数理解析研究所講究録
第 55 巻 1968 年 43-52

フーリェ変換のmultiplierについて

東北大 理　猪狩 惺

§1. 定義

λをn次元ユークリッド空間R^n上で定義された有界可測関数とするとき，$g \in \mathcal{S}(R^n)$に対してmultiplier変換を

$$S_\lambda(x, g) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{R^n} \hat{g}(\xi) \lambda(\xi) e^{i\xi x} d\xi, \quad x \in R^n$$

によって定義する。ここに，

$$\hat{g}(\xi) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{R^n} g(y) e^{-iy\xi} dy, \quad \xi \in R^n$$

である。$T^n = \prod_1^n [-\pi, \pi[$ とするとき，フーリエ級数のmultiplier変換は，同様にして，

$$s_\lambda^u(x, f) = \sum_{m \in Z^n} \lambda\left(\frac{m}{u}\right) \hat{f}_m e^{imx}, \quad u > 0, \ x \in T^n$$

によって定義される。ここに，$f \in C^\infty(T^n)$，$\hat{f}_m$はfのm番目のフーリエ係数である。

$S_\lambda(g)$, $s_\lambda^u(f)$は，夫々．フーリエ変換，級数の入による multiplier 変換といわれる。

§2．同値性

定理1．　$1 \le p < \infty$，λはR^n上の有界関数で．不連続点の集合は零集合であるとする。もし

$$\| s_\lambda^u(f) \|_p \le A \| f \|_p \quad \text{for all } u>0 \text{ and } f \in C^\infty(T^n)$$

ならば．

$$\| S_\lambda(g) \|_p \le A' \| g \|_p \quad \text{for all } g \in \mathcal{S}(R^n)$$

が成り立つ。ここに．$A' = (\sqrt{2\pi})^{n/p'} A$である．

証明．　関数$\Phi(x)$，$x \in R^n$，を$\hat{\Phi}(\xi) = \prod_1^n \max(1-|\xi_j|, 0)$によって定義する。そのとき．

$$\Phi(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \prod_1^n \left\{ \frac{2\sin(x_j/2)}{x_j} \right\}^2$$

であるから，$0 \le \Phi \le 1$。容易に分るように．$\sum_{m \in Z^n} \Phi(x + 2\pi m) = (\sqrt{2\pi})^n$，$\sum_{m \in Z^n} \hat{\Phi}(\xi - m) = 1$である。

定理を証明するために，$g \in \mathcal{S}(R^n)$はコンパクトな台をもつとしてよい。従って，$g_u(x) = u^n g(ux)$とおき．$u>0$を$g_u(x)$の台がT^nに含まれるよう十分大きくとっておく。そ

のとき仮定から

$$\left(\int_{T^n}|s_\lambda^u(g_u)|^p dx\right)^{1/p} \leq A\left(\int_{T^n}|g_u|^p dx\right)^{1/p}$$

$$= A\, u^{n(1-\frac{1}{p})}\left(\int_{R^n}|g|^p dx\right)^{1/p}$$

$h_u(x) = u^{-n} s_\lambda^u(x/u,\, g_u)\,\Phi(x/u)$ とおくと，$\Phi^p \leq \Phi$ であるから，

$$\left(\int_{R^n}|h_u|^p dx\right)^{1/p} = u^{-n(1-\frac{1}{p})}\left(\int_{R^n}|s_\lambda^u(x,g_u)|^p\,\Phi^p(x)dx\right)^{1/p}$$

$$\leq u^{-n(1-\frac{1}{p})}\left(\int_{T^n}|s_\lambda^u(x,g_u)|^p \sum_{m\in Z^n}\Phi(x+2\pi m)dx\right)^{1/p}.$$

従って

$$\left(\int_{R^n}|(\sqrt{2\pi})^n h_u(x)|^p dx\right)^{1/p} \leq A'\left(\int_{R^n}|g|^p dx\right)^{1/p}$$

