数理解析研究所講究録
第 53 巻 1968 年 91-113

Tate-Šafarevič group と Brauer group との有限性について

名大 理　田原賢一

kをある種のglobal fieldとする。Aをk上定義されたabelian varietyとするときAのTate-Šafarevič groupの有限性，次にXをSpec(k_0)（k_0は有限体）上のproper schemeとしてXのBrauer groupの有限性を調べ，最後にTate-Šafarevič groupとBrauer groupとの関係を述べる。

§1. Tate-Šafarevič group

以下特に断りがない限り，基礎体kは二つの型のglobal field，つまり代数的数体（$\mathbb{Q}$上の有限次拡大体）か有限体k_0（標数をpとする）上の1変数代数函数体とする。Aをk上定義された任意次元のabelian varietyとする。Aが，k上定義された代数的多様体V上に正則変換群として作用する，つまりk上定義された

$$V \times A \xrightarrow{\mu} V$$

なる regular map $\mu(v, a) = v \cdot a$ が存在して,

$$\begin{cases} v \cdot e = v \quad (e \text{ は } A \text{ の零点}) \\ (v \cdot a_2) \cdot a_1 = v \cdot (a_2 + a_1) \end{cases}$$

を満す。更に V が principal homogeneous space for A over k (以下単に phs for A/k と記す) とは,

$\overset{\text{def}}{\iff}$
1) 任意の $v, v' \in V$ に対して
$$v \cdot a = v'$$
なる $a \in A$ が唯1つ定まる。
2) $$\begin{array}{ccc} V \times V & \longrightarrow & A \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ (v, v') & \longmapsto & a \end{array}$$
なる 1) で定まる map が k 上定義された regular map である。

V, V' が phs for A/k とするとき, $V \sim V'$ (k-isomorphic) とは,

$\overset{\text{def}}{\iff}$
$$V \xrightarrow{f} V'$$
なる k 上定義された biregular map f が存在して,
$$f(v \cdot a) = f(v) \cdot a$$

k 上定義された点 v_0 をもつ phs for A/k V は常に $V \sim A$ (その同型は $a \leadsto v_0 \cdot a$ によって与えられる)。又任意の phs for A/k は, k の適当な有限次分離拡大体上定義された

点をもつ。

V を phs for A/k とする。V の k_s (k の separable closure) 上定義された点を v とし，$\sigma \in Gal(k_s/k)$ (k_s/k の Galois group) に対して，

$$v^\sigma = v \cdot a_\sigma$$

なる $a_\sigma \in A$ が唯1つ存在し，$(a_\sigma)_{\sigma \in G}$ は 1-cocycle をなす。この対応 $V \rightsquigarrow (a_\sigma)$ によって，次の同型が得られる：

$$\begin{array}{l} H^1(k, A) = H^1(Gal(k_s/k), A) \\ \quad \wr\| \\ WC(k, A) = \{\text{phs for } A/k\}/\sim \end{array}$$

$\Sigma = \Sigma(k)$ を k の places の全体とする。$\Sigma \ni \mathfrak{z}$ に対して，$k_\mathfrak{z}$ を $\mathfrak{z}$ に関する k の完備化とすると，次の restriction map $\rho_\mathfrak{z}$ が存在する。

$$H^1(k, A) \xrightarrow{\rho_\mathfrak{z}} H^1(k_\mathfrak{z}, A)$$

A の Tate-Šafarevič group $Ш = Ш(A) = Ш(k, A)$ を次の exact な列によって定義する。

$$0 \longrightarrow Ш(A) \longrightarrow H^1(k, A) \xrightarrow{(\rho_\mathfrak{z})} \prod_{\mathfrak{z} \in \Sigma} H^1(k_\mathfrak{z}, A)$$

つまり，$Ш(A)$ は everywhere locally rational points をもつ phs for A/k の class の全体である。これについて次の conjecture がある。

<u>Conjecture 1</u> (Tate, Šafarevič, Lang and Cassels)

$\text{Ш}(A)$ は有限群である。

最近，Milne によって次の結果が得られた。

<u>Th.1 ([37])</u>

Aを，有限体k_0上定義された non-singular complete alg. curve Yの有理函数体k上定義された任意次元の abelian variety とする。このとき，もしAがその有限体k_0上定義されるなら，　$\text{Ш}(A)=\text{Ш}(k,A)$は有限群である。

