数理解析研究所講究録
第 55 巻 1968 年 75-86

Denjoy property と E.R. 積分

大阪府立大学　　中　西　シヅ

1.　変数変換による積分範囲の拡張.

功力教授は [4] において，E.R.積分の定義を与えたが，さらに同論文で"変数変換の方法を用いれば，積分範囲の拡張が可能である"ことを注意しその詳細な定義を [5] で次のように与えている。

定義 1.　$g(x)$ を $[\alpha, \beta]$ で定義された正の実数値の L-可積分函数とし，$G(x)$ を $g(x)$ の不定積分で $G(\alpha)=a$，$G(\beta)=b$ をみたすものとする。$[a, b]$ で定義された函数 $f(t)$ に対し，もし $f_1(x)=f(G(x))g(x)$ が E.R. 可積分な函数ならば，$f(t)$ は $[a, b]$ で拡張された意味で可積分であるとし，その積分値として $(E.R.)\int_a^b f(G(x))g(x)\,dx$ をとる。

この積分は岡野氏により，E.R. 積分と平行した形で展開され，同氏はその積分を (E.R.;ν) 積分と名づけた [10]。以下において，この功力教授の考えを我々の立場 [9] から考

察してみよう。今後功力教授が最初に定義した積分（A−積分と一致するものであるが）を special E.R. 積分とよぶことにする。なお，測度零を除いて一致する函数は同じ函数とみなす。special E.R. 積分は次のように定義される。

定義 2. 区間 $[\alpha,\beta]$ で定義された有界可測函数の全体を $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}([\alpha,\beta])$ であらわす。$\mathfrak{M}$ の元 f の近傍を $\mathrm{mes}\,A>0$ なる閉集合 A と正の実数 ε を用いて定義する。その近傍を $V(A,\varepsilon;f)$ であらわす。$h\in V(A,\varepsilon;f)$ であるとは，$h=f+r$ $(r\in\mathfrak{M})$ とかくとき，r が次の性質をもつことである。

$[\alpha]$ $\quad r(x)=0\ ,\quad x\in A\ ,$

$[\beta]$ $\quad \forall k>0\ ,\quad k\ \mathrm{mes}\,\{x\,;\,|r(x)|>k\}<\varepsilon\ ,$

$[\gamma]$ $\quad \forall k>0\ ,\quad \left|\int_a^b [r(x)]^k\,dx\right|<\varepsilon\ ,$

ここで

$$[r(x)]^k=\begin{cases} r(x)\ , & |r(x)|\leq k\ ,\\ k\ \mathrm{sign}\ r(x)\ , & |r(x)|>k\ .\end{cases}$$

このように近傍の定義された空間に階位を次のように導入する。$n=0,1,2,\cdots\cdots$ に対し，近傍 $V(A,\varepsilon;f)$ が

$[\delta]$ $\quad \mathrm{mes}\,([\alpha,\beta]\setminus A)<\varepsilon\ ,$ かつ，$\varepsilon=2^{-n}$，

をみたすとき，かつ，そのときにかぎり，その近傍を階位 n の近傍とよぶ。このとき，$\mathfrak{M}$ は階位空間である。この階位空間 $\mathfrak{M}$ の基本列

$$V(A_1,\varepsilon_1;f_1)\supseteq V(A_2,\varepsilon_2;f_2)\supseteq\cdots\cdots$$

に対しては，つねに $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ が a.e. で存在する。この極限函数 $f(x)$ を special E.R. 可積分な函数であるといい，その積分値を $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$ で与える [9]。

補題 1. $g(x) > 0$, a.e., を $[\alpha,\beta]$ で定義された L-可積分函数とし，$G(x)$ を $g(x)$ の不定積分で $G(\alpha)=a$, $G(\beta)=b$ をみたす函数とする。このとき $\gamma(t)\in\mathfrak{M}([a,b])$, $t\in[a,b]$, と $\gamma(G(x))g(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$ の間には次の関係がなりたつ。