従って $\lim_{u\to\infty}(\sqrt{2\pi})^n h_u(x) = S_\lambda(x,g)$ がすべての $x\in R^n$ に対して成り立つことを言えば，Fatou の lemma から求める結果が得られる。

g は無限回微分できるとしたから，

$$s_\lambda^u(x,g_u) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\sum \lambda\left(\frac{m}{u}\right) g\left(\frac{m}{u}\right) e^{imx}$$

従って

$$(\sqrt{2\pi})^n \hat{h}_u(\xi) = \int_{R^n} S_\lambda^u(x, g_u)\, \Phi(x)\, e^{-iux\xi}\, dx$$

$$= \sum \lambda\left(\frac{m}{u}\right) \hat{g}\left(\frac{m}{u}\right) \hat{\Phi}(u\xi - m).$$

明らかに、ξがλの連続点であれば、$(\sqrt{2\pi})^n \hat{h}_u(\xi) \to \lambda(\xi)\hat{g}(\xi)$ $(u \to \infty)$。所で、$u \geq \sqrt{n}$であれば、$\hat{\Phi}(u\xi - m) = 0$ がすべての $\left|\xi - \frac{m}{u}\right| \geq 1$ に対して成りたつ。gの仮定から $\sup_{|\xi-\eta|\leq 1} |\hat{g}(\eta)| \leq G(\xi)$ がある可積分関数Gに対して成りたつ。従って、

$$\left|(\sqrt{2\pi})^n \hat{h}_u(\xi)\right| \leq \|\lambda\|_\infty G(\xi) \quad , u \geq \sqrt{n}$$

従って Lebesgue の定理によって、

$$\lim_{u \to \infty} (\sqrt{2\pi})^n h_u(x) = S_\lambda(x, g) \quad , x \in R^n$$

故に証明された。

次に定理1の逆を示そう。これは de Leeuw の定理の特別な場合であって、ここで与える証明はより初等的である。

R^n上で定義された関数 $\lambda(\xi)$ が総和可能であるとは、ある approximate identity $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ が存在して、すべての点 $\xi \in R^n$で

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varphi_\varepsilon * \lambda(\xi) = \lambda(\xi)$$

が成り立つことであるとする。

定理2．（de Leeuw） $1<p<\infty$, λ は有界総和可能な関数であるとする。もし

$$\| S_\lambda(g)\|_p \leq A\|g\|_p, \quad g\in \mathcal{S}(R^n)$$

が成りたてば，

$$\| s_\lambda^u(f)\|_p \leq A'\|f\|_p, \quad f\in C^\infty(T^n),\ u>0$$

が成り立つ。ここに，$A'=cA$ で c は p に無関係な定数である。

証明． 変数変換によって，仮定が $\lambda(\xi)$ について成りたてば $\lambda(\frac{\xi}{u})$ $(u>0)$ についても成りたつから，$u=1$ の場合を示せばよい。

$g,\ h\in C^\infty(T^n)$ とする。$g,\ h$ を R^n 上に $g=h=0$ outside T^n とおいて拡張しておく。Φ の定義から $t>2$ に対しては，

$$\sum r_1^{2|m_1|}\cdots r_n^{2|m_n|}\, t^n\int_{R^n}\lambda(\xi+m)\,\hat{g}(\xi+m)\,\hat{h}(\xi+m)\,\hat{\Phi}^2(t\xi)\,d\xi$$

$$= t^n\int_{R^n}\left[\lambda(\xi)\hat{g}(\xi)\sum\hat{\Phi}(t(\xi-m))\,r_1^{|m_1|}\cdots r_n^{|m_n|}\right]\cdot$$

$$\left[\hat{h}(\xi)\sum\hat{\Phi}(t(\xi-m))\,r_1^{|m_1|}\cdots r_n^{|m_n|}\right]d\xi$$

である。ここに $0<r_1,\dots,r_n<1$ である。今、被可積分関数の第二項を $t^{-n}\hat{H}_t(\xi)$、そして

$$t^{-n}\hat{G}_t(\xi)=\hat{g}(\xi)\sum\hat{\Phi}(t(\xi-m))\,r_1^{|m_1|}\cdots r_n^{|m_n|}$$