証明は，BをYの Jacobian variety とすると，Tate ([33])，Oda ([38]) の結果を使って，

$$\begin{array}{c} Ext_k^1(B,A^*)\ ;\ \text{有限群} \\ \cong \\ \text{Ш}(k,A) \end{array} .$$

注1) reductive connected linear alg. groups に対して，Conjecture 1 が成立する ([4], [36])。

注2) kが代数的閉体上の1変数函数体のときには，Aを任意次元の abelian variety とすると，$\text{Ш}(A)$は有限群ではない (Ogg [22], Šafarevič [24], Raynaud [23])。

注3) Ш(A)が有限だと言っても，絶対的に有界だというのではない。例えば，$\dim_k A=1$に限って考えても，すべての1次元 abelian varieties に対して $[Ш(A)] < M$ というのではない。Cassels は $[Ш(A)]$ が十分大きい例を示した。つまり次の命題を与えた。

<u>Prop. 1</u> ([12])

p_j $(1\le j\le s)$ を相異なる $p_j\equiv -1 \bmod 9$ なる素数とし，$P=\prod_{1\le j\le s} p_j$ とおくと，次のような整数 d が存在する。

(1) $P\,|\,d$

(2) $mX^3+m^{-1}Y^3+dZ^3=0$

(但し，$m\,|\,P^2$, $m>1$ を満す)

なるすべての curves が everywhere locally rational points はもつが，globally rational point はもたない。

A を次の式で定義された 1-dim. な abelian variety とする:

$$x^3+y^3+dz^3=0$$

すると，curve $T=T(m)$ $(m\in\mathbb{Q}^*)$

$$mX^3+m^{-1}Y^3+dZ^3=0$$

は phs for $A/\mathbb{Q}$ となる。つまり

$$\begin{array}{ccc} V \times A & \xrightarrow{\mu} & V \\ \Psi & & \Psi \\ ((X,Y,Z)\times(x,y,z)) & \longrightarrow & \mu((X,Y,Z)\times(x,y,z)) = (X_0,Y_0,Z_0) \end{array}$$

を

$$\begin{cases} X_0 = YZx^2 - myzX^2 \\ Y_0 = ZXy^2 - m^{-1}zxY^2 \\ Z_0 = XYz^2 - xyZ^2 \end{cases}$$

とすればよい。　このとき 次の map ϕ が定義される。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q}^* & \xrightarrow{\phi} & H^1(\mathbb{Q}, A) \\ \Psi & & \Psi \\ m & \longrightarrow & \widetilde{V(m)} \end{array}$$

すると、Prop. 1 によって

$$Z(*) = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \mid P^2,\ m > 1\} \xhookrightarrow{\text{inj.}} H^1(\mathbb{Q}, A)$$

よって、　$3^s - 1 = [Z(*)] \leq [Ш(A)]$。

$\dim_k A = 1$ のとき、この conjecture の由来を調べてみよう。それには二つの理由がある。

(1) <u>Selmer's strong conjecture からくるもの</u> (p.109 [1])

m を p と素な自然数とし、$A_m = \{a \in A \mid ma = 0\}$ とすれば、

$$0 \longrightarrow A_m \longrightarrow A \xrightarrow{m} A \longrightarrow 0 \quad (k_s\text{-exact})$$

よって (p. 665, [21])

$$0 \longrightarrow A_k/mA_k \longrightarrow H^1(k, A_m) \longrightarrow H^1(k, A)_m \longrightarrow 0$$

（但し A_k は A の k-rational points のなす群，$H^1(k,A)_m = \mathrm{Ker}(H^1(k,A) \xrightarrow{m} H^1(k,A))$ ）

Selmer group S_m を次の exact な列で定義する。

$$0 \longrightarrow A_k/mA_k \longrightarrow S_m \longrightarrow Ш(A)_m \longrightarrow 0$$

すると，S_m は有限群（p.266,［15］），従って $Ш(A)_m = Ш(A) \cap H^1(k,A)_m$ も有限群である。特に $m = q^l$（$q \neq p$ なる素数）とすれば，