(1) 集合 A の a.e. で $\gamma(G(x))\,g(x) = 0$

$\rightleftarrows$ 集合 $G(A)$ の a.e. で $\gamma(t)=0$。

(2) $\forall k>0$,

$$k\,\mathrm{mes}\{x\,;\,|\gamma(G(x))g(x)|>k\} = k\int_{\{t\,;\,|\gamma(t)|>k/g(G^{-1}(t))\}}\frac{1}{g(G^{-1}(t))}\,dt.$$

(3) $\forall k>0$,

$$\int_\alpha^\beta[\gamma(G(x))g(x)]^k\,dx = \int_a^b[\gamma(t)]^{k/g(G^{-1}(t))}\,dt,$$

ここで

$$[\gamma(t)]^{k/g(G^{-1}(t))} = \begin{cases}\gamma(t), & |\gamma(t)|\le k/g(G^{-1}(t))\\[2mm] \dfrac{k}{g(G^{-1}(t))}\cdot\mathrm{sign}\,\gamma(t), & |\gamma(t)|>k/g(G^{-1}(t)).\end{cases}$$

$1/g(G^{-1}(t))$ は $[a,b]$ の a.e. で定義された L-可積分な正値の函数である。

この補題は，$[a,b]$ で L-可積分な函数 $f(t)$ に対しては，つねに $\int_a^b f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(G(x))g(x)\,dx$ が成立することから直ちに得られる。

定義 3. $g(t)$ を $[a,b]$ で定義された $g(t)>0$, a.e.,

なるL-可積分函数とする。$\mathfrak{M}=\mathfrak{M}([a,b])$ 上に定義2で示された条件[α],[β],[γ]を条件

[α]　$r(t)=0$,　$t\in A$,

[β′]　$\forall k$,　$k\int_{\{t\,;\,|r(t)|>kg(t)\}} g(t)\,dt<\varepsilon$,

[γ′]　$\forall k$,　$\left|\int_a^b [r(t)]^{kg(t)}\,dt\right|<\varepsilon$

でおきかえる。定義2の場合と同様に$\mathfrak{M}$上に近傍系$\{V(A,\varepsilon;f)\}$を導入するならば、specialの場合と全く同様の理論がなりたち、一つの積分が定義される。この積分を(E.R.;g)積分とよぶことにする。積分値を$(E.R;g)\int_a^b f(t)\,dt$であらわす。$g_1(t)=g_2(t)$, a.e., ならば、g_1, g_2は同じ積分を定義している。

定理1.　$[a,b]$で定義された函数$f(t)$が、$[a,b]$で(E.R.;g)可積分になるのは、$G(t)$を$G(a)=\alpha$, $G(b)=\beta$をみたす$g(t)$の不定積分とするとき、$[\alpha,\beta]$のa.e.で定義された函数$f(G^{-1}(x))(G^{-1}(x))'$が$[\alpha,\beta]$でspecial E.R.可積分なるとき、かつ、そのときにかぎる。また、$(E.R.;g)\int_a^b f(t)\,dt$
$=(E.R.)\int_a^b f(G^{-1}(x))(G^{-1}(x))'\,dx$がなりたつ。

系1.　$[a,b]$で定義された函数$f(t)$が定義1の意味で可積分になるのは、$f(t)$が$[a,b]$で(E.R.;$1/g(G^{-1}(t))$)可積分になるとき、かつ、そのときにかぎる。

例.　$f(t)=1/t$,　$t\in[-1,1]$, に対し、$g(t)$として、$\frac{1}{t^2}e^{-1/|t|}$,

$t \in [-1, 1]$，をとるならば，$f(t)$ は $(E.R.;g)$ 可積分で

$$(E.R.;g)\int_{-1}^{1}\frac{1}{t}\,dt = (E.R.)\int_{-1/e}^{1/e}\frac{1}{G^{-1}(x)}(G^{-1}(x))'\,dx$$

$$= (E.R.)\int_{-1/e}^{1/e}\frac{1}{x\log(1/|x|)}\,dx = 0 .$$

special E.R. 積分（A−積分）の変数変換については，次の定理が知られている［1］。

定理 2，（積分変数の変換）． $x = G(t)$ を定理 1 で示された函数とする。$[a, b]$ で定義された special E.R. 可積な函数 $f(t)$ に対し，$f(G^{-1}(x))(G^{-1}(x))'$ が special E.R. 可積分で，$(E.R.)\int_a^b f(t)\,dt = (E.R.)\int_a^b f(G^{-1}(x))(G^{-1}(x))'\,dx$ が成立するのは，$0 < m \leq (G^{-1}(x))' \leq M < +\infty$，a.e.，が成りたつとき，かつ，そのときにかぎる。

