

その grading をも含めての話であって，例えば $A = M_2(R)$, $A_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \right\}$, $A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix} \right\}$ とするとき $A = A_0 \oplus A_1$ は graded algebra であり，A そのものは split type であるが graded algebra としては split type とは云わない。

上に挙げた例の如く その envelope A^e が homothety によって canonical に $End_R(A)$ に graded algebra として同型であるような f.g. faithful projective な graded R-algebra を graded Azumaya algebra と呼ぶ。

PROPOSITION 5　A が graded Azumaya R-algebra である為の必要十分条件はある graded R-algebra B が存在して $A \hat{\otimes} B$ が split type なることである。([2])

A, B を graded Azumaya R-algebra とする。$A \hat{\otimes} B^*$ が split type の時，A と B は BW-同値であると云う。graded Azumaya R-algebras の BW-同値類全体は $\hat{\otimes}$ より自然に induce された演算で Abel 群をなす。これを $BW(R)$ とかいて R の Brauer-Wall 群と称する。

この群を $R = k$ が $ch \neq 2$ なる体の時に少し調べてみよう（詳しいことは [6] 参照）。

k 上の graded Azumaya algebra については それ自身が (not graded) Azumaya k-alg になるが，0-term A_0 が

そうであるかのいづれかであって両方のcaseは同時には起り得ない。前者，即ち A 自身が Azumaya algebra の時 case $(+)$ といい，後者を case $(-)$ と称する。各caseについて graded Azumaya k-algebra の構造は ——

case $(+)$ $0 \neq u^2 = a \in k$ なる $u \in A$ が存在して $A_0 = \{x \in A \mid xu = ux\}$. $A_1 = \{y \in A \mid yu = -uy\}$ である。逆に k-Azumaya algebra A と $u^2 = a \neq 0 \in k$ なる u によって上の方法で A_0, A_1 を定めれば $A = A_0 \oplus A_1$ は graded Azumaya algebra である。別の v ($0 \neq v^2 = b \in k$) で同様に construct された graded Azumaya algebra を B とすれば $B \cong A$ as graded k-algebras なることと $b \equiv a\ ((k^*)^2)$ とは同値である。従って A の graded structure は $(+, a, D, n)$ によって定まる。こゝで，a は modulo square での数であり D, n は $A = (D)_n$ なる central division algebra である。$(+, a, D, n)$ を A の invariant と呼ぶ。

Case $(-)$ degree 1 なる central homogeneous element u で $0 \neq u^2 = a \in k$ なるものが存在して $A_1 = A_0 u$ である。　　上と同様の意味で A の graded structure は $(-, a, D, n)$ 但し，$A_0 = (D)_n$ で定まり a は modulo square で unique である。$(-, a, D, n)$

をやはり A の invariant と呼ぶ.

二つの graded k-Azumaya algebra が BW-同値である為には その各々の invariants が 易合の factor を除いて等しいことが必要十分である. 従って BW-classes の invariants は (ε, a, D) $\varepsilon = \pm 1$ としてよい. 各 invariants 间の積は

$$(+, a, D)\circ(+, a', D') = (+, aa', D\otimes D'\otimes (a, a')_k)$$
$$(+, a, D)\cdot(-, a', D') = (-, aa', D\otimes D'\otimes (a, -a')_k)$$
$$(-, a, D)\cdot(-, a', D') = (+, -aa', D\otimes D'\otimes (a, a')_k)$$

である. 右辺の division algebra を表す部分は その属する division algebra という意味である.

容易に分るように $BW(k)$ の単位元は $(+, 1, k)$ であり, $(+, a, D)$ の逆元は $(+, a, D^\circ\otimes(a, a)_k)$, $(-, a, D)$ のそれは $(-, -a, D^\circ)$ である.

$k = \mathbb{R}$ (実数体) では $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}^{*2} = \{1, -1\}$ であり $\mathbb{R}$ 上の central division algebra は $\mathbb{R}$ と $\mathbb{Q} = (-1, -1)_{\mathbb{R}}$ だけだから $BW(\mathbb{R})$ は order 8 の group である. 実際 $BW(\mathbb{R})$ は $(-, 1, \mathbb{R})$ を生成元とする cyclic group (of order 8) である. k が separably closed のときには $BW(k) = \mathbb{Z}/2$ である.