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A_k/q^{l+1}A_k & \longrightarrow & S_{q^{l+1}} & \longrightarrow & Ш(A)_{q^{l+1}} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A_k/qA_k & \longrightarrow & S_q & \longrightarrow & Ш(A)_q & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

こゝで，

$$\begin{cases} S^{(l)} = \mathrm{Im}(S_{q^{l+1}} \longrightarrow S_q), & M = \mathrm{Im}(A_k/qA_k \to S_q) \\ \nu(q^l) = \dim_{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}} S^{(l)}, & g = \dim_{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}} M \end{cases}$$

とおけば，

$$\begin{cases} M < \cdots < S^{(l)} < S^{(l-1)} < \cdots < S^{(0)} = S_q \\ \nu(q^l) \geq g \\ \nu(q^{l-1}) - \nu(q^l),\ \nu(q) - \nu(q^l)：\text{共に偶数 (p.264,［8］)} \end{cases}$$

これに関して，次の Selmer's strong conjecture がある。

<u>Conjecture 2</u>（Selmer）

十分大きい l に対して，$\nu(q^l) = g$

（これは $\bigcap_{l=0}^{\infty} S^{(l)} = M$ と同値（p.264,［8］））

Conjecture 1 は Conjecture 2 の自然な拡張である。

(2) Tamagawa Number の類似からくるもの ([14])

$\mathfrak{p} \in \Sigma$ に対て（こゝでは k は代数的数体とする）

$$d_{\mathfrak{p}}x = \begin{cases} \mathfrak{p}\text{-adic integers が 1 となるように正規化された} \\ \quad \text{加法的 Haar measure} & (\mathfrak{p};\ \text{non-archimedian}) \\ \text{普通の Lebesgue measure} & (\mathfrak{p};\ \text{real}) \\ 2\times(\text{普通の 2-dim. の Lebesgue measure}) & (\mathfrak{p};\ \text{complex}) \end{cases}$$

と定義し，$x(\mathfrak{x})$ を A の generic point $\mathfrak{x}$ の座標の一つとし，$\omega = f(\mathfrak{x})\,dx(\mathfrak{x})$ を k 上定義された A の才1種微分とする。（例えば，A を $y^2 = x^3 - g_2x - g_3$ で定義されるものとすれば，$\omega = y^{-1}dx$ と取れる。） ω は $k^{\times}$ の元の定数倍を除いて唯一つ定まる。又 ω は $A_{k_{\mathfrak{p}}}$ 上に Haar measure $d_{\mathfrak{p}}^{+}x$ の正規化を定義する：

$$\mu_{\mathfrak{p}}(\omega, E) = \int_{a \in E} |f(a)|_{\mathfrak{p}}\, d_{\mathfrak{p}}^{+}x(a)$$

（但し，E は $A_{k_{\mathfrak{p}}}$ の measurable subset，$|\ |_{\mathfrak{p}}$ は普通のように正規化された $\mathfrak{p}$-adic valuation，つまり

$$|\ |_{\mathfrak{p}} = \begin{cases} \pi \text{ を } k_{\mathfrak{p}} \text{ の素元とするとき，} |\pi|_{\mathfrak{p}} = (\text{剰余体の位数})^{-1} \\ & (\mathfrak{p};\ \text{non-archim.}) \\ \text{普通の絶対値} & (\mathfrak{p};\ \text{archim.}) \end{cases}$$

$\mu_\mathfrak{p}(\omega, E)$ は $\omega = f(x)\,d\chi(x)$ の函数 f の選び方によらず，Haar measure となる。つまり $A_{k_\mathfrak{p}}$ の transformation に関して invariant である。linear alg. group の対応する結果については，Weil [35] を見よ。

ω' を k 上定義された A 上の他の第1種微分とすれば，

$$\begin{cases} \omega' = \alpha\omega & (\alpha \in k^*) \\ \mu_\mathfrak{p}(\omega', E) = |\alpha|_\mathfrak{p}\, \mu_\mathfrak{p}(\omega, E) \end{cases}$$

特に，

$$\prod_\mathfrak{p} \frac{\mu_\mathfrak{p}(\omega', A_{k_\mathfrak{p}})}{\mu_\mathfrak{p}(\omega, A_{k_\mathfrak{p}})} = \prod_\mathfrak{p} |\alpha|_\mathfrak{p} = 1$$