定理 3． $\nu(E) = \int_E g(x)\,dx$，$g(x) > 0$，a.e.，$x \in [a, b]$，なるとき，$[a, b]$ 上での $(E.R.;\nu)$ 積分と $(E.R.;g)$ 積分は一致する。（証明には［11］，定理 4，の結果を用いた）。

以下たんに，E.R. 積分とことはらなしに述べたときは，これら一連の積分をあらわすものとする。

2． Denjoy 積分のもつ性質と E.R. 積分。

階位空間の方法をつかって E.R. 積分が定義されたように，狭義 Denjoy 積分も階位空間の方法をつかって定義できる［6］。

定義 4． $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}([a, b])$ の各点 f の近傍を mes $A > 0$ なる閉集合と正の数 ε を用いて定義する。その近傍を $V(A, \varepsilon; f)$

であらわす。$h \in V(A, \varepsilon; f)$ であるとは，$h = f + r$ ($r \in \mathfrak{M}$) とかくとき，r が次の性質をもつことである。

[α]　$r(x) = 0$,　$x \in A$,

[D_*]　各区間 I_j の少なくとも一方の端点が A に属する，互に内点を共有しない区間列 I_j ($j = 1, 2, \cdots$) に対し

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \int_{I_j} r(x)\, dx \right| < \varepsilon .$$

このように近傍の定義された空間 $\mathfrak{M}$ に階位を定義2の場合と同様に導入する。このとき $\mathfrak{M}$ は階位空間である。この階位空間 $\mathfrak{M}$ の基本列

$$V(A_1, \varepsilon_1; f_1) \supseteq V(A_2, \varepsilon_2; f_2) \supseteq \cdots\cdots$$

に対しては，つねに

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad \text{a.e.}, \quad と \quad \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$$

が存在する。基本列のうちとくに次の性質

$$A_n \subseteq A_{n+1} , \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = [a, b] ,$$

をみたすものだけを考える。かかる基本列により決定された函数の全体が狭義 Denjoy 可積分函数族であり，その積分 $(D_*)\int_a^b f(x)\, dx$ は $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$ で与えられる。

[a, b] 上での $f(x)$ の E.R. 積分性から，その部分区間 [c, d] 上の可積分性はでてこない [13]。またたとえすべての部分区間 [c, d] 上で可積分でも，不定積分 $F(x) = (E.R.)\int_a^x f(t)\, dt$ の可微分性はでない。いたるところ微分不可能で連

続な不定積分 $F(x)$ をもつ E.R.可積分函数 $f(x)$ の存在さえ知られている[8]。E.R.積分の微分可能性を与える一つの十分条件として，次の条件がある[7]。

[D]　各区間 I_j の両端点が A に属する，互に内点を共有しない区間列 I_j $(j=1,2,\cdots)$ に対し

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \int_{I_j} r(t)\,dt \right| < \varepsilon .$$

そこで我々は次のような E.R.積分の一つの特殊化を提案する。まず，[γ']より強い次の二つの条件を与えよう。

[γ'']　$\forall c, d \in A,\ c<d,\ \left| \int_c^d [r(x)]^{k g(x)}\,dx \right| < \varepsilon$。

[γ''']　$\forall c, d \in [a, b],\ c<d,\ \left| \int_c^d [r(x)]^{k g(x)}\,dx \right| < \varepsilon$。