話を一般の R に戻して: —— not graded な

Azumaya algebra は degree 0 なる graded Azumaya algebra と見做せるが,

PROPOSITION 6　その見做し方の引き起す homomorphism $B(R) \longrightarrow BW(R)$ は monomorphism である.

この cokernel は R の graded quadratic extensions の iso-types がある種の演算によって作る group と同型である. ([2] 参照)

さて, Clifford algebra に話は戻るが, まず

PROPOSITION 7　$Cl((P, q) \perp (P', q')) \cong Cl(P, q) \hat{\otimes} Cl(P', q')$.

P を f.g. proj. R-module とすれば ΛP は f.g. proj. 且つ faithful な graded R-module (ΛP = even term $\oplus$ odd term) であるが

PROPOSITION 8　$Cl(\mathcal{H}(P)) \cong End_R(\Lambda P)$

よって PROP. 2, 5 より

PROPOSITION 9　$(P, q) \in \underline{\underline{Q}}$ について $Cl(P, q)$ は graded Azumaya R-algebra である.

従って non-singular quadratic module over R は $BW(R)$ の元を定めるが, PROP. 7, 8 より実は Witt 群, $W(R)$ からの homomorphism を定めることが分る. これを Hasse invariant と呼ぶ.

3½

次にこの klasse invariant を Bass 一流の大じかけで，ある種の sequence 間の写像に拡張することを試みよう。

$\mathcal{C}$ を category とする．二変数の covariant functor $\perp : \mathcal{C}\times\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ が commutative 且つ associative の時 $\perp$ を category $\mathcal{C}$ の product と呼ぶ．$\perp$ による像 $\perp(A, B)$ を $A\perp B$ とかく．product $\perp$ を持つ category $\mathcal{C}$ の Grothendieck 群 $K^0(\mathcal{C})$ は写像 $(\ ) : \mathrm{Obj}\,\mathcal{C} \longrightarrow K^0(\mathcal{C})$ で，

$$(A\perp B) = (A) + (B)$$

を満すものの中で universal なものとして定義される．

注1　$\mathcal{C}$ の morphism を isomorphism に限っても $K^0(\mathcal{C})$ やすぐあとで定義される $K^1(\mathcal{C})$ 等には何ら影響を及ぼさないし，むしろ重要な functor を考えるに当って，そうでなければならない場合が起り得るので，以后 morphism は全て isomorphism であるとする．

注2　exact sequence で定義された K^0 とは一致する時も勿論ある（例えば f.g. proj. modules の category で $\perp = \oplus$）が，むしろ exact sequence で処理出来ない場合をここでは包含したいので，整数表現等に使われる Swan etc, etc, によるものとは多少ずれたものだと思って差しつかえない。

$\Omega\mathcal{C}$ を $\mathcal{C}$ の automorphism 全体の作る category とする。
$\Omega\mathcal{C}$ には canonical な product $\alpha\perp\beta$ が入るが，もう一つ domain を共有している時に限って composition $\alpha\circ\beta$ が定義されている。$\mathcal{C}$ の Whitehead group $K^1(\mathcal{C})$ とは map $(\ )$: $\mathrm{obj}\,\Omega\mathcal{C} \longrightarrow K^1(\mathcal{C})$ で

$$(\alpha\perp\beta) = (\alpha)+(\beta)$$

$\alpha\circ\beta$ が定義されれば $(\alpha\circ\beta) = (\alpha)+(\beta)$

についての universal problem の solution として定義される。

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を products を持った categories とする。$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ を products を保つ functor とする。F は K-群の間の homomorphism $K^iF: K^i(\mathcal{C}) \longrightarrow K^i(\mathcal{D})$ $i=0,1$ を引き起こす。functor F について $FA \xrightarrow{\alpha} FB$ なる関係にある triple (A,α,B) 全体からなる category を ΦF とかく。objects (A,α,B), (A',α',B') 間の morphism は $f: A\to A'$, $g: B\to B'$ なる morphisms の pair (f,g) で diagram

$$\begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{Ff} & FA' \\ \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\alpha'} \\ FB & \xrightarrow{Fg} & FB' \end{array}$$