よって，もし $T(A)^{-1} = \prod_\mathfrak{p} \mu_\mathfrak{p}(\omega, A_{k_\mathfrak{p}})$ が収束すれば，それは ω の選び方によらず，A と k のみによってきまる。（A が complex multiplication をもっているときには，[2]，[3] で考察されている。）　そして，A が $\mathfrak{p}$ で good reduction をもてば（実際ほとんどすべての $\mathfrak{p}$ でそうであるが）

$$\mu_\mathfrak{p}(\omega, A_{k_\mathfrak{p}}) = \frac{N_\mathfrak{p}}{\mathrm{Norm}\,\mathfrak{p}} \overset{\mathrm{d}}{=} \frac{\#\{A \bmod \mathfrak{p} \text{ の rational points}\}}{\text{absolute Norm } \mathfrak{p}}$$

更に，$k = \mathbb{Q}$ で，$\mathfrak{p} = p$ のときには

$$\mu_\mathfrak{p}(\omega, A_{k_\mathfrak{p}}) = \frac{N_\mathfrak{p}}{p}$$

一方，Lang ([20]) は有限体 k_0 上の isogenous alg.

group は同じ個数の k_0-rational points をもつことを示した。$A^{(1)}, A^{(2)}$ が isogenous であり，$\omega^{(1)}, \omega^{(2)}$ を k 上定義された $A^{(1)}, A^{(2)}$ の才1種微分とする。このとき，$A^{(1)}$ が $\mathfrak{p}$ で good reduction をもてば，$A^{(2)}$ もそうであり (IV-5, [27]),

$$\mu_{\mathfrak{g}}(\omega^{(1)}, A^{(1)}_{k_{\mathfrak{g}}}) = \mu_{\mathfrak{g}}(\omega^{(2)}, A^{(2)}_{k_{\mathfrak{g}}})$$

よって，

$$T(A^{(1)}/A^{(2)}) = \prod_{\mathfrak{g}} \frac{\mu_{\mathfrak{g}}(\omega^{(2)}, A^{(2)}_{k_{\mathfrak{g}}})}{\mu_{\mathfrak{g}}(\omega^{(1)}, A^{(1)}_{k_{\mathfrak{g}}})}$$

が well-defined であり，$T(A^{(i)})$ $(i=1,2)$ が定義されれば，

$$T(A^{(1)}/A^{(2)}) = \frac{T(A^{(1)})}{T(A^{(2)})}$$

$A^{(1)} \xrightarrow{\nu_1} A^{(2)}$ が isogeny で，$\mathrm{Ker}\,\nu_1 \overset{d}{=} \Delta^{(1)}$，$H^1(k, A^{(1)})_{\nu_1} \overset{d}{=} \mathrm{Ker}(H^1(k, A^{(1)}) \longrightarrow H^1(k, A^{(2)}))$，$Ш^{(1)}_{\nu_1} \overset{d}{=} Ш(A^{(1)}) \cap H^1(k, A^{(1)})_{\nu_1}$ とすれば，

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A^{(2)}_k/\nu_1 A^{(1)}_k & \longrightarrow & H^1(k, \Delta^{(1)}) & \longrightarrow & H^1(k, A^{(1)})_{\nu_1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \cup & & \cup & & \\
0 & \longrightarrow & A^{(2)}_k/\nu_1 A^{(1)}_k & \longrightarrow & S^{(\nu_1)} & \longrightarrow & Ш^{(1)}_{\nu_1} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

以上の記号の下に，次のことが得られる (p.184〜5, [14])。

<u>Prop 2</u>

$A^{(1)} \xrightarrow{\nu_1} A^{(2)}$, $A^{(2)} \xrightarrow{\nu_2} A^{(1)}$

が dual isogenies とすると,

$$T(A^{(1)}/A^{(2)})=\frac{|S^{(\nu_1)}||(A_k^{(2)})_{\nu_2}|}{|S^{(\nu_2)}||(A_k^{(1)})_{\nu_1}|}$$