定義 5.　$g(x) > 0$, a.e., を $[a, b]$ で定義された L-可積分函数とする。$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}([a, b])$ の各点 f の近傍 $V(A, \varepsilon; f)$ ($\mathrm{mes}\,A > 0$, A 閉集合, $\varepsilon > 0$) を次のように定義する。$h \in V(A, \varepsilon; f)$ であるとは，$h = f + r$ とかくとき，$r(x)$ が [α], [β'], [γ''], [D] をみたすことである。このように近傍の定義された空間 $\mathfrak{M}$ に階位を定義2の場合と同様に導入する。このとき，$\mathfrak{M}$ は階位空間である。この階位空間 $\mathfrak{M}$ の基本列

$$V(A_1, \varepsilon_1; f_1) \supseteq V(A_2, \varepsilon_2; f_2) \supseteq \cdots\cdots$$

に対し，$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ が a.e. で存在する。この函数を (E.R.D.; g) 可積分函数という。同様に，$r(x)$ が [α], [β'], [γ'''], [D_*] をみたすとして，(E.R.D_*; g) 可積分函数を定義

する。

これらの積分は次の性質をもつ。

(1) $(E.R.D;1)$ 可積分函数が $[a,b]$ で $(E.R.;1)$ 可積分ならば, almost everywhere A-可積函数である【1】(この積分は A-積分の一つの特殊化として提案されたものである)。

(2) $f(x)$ を $(E.R.D;g)$ 可積分函数, $u:\{\nabla(A_n, \varepsilon_n; f_n)\}$ を $f(x)$ を決定する基本列とする(一般性を失なわずに $A_n \subseteq A_{n+1}$ を仮定できる), そのとき

(i) $c, d \in \bigcup_n A_n$, $c<d$, ならば, $[c,d]$ 上で $f(x)$ は $(E.R.;g)$ 可積分である。

(ii) $\bigcup_n A_n$ 上で定義された $f(x)$ の不定積分 $F(x) = (E.R.;g)\int_{a_0}^{x} f(x)\,dx$, $a_0 \in \bigcup_n A_n$, は各 A_n 上で AC(したがって ∇B である)。

(iii) $F'_{ap}(x) = f(x)$ a.e.。

(3) $f(x)$ を $(E.R.D_*;g)$ 可積分函数, $u:\{\nabla(A_n, \varepsilon_n; f_n)\}$ を $f(x)$ を決定する基本列とする(一般性を失なわずに $A_n \subseteq A_{n+1}$ を仮定できる), そのとき

(i) $c, d \in [a,b]$, $c<d$, ならば, $f(x)$ は $[c,d]$ 上で $(E.R.;g)$ 可積分である。

(ii) $F(x) = (E.R.;g)\int_a^x f(t)\,dt$ とおくと, $F(x)$ は各 A_n 上で AC_*(したがって ∇B_*)である。

(iii)　$F'(x) = f(x)$　a.e.。

例．　1)　$f(x)=\frac{1}{x}$，$x \in [-1,1]$。

2)　E.R.積分はL−積分の拡張であるが，Denjoy積分との関係については，その総和法を全く異にしているため，積分範囲について，それら相互の包含関係がいえないばかりでなく，両者の意味で可積分でもその積分値は必ずしも一致しない[15]。しかし広義Denjoy可積分函数にたいし，$\nu=\nu(f)$を適当にえらべば，$f(x)$は（E.R.；ν）可積分で，積分値も一致することが知られている[2]。また，さらにgを適当にえらべば（E.R.D.；g）可積分であり，積分値も一致する。狭義Denjoy可積分函数については，適当なgをえらべば（E.R.D_*；g）可積分であり，その積分値が一致するだけでなく，さらに次のことがいえる。

狭義Denjoy可積分函数$f_1(x)$，$f_2(x)$に対し，適当なgをえらべば，$\forall \alpha, \beta$（実数）に対し，$\alpha f_1+\beta f_2$は（E.R.D_*；g）可積分で，$(D_*)\int_a^b \alpha f_1+\beta f_2\, dx = (E.R.;g)\int_a^b \alpha f_1+\beta f_2\, dx$である。

3)　L−可積分函数$f(x)$の共役函数

$$\tilde{f}(x)=\frac{1}{2\pi}\ p.v.\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cot\frac{1}{2}(t-x)\,dt$$