が可換になるものとする。ΦF には自然に product $\perp$ が定義され同時に $(B,\alpha,C)\circ(A,\beta,B) = (A,\alpha\beta,C)$ なる

composition $\circ$ が定義される. category ΦF から K^1 の場合と同様に construct された group を $K^0\Phi F$ とかく.

functor F が cofinal とは 任意の $D \in \mathrm{obj}\,\mathcal{D}$ に対し $D' \in \mathrm{obj}\,\mathcal{D}$, $C \in \mathrm{obj}\,\mathcal{C}$ が存在して $D \perp D' \cong FC$ なることである. 又, subcategory が cofinal とは inclusion functor が cofinal なことである.

<u>PROPOSITION 10</u> $\mathcal{C}_0$ が $\mathcal{C}$ の cofinal subcategory ならば $K^1(\mathcal{C}_0)$ と $K^1(\mathcal{C})$ は inclusion functor で引き起こされる homo によって同型である.

以下, $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ を cofinal とする.

$C \in \mathrm{obj}\,\mathcal{C}$ として α を FC の automorphism とする. $(\alpha) \longmapsto (A, \alpha, A)$ は $K^1(F\mathcal{C}) \longrightarrow K^0\Phi F$ なる map を定めるが, Prop. 10 の同型を通して homo $\kappa : K^1(\mathcal{D}) \longrightarrow K^0\Phi F$ を得る. 又, $(A, \alpha, B) \longmapsto (A) - (B)$ は $\lambda : K^0\Phi F \longrightarrow K^0(\mathcal{C})$ なる homo を定める. 次の定理は基本的である.

<u>PROPOSITION 11</u> $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ が cofinal ならば $K^1(\mathcal{C}) \rightarrow K^1(\mathcal{D}) \xrightarrow{\kappa} K^0\Phi F \xrightarrow{\lambda} K^0(\mathcal{C}) \longrightarrow K^0(\mathcal{D})$ は exact sequence である.

少し例を挙げよう. f.g. projective R-modules の category $\underline{\underline{P}}$ $(\perp = \oplus)$ の K-群については Bass [1] に

精しい．ここでは後に使う部分だけを述べておこう．

特に $K^i(\underline{\underline{P}})$ のことを $K^i(R)$ とかく．$K^0(R)$ には $\otimes_R$ によって multiplicative structure が入りこれによって $K^0(R)$ は associative ring の構造をもつ．$\mathrm{Spec}(R)$ から $\mathbb{Z}$ (discrete topology) への連続函数全体の作る ring を C とする．$\underline{\underline{P}}$ の object P は $\mathrm{Spec}(R) \ni \mathfrak{p} \xrightarrow{rk P} \mathrm{rank}_{R_\mathfrak{p}} P_\mathfrak{p}$ によって C の元を定める．$P \longmapsto rk P$ は $K^0(R)$ から C への ring homomorphism を induce するが，実はこれは split して $K^0(R) = \tilde{K}^0(R) \oplus C$ $(\tilde{K}^0(R) = \mathrm{Ker}(rk))$ とかける。$\tilde{K}^0(R)$ は ring $K^0(R)$ の nil and Jacobson radical である．　R-free modules 全体は $\underline{\underline{P}}$ の cofinal subcategory をなすから free module の automorphism 即ち R 上の matrix にその determinant を対応させることによって $K^1(R) \xrightarrow{det} U(R)$ (R の可逆元全体の作る乗法群) なる map を得る．$SK^1(R) = \mathrm{Ker}(det)$ とおけば det は splitting $K^1(R) = U(R) \oplus SK^1(R)$ を与える．