更に, $\text{Ш}^{(1)}$ (あるいは $\text{Ш}^{(2)}$) が有限なら

$$\begin{cases} \text{Ш}^{(2)}\ (\text{あるいは}\ \text{Ш}^{(1)})\ \text{も有限で} \\ T(A^{(1)}/A^{(2)})=\dfrac{|A_k^{(2)}/\nu_1 A_k^{(1)}||(A_k^{(2)})_{\nu_2}||\text{Ш}^{(1)}|}{|A_k^{(1)}/\nu_2 A_k^{(2)}||(A_k^{(1)})_{\nu_1}||\text{Ш}^{(2)}|} \end{cases}$$

更に, $A_k^{(1)}$ (あるいは $A_k^{(2)}$) が有限なら

$$\begin{cases} A_k^{(2)}\ (\text{あるいは}\ A_k^{(1)})\ \text{も有限で} \\ T(A^{(1)}/A^{(2)})=\dfrac{|A_k^{(2)}|^2\,|\text{Ш}^{(1)}|}{|A_k^{(1)}|^2\,|\text{Ш}^{(2)}|} \end{cases}$$

上のことから, Tate-Šafarevič group が有限であることが望ましい。

Tate-Šafarevič group について最も興味ある結果は次のもの。

Th. 2 (Th. 26.1, [15])

Aを代数的数体k上定義された1次元の abelian variety とする。Aの Tate-Šafarevič group $\text{Ш}=\text{Ш}(k,A)$ に次の skew-symmetric pairing l

$$\text{Ш}\times\text{Ш}\xrightarrow{\ l\ }\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

が存在して，Ker l は Ш の divisible elements のなす群 Э と一致する。

<u>Cor. 1</u>

もし Ш が有限なら，その個数 [Ш] は平方．

<u>Cor. 2</u>

$Ш(q)/Э(q)$ は有限群．

（但し，$Ш(q)$, $Э(q)$ はそれぞれ Ш, Э の q-primary parts）

Th. 2 は任意次元の abelian varieties に拡張される．つまり

<u>Th. 2′</u>（Th. 3.2, [30]）

A を k 上定義された任意次元の abelian variety とし，A' を A の dual i.e $A' = Ext(A, G_m)$（G_m は k 上の乗法群）とする。A, A' の Tate-Šafarevič groups Ш, Ш′ の q-primary parts $Ш(q)$, $Ш'(q)$ $(q \neq p)$ に bilinear pairing l'

$$Ш(q) \times Ш'(q) \xrightarrow{l'} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

が存在して，Ker l' は $Ш(q)$ の divisible elements のなす群と一致する。

注4) この定理の証明には、Casselsの方法と abstract cohomology theory を使用するものとの二つがある。

$p \neq q$ なる素数 q に対して、$H^i(k, A; q)$ を i-dim cohomology group $H^i(k, A)$ の q-primary part とし、
$\mathrm{Ker}^i(k, A; q) = \mathrm{Ker}\,(H^i(k, A; q) \longrightarrow \prod_{q \in \Sigma} H^i(k_q, A; q))$ とする。特に $\mathrm{Ker}^1(k, A; q) = Ш(k, A)(q) = Ш(q)$.
M を $G = Gal(k_s/k)$ 上の有限加群、M' を M の Cartier dual i.e. $M' = Hom(M, G_m)$ とし、locally compact abelian group D の Pontrjagin character group を D^* と書けば、

$$H^0(k_q, M) \simeq H^2(k_q, M')^* \quad (\text{Th.2.1, [30]})$$

よって、次の paring l'' が存在する。

$$\mathrm{Ker}^0(k, A; q) \times \mathrm{Ker}^2(k, A'; q) \xrightarrow{\ l''\ } Q/Z$$

(但し、$A' = \mathrm{Ext}(A, G_m)$)
又 $H^0(k_q, A) \simeq H^1(k_q, A')^*$ であるから、準同型

$$\prod_{q \in \Sigma} H^0(k_q, A) \xrightarrow{\ \beta\ } H^1(k, A')^*$$

が存在する。このとき、

<u>Th. 3</u> (Th. 3.4, [30])

