数理解析研究所講究録
第54巻 1968年 62-65

p群の或例について

中村喜理雄

次のようにつくられたp群をいくつかの点から検討する.

(以下$\{\cdots\}$は$\cdots$の生成する群の意である).

$\mathfrak{A}=\{A_1\}\times\{A_2\}\times\cdots\times\{A_{p+1}\}$, $|A_i|=p$ $(i=1,\cdots,p+1)$

$\mathfrak{A}$を$GF(p)$上のベクトル空間と考えてA, Bが$\mathfrak{A}$に次のautomorphismをひきおこすとする: $(p>2)$

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ 1 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \bar{B}=\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & 0 & \ddots & \\ -1 & & & & \ddots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\bar{A}, \bar{B}$は忽論次数は$p+1$である。

又 $A^{p^2}=A_1^{-1}$, $BAB^{-1}=A^{1+p}A_2$, $B^p=A_2$とすると, 群拡大

$\mathfrak{G}=\{\mathfrak{A}, A, B\}$は位数が$p^{p+4}$の$p$群になる。

これは

(I) Blackburnの意味でmaximal class

である;つまり$\mathfrak{G}$のclassは ($|\mathfrak{G}|=p^{p+4}$の条件で)

最大の $p+3$ である。これから(II)がえられる

(II) 一般に $\max_{G \in \mathfrak{G}} |\mathfrak{G} : Z_{\mathfrak{G}}(G)| = p^{\beta(\mathfrak{G})}$

$\beta(\mathfrak{G})$を $\mathfrak{G}$ の Breite とよぶことにすると，上の $\mathfrak{G}$ では

$\beta(\mathfrak{G}) = p+1$ であり，従って"$1+\beta(\mathfrak{G}) < \mathfrak{G}$ の class"

となる（$\beta(\mathfrak{G}) < p$ のときは"$\beta(\mathfrak{G}) + 1 \geqq$

$\mathfrak{G}$ の class"が Wielandt によりえられたようである：彼からの便りによる）。しかし $\beta(\mathfrak{G}) > p$ では

もはや成立たないことを $\mathfrak{G}$ は示している。更に

(III) $\mathfrak{G}$ で $\mathfrak{N} = \{A_2, \cdots\cdots, A_{p+1}, B\}$ と

おくと

(1) $\mathfrak{G}$ で $\mathfrak{N}$ は quasi-normal*.

(2) $\mathfrak{N}$ は $\mathfrak{G}$ の E 以外の normal subgroup を含まない．即ち $\underline{\mathfrak{N}} = E$（ただし $\underline{\mathfrak{N}} = \bigcap_{X \in \mathfrak{G}} X\mathfrak{N}X^{-1}$）

(3) $\mathfrak{N}$ は abelian でない。

---

* $\mathfrak{N}$ は $\mathfrak{G}$ のどの部分群とも全体として可換である

一般に p 群で $\mathfrak{G}$ 又は（normal でない）quasi-normal subgroup $\mathfrak{N}$ に何か条件をつけると $\mathfrak{N}/\underline{\mathfrak{N}}$ が abelian になることがわかっている（[1], [5]）が上の $\mathfrak{G}$ は一般には成立たないことを示している。更に必ずしも p 群とは限らない一般の有限群について $\mathfrak{N}/\underline{\mathfrak{N}}$ は p 群になることがわかっている（[3]）が，

p群に限定したとき否定的な結果（少くとも一般には）がえられたから一応，一般の有限群の場合とは孤立した結果と考えられよう。

文献

[1] Deskins, W. E. : On Quasinormal Subgroups of Finite Groups. Math. Zeitschr. 82, 125～132 (1963)

[2] Huppert, B. : Endliche Gruppen. Springer Verlag, Berlin Heidelberg (1967)

[3] Ito, N. und Szép, J. : Über Quasinormalteiler von endlichen Gruppen. Acta Sci. Math. Szeged 23, 168～170 (1962)

[4] Knoche, H. G. : Über den Frobenius-schen Klassenbegriff in nilpotenten Gruppen. Math. Zeitschr. 55, 71-83 (1951)

[5] Nakamura, K. : Über einige Beispiele der Quasinormalteiler einer p-Gruppe. Nagoya Math. Journ.

Vol. 31 January, (1968)