次に $\underline{\underline{P}}$ からんで重要な例を挙げる．

1) f.g. projective 且つ faithful な R-modules の category $\underline{\underline{FP}}(R)$ $(\perp = \otimes)$ と K-群と $\underline{\underline{P}}$ の K-群の間には，$K^0\underline{\underline{FP}} \cong U^+(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} K^0\underline{\underline{P}}) = U^+(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} C) \oplus (\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{K}^0\underline{\underline{P}})$

—— つまり $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{K}^0\underline{\underline{P}}$ (additive) $\cong 1 + \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{K}_0\underline{\underline{P}}$ (multiplicative)

を通して —— 及び $K^1\underline{\underline{FP}} \cong Q\otimes_Z K^1\underline{P} \cong (Q\otimes_Z U(R))\oplus$ $(Q\otimes_Z SK^1(R))$ なる関係がある。ここで U^+ は ring $Q\otimes K^0\underline{P}$ の rank positive なる units の意味である。

2) $\underline{\underline{FP}}=\underline{\underline{FP}}(R)$ から R-Azumaya algebras の category $\underline{\underline{Az}}$ ($\perp=\otimes$) への functor "End" (morphism は全て iso!!) は cofinal functor である。この時、$K^0\underline{\underline{FP}}\longrightarrow K^0\underline{\underline{Az}}$ の cokernel は R の Brauer 群 $B(R)$ である。

$\underline{\underline{Pic}}=\underline{\underline{Pic}}(R)$ で R上の f.g. rank one projective modules の category ($\perp=\otimes_R$) を表す。$K^0(\underline{\underline{Pic}})=Pic(R)$ である。又, $\{R\}$ が $\underline{\underline{Pic}}$ の cofinal subcategory であるから $K^1(\underline{\underline{Pic}})=U(R)$ である。今, Azumaya R-algebra A とその automorphism α に対して, $A_\alpha^A=\{x\in A \mid yx = x\alpha(y) \ \text{for}\ {}^\forall y\in A\}$ を対応させれば、これは $J:\Omega\underline{\underline{Az}}\longrightarrow\underline{\underline{Pic}}$ なる functor を与える。$\underline{\underline{Pic}}$ は $\underline{\underline{FP}}$ の subcategory である。従って categories と functors の列 $\Omega\underline{\underline{Pic}}\longrightarrow\Omega\underline{\underline{FP}}\longrightarrow\Omega\underline{\underline{Az}}\longrightarrow\underline{\underline{Pic}}\longrightarrow\underline{\underline{FP}}\longrightarrow\underline{\underline{Az}}$ が得られるが、これによって次の可換図型が導かれる。

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
U(R)=K^1\underline{\underline{Pic}} & \longrightarrow & K^1\underline{\underline{FP}} & \longrightarrow & K^1\underline{\underline{Az}} & \longrightarrow & K^0\underline{\underline{Pic}} & \longrightarrow & K^0\underline{\underline{FP}} & \longrightarrow & K^0\underline{\underline{Az}} & & \\
 & & & & & & \| & & & & & & \\
 & & \Big\| & & \Big\| & & Pic(R) & & \Big\| & & \Big\| & & \\
 & & & & & & \wr\| & & & & & & \\
 & & K^1\underline{\underline{FP}} & \longrightarrow & K^1\underline{\underline{Az}} & \longrightarrow & K^0\Phi\mathrm{End} & \longrightarrow & K^0\underline{\underline{FP}} & \longrightarrow & K^0 Az & \longrightarrow & B(R)\to 0
\end{array}
$$

下の列は Prop 11 による exact sequence である.

$K^1\underline{\underline{Az}}$ の付近で short exact sequence に分解してみると,

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}(K^1\underline{\underline{EP}} \to K^1\underline{\underline{Az}}) \longrightarrow K^1\underline{\underline{Az}} \longrightarrow \mathrm{Im}(K^1\underline{\underline{Az}} \longrightarrow K^0\underline{\underline{Pic}}) \to 0$$

であるが 右項は torsion subgroup of $Pic(R)$ である。左項については $\mathrm{Im}(K^1\underline{\underline{EP}} \to K^1\underline{\underline{Az}}) \cong \mathrm{Coker}(K^1\underline{\underline{Pic}} \longrightarrow K^1\underline{\underline{EP}})$ $\cong \mathrm{Coker}(U(R) \longrightarrow (\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} U(R)) \oplus (\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} SK^1(R))) \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\otimes U(R)) \oplus (\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} SK^1(R))$ であるがこれは divisible (従って injective) ($\mathbb{Z}$-) module だから 上の short exact sequence は split して $K^1\underline{\underline{Az}} \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\otimes U(R) \oplus \mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} SK^1(R)) \oplus$ (torsion subgroup of $Pic(R)$) を得る.