は必ずしもDenjoy可積分でないが，A−可積分である。またalmost everywhere A-可積分[12]でもある。我々は最後に，L−可積分函数fの共役函数$\tilde{f}$が（E.R.D；1）可積分性

に近い性質をもつことを示す。

$\varepsilon_n \downarrow 0$ に対し，$mes([a,b]\setminus(\bigcup_n A_n))=0$ なる単調増加閉集合列 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots\cdots$ が存在し，

$$r_n(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A_{n+1} \setminus A_n \\ 0 & x \notin \quad " \end{cases}$$

とおくならば，$r_n(x)$ は次の性質をもつ。

[α]　$r_n(x) = 0$，$x \in A_n$。

[β′]　$\forall k > 0$，$k \, mes\{x;\ |r_n(x)| > k\} < \varepsilon$。

[γ″]　$\forall c, d \in A_n$，$c < d$，$\left| \int_c^d [r_n(x)]^k dx \right| < \varepsilon$。

[*]　各区間 I_j の両端点が A_n に属する，互いに内点を共有しない区間列 I_j $(j=1, 2, \cdots\cdots)$ に対し

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| (E.R.) \int_a^x f(x)\,dx \right| < \varepsilon_n 。$$

[γ″] から $f(x)$ の不定積分 $F(x) = (E.R.)\int_a^x f(x)\,dx$，$a_0 \in \bigcup_n A_n$，が a.e. で定義される。$F(x)$ は次の性質をもつ。

[**]　$\forall n$，F_n 上で $F(x)$ は AC（したがって VB）である。

[***]　$F'_{ap}(x) = f(x)$，a.e.。

なお，"$f(x)$ がある積分の意味で可積分ならば，共役函数 $\tilde{f}(x)$ も a.e. で存在し，同じ積分で可積分になる" ような積分を定義する問題をめぐって，A－積分を特殊化した積分が提案されている [1]，[14]。かかる問題について，小泉氏の研究がある [3]。

文　献

[1] I.L. Bondi, Functions A-integrable almost everywhere. Doklady Acad. Nauk SSSR, 145 (1962), 491-494.

[2] K. Fujita, On definite (E.R.)-integrals, I, II. Proc. Japan Acad., 41 (1965), 686-695.

[3] S. Koizumi, Notes on (E.R.)-integrals. Proc. Japan Acad., 42 (1966), 995-1000.

[4] K. Kunugi, Application de la méthode des espaces rangés à la theorie de l'intégration, I. Proc. Japan Acad., 32 (1956), 215-220.

[5] ―――――, Sur une généralization de l'intégrale, fundamental and applied aspects of math. (published by Res. Inst. of Applied Electricity, Hokkaido University), (1959), 1-30.

[6] S. Nakanishi, L'intégrale de Denjoy et l'intégration au moyen des espaces rangés, I-IV. Proc. Japan Acad., 32 (1956), 678-683, 33 (1957), 13-18, 265-270, 34 (1958), 96-101.

[7] ―――――, Sur la dérivation (E.R.) indéfinie, I. Proc. Japan Acad., 34 (1958), 199-204.

[8] ―――――, Sur une fonction continue qui est partout non dérivable. Proc. Japan Acad., 40 (1964), 14-18.

[9] ―――――, On generalized integrals, I, II. 44

(1968), 133–138, 225–230.

[10] H. Okano, *Sur les intégrales* (E. R.) *et ses applications.* Osaka Math. J. 11 (1959), 187–212.

[11] ———, E. R. 積分とその応用について，実函数論分科会 第六回シンポジューム綜合講演集録，(1968), 1–7.

[12] E. C. Titchmarsh, *On conjugate functions.* Proc. London Math. Soc., 29 (1929), 49–80.

[13] P. L. Ul'yanov, Moskov. Gos. Univ. Uč. Zap. 181. Mat. 8 (1956), 139.

[14] F. S. Vaher, *The general form of a linear functional on the Banach space of analytic functions on the A-integral.* Doklady, 166 (1966), 518–521.

[15] I. A. Vinogradova, *On indefinite A-integrals.* Izv. Acad. Nauk SSSR Ser. Math., 25 (1961), 113–142.