上の記号の下に、次のものは同値。

(1) $\mathrm{Ker}^1(k, A; \ell) = Ш(\ell)$; 有限

(2) $\begin{cases} \mathrm{Im}\left(H^0(k, A; \ell) \longrightarrow \prod_{\ell} H^0(k_\ell, A; \ell)\right) = \mathrm{Ker}\,\beta \\ \text{pairing } \ell'' \text{ が完全な duality を与える。} \end{cases}$

Conjecture 1 より弱い次の Conjecture がある。

<u>Conjecture 3</u> (Tate)

$Ш(\ell)$ は有限群である。

<u>例</u> (Selmer [26], [27])

A を $x^3+y^3-cz^3=0$ で定義される 1-dim elliptic curve とすると，$Ш(3)$ は有限群である．($0 \leq c \leq 500$)

注5) k を代数的閉体上の1変数函数体とし，A を k 上定義された任意次元の abelian variety とすれば，$Ш(\ell) = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$ の直積) は無限群となる。

<u>§2. Brauer group</u>

次の conjecture がある。

<u>Conjecture 4</u> (M. Artin)

k_0 を有限体とする。X を $\mathrm{Spec}(k_0)$ 上の proper scheme とすれば，$Br(X)$ は有限群である．

(a) $\dim X = 1$ のとき, Conjecture 4 は成立. 実際

<u>Th. 4</u>

X を k_0 上定義された complete alg. curve とすれば,

$$Br(X) = 0$$

この証明は, structure hom. $f : X \longrightarrow Spec(k_0)$ に対して, $R^q f_*(G_m) = 0 \ (q \geq 2)$ と Leray のスペクトル列 $E_2^{p,q} = H^p(k_0, R^q f_*(G_m)) \Longrightarrow H^*(X, G_m)$ を適用し, 更に, Lang の定理 $H^1(k_0, L) = 0$ (L ; alg. group/k) を使って,

$$Br(X) = H^2(X_{et}, G_m) = H^1(k_0, \mathbb{Z}) = 0$$

と帰着させる。

上の証明でも使用するので, $H^*(?, G_m)$, $Br(?)$ の計算できるものを表にしておく。

I	(C_1)-type の体 K (1) 代数的閉体上の1変数函数体 (2) 離散的附値に関して完備な体 K で, その剰余体が代数的閉体 (3) 有限体 K	$H^i(K, G_m) = 0 \ (i \geq 1)$
II	$K = \mathbb{R}$: 実数体	$Br(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
III	離散的附値に関して完備な体 K で その剰余体が有限体	$Br(K) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

IV	代数的数体K	$0\to Br(K)\to \sum_{v} Br(K_v)\to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\to 0$
V	X；代数的閉体上定義された alg. curve	$Br(X)=0$
VI	X；分離的閉体上定義された proper alg. curve	$Br(X)=0$
VII	$X=P_2$；有限体又は分離的閉体上の2次元 projective space	$Br(P_2)=0$
VIII	X；有限体上定義された complete alg. curve	$H^1(X,\mathbb{G}_m)=0$ $H^2(X,\mathbb{G}_m)=Br(X)=0$ $H^3(X,\mathbb{G}_m)=(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^c$ $H^i(X,\mathbb{G}_m)=0\ (i\geq 4)$
IX	$X=\mathrm{Spec}(O_K)$ （O_K；代数的数体Kの整数環） (1) K；purely imaginary のとき	$H^1(X,\mathbb{G}_m)=0$ $H^2(X,\mathbb{G}_m)=Br(X)=0$ $H^3(X,\mathbb{G}_m)=\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ $H^i(X,\mathbb{G}_m)=0\ (i\geq 4)$
	(2) K；real place が唯1つのとき	$Br(X)=0$
	(3) $K=\mathbb{Q}$ のとき	$Br(X)=0$

(b) $\dim X = 2$ のとき，ある特別な場合には"大体"
Conjecture 4 は成立する．つまり

Th. 5 ([34])

$$X = \begin{cases} k_0 \text{上定義された 2 次元の abelian variety か} \\ \text{共に } k_0 \text{上定義された alg. curves の直積} \end{cases}$$

このとき，

$$B_r(X)(\text{non } p) = \prod_{\ell \neq p} B_r(X)(\ell) \text{ は有限群}$$

この証明には，次の結果 (Th. 5.2, [33]) を使用する．

Th. 6

X を k_0 上定義された projective smooth alg. surface とし，$\bar{X} = X \times_{k_0} \bar{k}_0$ ($\bar{k}_0$; k_0 の代数的閉包) が connected とする．このとき，次のものは同値．