3) graded case も同様に f.g. projective 且つ faithful な graded R-modules の category $\underline{\underline{EP}}_2$ ($\perp = \otimes$) から graded Azumaya algebras 全体の category $\underline{\underline{Az}}_2$ ($\perp = \hat{\otimes}$) への functor End は cofinal であり $K^0\underline{\underline{EP}}_2 \longrightarrow K^0\underline{\underline{Az}}_2$ の cokernel は $BW(R)$ である.

4) $\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{P}}(R)$ から non-singular quadratic modules の category $\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{Q}}(R)$ ($\perp = \perp$) への functor H は cofinal (Prop. 2) であり $K^0\underline{\underline{P}} \longrightarrow K^0\underline{\underline{Q}}$ の cokernel は Witt 群 $W(R)$ である.

$\underline{\underline{Q}}$ の object (P, q) に その Clifford algebra $Cl(P, q)$

を対応させることによって $\underline{\underline{Q}}$ から $\underline{\underline{Az}}_2$ への products を保つ (by Prop. 7) functor "Cl" を得る。又、f.g. proj module P に ΛP を対応させることによって $\underline{\underline{P}} \longrightarrow \underline{\underline{FP}}_2$ なる product preserving な functor Λ が得られる。

Prop. 8 より

$$
\begin{tikzcd}
\underline{\underline{P}} \arrow[r, "\mathcal{H}"] \arrow[d, "\Lambda"] & \underline{\underline{Q}} \arrow[d, "Cl"] \\
\underline{\underline{FP}}_2 \arrow[r, "End"] & \underline{\underline{Az}}_2
\end{tikzcd}
$$

は可換であるから exact sequence 間の写像

$$
\begin{tikzcd}
K^1\underline{\underline{P}} \arrow[r] \arrow[d] & K^1\underline{\underline{Q}} \arrow[r] \arrow[d] & K^0\Phi\mathcal{H} \arrow[r] \arrow[d] & K^0\underline{\underline{P}} \arrow[r] \arrow[d] & K^0\underline{\underline{Q}} \arrow[r] \arrow[d] & W(R) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
K^1\underline{\underline{FP}}_2 \arrow[r] & K^1\underline{\underline{Az}}_2 \arrow[r] & K^0\Phi End \arrow[r] & K^0\underline{\underline{FP}}_2 \arrow[r] & K^0\underline{\underline{Az}}_2 \arrow[r] & BW(R) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

を得る。最右端の縦の map が Hasse invariant そのものであるから、この sequence 間の写像を"一般化された Hasse invariant"と呼んで差しつかえなかろう。この Hasse invariant の kernel をやはりある二つの categories とその間の cofinal functor で導かれた K-群の exact sequence で記述出来れば面白いがこれは今のところ open らしい。のみならず、単に $W(R) \longrightarrow BW(R)$ の kernel すら分っていないらしい。([5] 参照)

参考文献.

[1] H. Bass; K-theory and stable algebra, I.H.E.S. no. 22 (1964)

[2] H. Bass; Topics in algebraic K-theory, Tata (1967)

[3] M. Flamant; Indice d'une forme quadratique définie sur un module projectif ----, C.R. 261 p.3515 (1965)

[4] M. Flamant; L'algebre de Clifford à une form quadratique ---, C.R. 264 p.1037 (1967)

[5] A. Micali, O.E. Villamayor; Sur les algebres de Clifford, Sec. Math., Univ. Mt.pellier (1966-67)

[6] C.T.C. Wall; Graded Brauer groups, Crelle. vol. 213 (1964)