とおけば (1) の左辺は

$$\left|t^{-n}\int_{R^n}S_\lambda(G_t)H_t\,dx\right|$$

$$\leq t^{-n}\|S_\lambda(G_t)\|_p\|H_t\|_{p'}\leq A\,t^{-n}\|G_t\|_p\|H_t\|_{p'}$$

でおさえられる。所で

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}t^n\int_{R^n}\hat{\Phi}(t(\xi-m))\,e^{i\xi x}d\xi=\Phi\left(\frac{x}{t}\right)e^{imx}$$

であるから

$$G_t(x)=2^n\int_{R^n}g(y)\,\Phi\left(\frac{x-y}{t}\right)P_r(x-y)\,dy$$

ここに $P_r(x)$ は Poisson 核、$P_r(x)=\prod_{j=1}^n P_{r_j}(x_j)$, $r=(r_1,\cdots,r_n)$ である。故に

$$\varlimsup_{r\to(1,\cdots,1)}\frac{1}{t^{n/p}}\|G_t\|_p$$

$$\leq 2^n\left\{\frac{1}{t^n}\int_{R^n}\varlimsup_{r}\left[\int_{T^n}|g(y)|\,\Phi\left(\frac{x-y}{t}\right)P_r(x-y)\,dy\right]^p dx\right\}^{1/p}$$

$$= (2\pi)^n \left\{ \frac{1}{t^n} \sum_m \Phi^p\left(\frac{2\pi m}{t}\right) \int_{T^n} |g(y)|^p dy \right\}^{1/p}$$

$$\leqq (2\pi)^n \|g\|_p \left\{ \frac{1}{t^n} \sum_m \Phi\left(\frac{2\pi m}{t}\right) \right\}^{1/p}.$$

$t \to \infty$のとき、最後の和はRiemann積分の定義によって $\int_{R^n} \Phi(2\pi x)\, dx = (2\pi)^{-n}$ に収束する。従って

$$\lim_{t\to\infty} \overline{\lim_r} \frac{1}{t^n} \|G_t\|_p \|H_t\|_{p'} \leqq (2\pi)^n \|g\|_p \|h\|_{p'}.$$

又、もしφが連続ならば、$\lim_{t\to\infty} t^n \int_{R^n} \varphi(\xi) \hat{\Phi}^2(t\xi)\, d\xi = (2/3)^n \varphi(0)$であるから、(1)によって、

$$\left| \sum \lambda(m) \hat{g}(m) \hat{h}(m) \right| \leqq \left(\frac{3}{2}\right)^n (2\pi)^n A \|g\|_p \|h\|_{p'}$$

が連続なλに対して成りたつ。一般のλに対しては次の補助定理を用いればよい。

補助定理. もしλが $\|S_\lambda(g)\|_p \leqq A\|g\|_p$, $g \in \mathcal{S}(R^n)$ なる *multiplier* ならば、任意の可積分関数φに対して、 $\|S_{\lambda*\varphi}(g)\|_p \leqq A\left(\int|\varphi|\, dx\right)\|g\|_p$, $g \in \mathcal{S}(R^n)$.

証明. $g, h \in \mathcal{S}(R^n)$とすると

$$\begin{aligned}\int (\lambda * \varphi) \hat{g} \hat{h}\, d\xi &= \int \varphi(y)\, dy \int \hat{g}(\xi) \hat{h}(\xi) \lambda(\xi - y)\, d\xi \\ &= \int \varphi(y)\, dy \int S_\lambda(g e^{iy}) h e^{iyx}\, dx.\end{aligned}$$

最後の項は $\|\varphi\|_1 \|S_\lambda(g e^{iy})\|_p \|h\|_{p'} \leq \|\varphi\|_1 A \|g\|_p \|h\|_{p'}$ でおさえられる。

§3. 応用

(I) 多変数フーリエ級数の発散. $f \in L^1(T^n)$ に対して $(B\text{-}R, \sigma)$ 和 $s_R^\sigma(x, f)$ は次式で定義される。

$$s_R^\sigma(x, f) = \sum_{|m|<R} \left(1 - \frac{|m|^2}{R^2}\right)^\sigma \hat{f}_m e^{imx}$$