(1) $B_r(X)(\ell)$; 有限 ($\ell \neq p$)

(2) $NS(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell \simeq H^2(\bar{X}, T_\ell(\mu))^G$

(但し
$NS(X)$; X の Néron-Severi group
$\mathbb{Z}_\ell = \varprojlim_n \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$
$T_\ell(\mu)$; 1 の巾根のなす群 μ の Tate ℓ-group)

更に，このどれかが成立すれば

$$B_r(X)(\text{non } p) \text{ ; 有限群}.$$

注6) Th.6の記号の下に, Th.2又はTh.2′に対応する結果が成立する(Tate, Th.5.1, [33])。

$$Br(X)(\text{non}\,p) \times Br(X)(\text{non}\,p) \xrightarrow{\ l^*\ } \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

なるskew-symmetric paring l^*が存在し, $\mathrm{Ker}\, l^*$は$Br(X)(\text{non}\,p)$のdivisible elementsのなす群と一致する。

§3. Tate-Šafarevič group と Brauer group との関係

今迄みたように, Tate-Šafarevič group と Brauer group とはほとんど平行した理論が成立する。それらの間に何んらかの関係があるように思われる。それは次の定理で与えられる。

Th.7 (Th.3.1, [33])

$$Y = \begin{cases} \mathrm{Spec}(O_K)\text{の open subset (但し } O_K\text{; 代数体の整数環)か} \\ \text{有限体 } k \text{ 上定義された irreducible smooth curve-scheme} \end{cases}$$

$f: X \longrightarrow Y$ をdim 1のfibreをもつproper morphismとし, 更に

$$\left(\begin{array}{l} X;\ \text{dim.2 の regular scheme} \\ f\text{ の geometric fibre; connected} \\ f\text{ の generic fibre; smooth} \end{array} \right)$$

とする。 このとき, もしfがsectionをもてば, 次のexact

な列が得られる。

$$0 \longrightarrow Br(Y) \longrightarrow Br(X) \longrightarrow Ш^0(k, A) \longrightarrow 0$$

但し，k は Y の有理函数体とし，A は generic fibre の Jacobian variety とする。$Y^{(0)}$ を Y の closed points の集合とするとき，$Ш^0(k, A)$ は次の exact な列で定義される。

$$0 \longrightarrow Ш^0(k, A) \longrightarrow H^1(k, A) \longrightarrow \prod_{y \in Y^{(0)}} H^1(k_y, A)$$

勿論 $Ш^0(k, A) \supset Ш(k, A)$ である。）

この定理の証明には，次の命題が基本的である。

<u>Prop. 3</u> (M. Artin)

Y を Th. 7 の如くして，$f: X \longrightarrow Y$ を dim 1 の fibre をもつ proper morphism とし，X を dim. 2 の regular scheme とする。このとき

$$R^q f_*(G_{m,X}) = 0 \quad (q \geq 2)$$

注7）特に k が totally imaginary で $Y = \mathrm{Spec}(O_k)$ なら

$$Ш^0(k, A) = Ш(k, A)$$

注8）Y が k_0 上定義された irred. smooth alg. curve schemeの場合，特にYがcompleteなら

$$\begin{cases} Br(Y)=0 \\ Br(X)=Ш^0(k,A)=Ш(k,A) \end{cases}$$

よって，この場合には，$Br(X)$が有限群であることと$Ш(k,A)$が有限群であることとは同値である。

参考文献（更に[15],[19]の巻末の文献表を参照されたい。）

[1] B.J.Birch, Conjectures concerning elliptic curves, Pro. Symposia in Pure Math., VIII (1965), p.106-112.

[2] B.J.Birch and H.P.F.Swinnerton, Notes on elliptic curves (I), J.reine angew. Math., 212(1963), p.7-25.

[3] ————————, Notes on elliptic curves (II), J. reine angew. Math., 218(1965), p.79-108.

[4] A.Borel, Some finiteness properties of adele groups over number fields, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., 16(1963), p.5-30.