定理3. もし $1 \leq p \leq 2n/(n+1+2\sigma)$ なら $L^p(T^n)$ の関数が存在して, その $(B\text{-}R, \sigma)$ 和は L^p 収束しない。従って $1 \leq p < 2n/(n+1+2\sigma)$ なら $L^p(T^n)$ の関数が存在して, その $(B\text{-}R, \sigma)$ 和は a.e.[1] 発散する。[2]

証明. $g \in \mathcal{S}(R^n)$ に対して

$$S^\sigma(x, g) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{|\xi| \leq 1} (1 - |\xi|^2)^\sigma \hat{g}(\xi) d\xi$$

とおく。特に $\hat{g} = 1$ on $|\xi| \leq 1$ であれば $S^\sigma(x, g) = 2^\sigma \Gamma(1+\sigma) J_{\frac{n}{2}+\sigma}(|x|)/|x|^{\frac{n}{2}+\sigma}$ である。従って $S^\sigma(g) \notin L^p(R^n)$ if $1 \leq p \leq 2n/(n+1+2\sigma)$. 一方 $g \in L^p(T^n)$ for $1 \leq p \leq \infty$. 故に multiplier の同値性から定理の前半を得る。後半は Stein の作用素列に関する定理[3]から明らか。

(II). α を R^n の点とするとき, $f \in L^2(T^n)$ に対して $\tilde{f}$ を

$$\tilde{f}(x) \sim \sum_{m\cdot\alpha\geq 0} \hat{f}_m e^{im\cdot x}$$

によって定義すれば．Bochner の定理によって $\|\tilde{f}\|_p \leq A_p\|f\|_p$, $1<p<\infty$, である。この定理は一変数のフーリエ級数に対する M. Riesz の定理と，multiplier の同値性によって，同値である。

(III)． Γ を R^n の開，凸集合で $r\Gamma \subset \Gamma$ for all $r>0$ をみたすとする。$T_\Gamma = \{z = x+iy \ ; \ x \in R^n, \ y \in \Gamma\}$ とする。$H^p(T_\Gamma)$, $p>0$, は T_Γ 上の解析函数で．x につき週期的

$$\|f\|_p = \sup_{y\in\Gamma}\left(\int_\Gamma |f(x+iy)|^p dx\right)^{1/p} < \infty$$

なる関数 f の集合とする．このとき．$p\geq 1$ なら任意の $f(x+iy)\in H^p(T_\Gamma)$ に対して境界関数 $f(x)$ が存在して

$$f(x+iy) = \sum_{m\in\Gamma^*} \hat{f}_m e^{im(x+iy)}, \quad x+iy \in T_\Gamma$$

である。ここに $\hat{f}_m$ は $f(x)$ のフーリエ係数，$\Gamma^* = \{\xi \in R^n : \xi x \geq 0 \text{ for all } x\in\Gamma\}$. 今 T を $f\in L^p(T^n)$ に対して

$$Tf = \sum_{m\in\Gamma^*} \hat{f}_m e^{im(x+iy)}, \quad x+iy \in T_\Gamma$$

によって定義される analytic contruction とする．$n=1,2$ ならば，すべての $1<p<\infty$, Γ に対して $T: L^p \to H^p(T_\Gamma)$ は

有界である。しかし例えば $\Gamma=\{x=(x_1,\cdots,x_n): x_1>(x_2^2+\cdots+x_n^2)^{1/2}\}$ とすれば $1\leq p\leq 2(n-1)/n$, $n>3$ に対して $T: L^p\to H^p(T_\Gamma)$ は非有界である。

証明は(I)の場合とほぼ同様にしてなされる。

1). $a.e.$ は"すべての点"におきかえられる。その証明は[2]にある。

2). $\sigma=0$ の場合は E. M. Stein が示している。しかしその証明を著者は知らない。

参考文献

[1] K. de Leeuw, On L^p multipliers, Ann. Math. 81(1965), 364-379.

[2] S. Igari, Lectures on Fourier Series of Several Variables, (1968) The Univ. of Wis.

[3] E. M. Stein, On limits of sequences of operators, Ann. Math. 74(1961), 140-170.