[5] J.W.S.Cassels, The rational solutions of the Diophantine equation $Y^2=X^3-D$, Acta Math., 82(1950), p.243-273.

[6] ————, Arithmetic on curves of genus 1 (I), J. reine angew. Math., 202(1959), p.52-99.

[7] ————, ———— 〃 ———— (II), J. reine angew. Math., 203(1960), p.174-208.

[8] J.W.S.Cassels, Arithmetic on curves genus 1 (III),
London Math. Soc., 12(1962), p.236-296.

[9] ——————, ——————〃—————— (IV),
J. reine angew. Math., 211(1962), p.95-112.

[10] ——————, Arithmetic on elliptic curves, Proc. Intern.
Congress Math. Stockholm, 1962, p.234-246.

[11] ——————, Arithmetic on curves of genus 1 (V),
J. London Math. Soc., 38(1963), p.244-248.

[12] ——————, ——————〃—————— (VI),
J. reine angew. Math., 214(1964), p.65-70.

[13] ——————, ——————〃—————— (VII),
J. reine angew. Math., 216(1964), p.150-158.

[14] ——————, ——————〃—————— (VIII),
J. reine angew. Math., 217(1965), p.180-199.

[15] ——————, Diophantine equations with special reference
to elliptic curves, J. London Math. Soc., 41(1966),
p.193-291.

[16] J.W.S.Cassels and A.Frolich, Algebraic number theory,
1967, Academic Press.

[17] A.Grothendieck, Fondaments de la Geometrie Algebrique,
Secretariat Math., 11rue Pierre Curie, Paris.

[18] A.Grothendieck, Le groupe de Brauer, I, II, Seminaire Bourbaki, 290(1964) and 297(1965).

[19] ____________, ____________ " ____________, III, Seminaire Bourbaki

[20] S.Lang, Algebraic groups over finite fields, Amer. J. of Math., 78(1956), p.555-563.

[21] S.Lang and J.Tate, Principal homogeneous spaces over abelian varieties, Amer. J. of Math., 76(1962), p.659-684.

[22] A.P.Ogg, Cohomology of abelian varieties over function fields, Ann. of Math., 76(1962), p.185-212.

[23] M.Raynaud, Caracteristique d'Euler-Poincare d'un faisceau et cohomologie des varietes abeliennes, Seminaire Bourbaki 287(1964).

[24] I.R.Šafarevič, Principal homogeneous spaces defined over a function field, Amer. Math. Soc. Trans., 37(1964). p.85-114.

[25] ____________, Algebraic number fields, Proc. Intern. Congress Math. Stockholm, 1962, p.163-176.

[26] E.S.Selmer, The diophantine equation $ax^3+by^3+cz^3=0$, Acta Math., 85(1951), p.203-362.

[27] ____________, The diophantine equation $ax^3+by^3+cz^3=0$. Completion of the tables, Acta Math., 92(1954), p.191-197

[28] J.P.Serre, Cohomologie galoisenne, Springer, 1964.

[29] ________, Abelian ℓ-adic representations and elliptic ~~curve~~ curves, W.A.Benjamin, Inc. , 1968.

[30] J.Tate, Duality theorems in galois cohomology over number fields, Proc. Intern. Congress Math. Stockholm, 1962, p.288-295.

[31] ______, Principal homogeneous spaces for abelian varieties, J. reine angew. Math., 209(1962), p.98-99.

[32] ______, Algebraic cohomology classes, Woods Hole Summer Institute on Algebraic Geometry, 1964.

[33] ______, On the conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer and a geometric analog, Seminaire Bourbaki 306(1965).

[34] ______, Endomorphisms of abelian varieties over finite fields, Invent. Math., 2(1966), p.134-144.

[35] A.Weil, Adeles and algebraic groups, Lecture Notes, Princeton, 1961.

(追加)

[36] A.Borel and J.P.Serre, Theoremes de finitude en cohomologie galoisienne, Comm. Math. Helvetice, 39(1964), p.111-164.

[37] J.S.Milne, Extensions of abelian varieties defined over a finite field, Invent. Math., 5(1968), p.63-84.

[38] T.Oda, Abelian varieties over a perfect field and Dieudonne modules. Thesis, Harvard University, 1967.