

## エルゴード理論と最近の物理学

立大 理 豊 田 利 幸

前世紀の末、物理学者 Boltzmann および Gibbs によって、統計力学の基礎的な仮設の一つとして提出された、力学系のエルゴード仮設は、物理学の問題には珍らしい位明確な内容の規定をもっていたため、その後、多くの数学者の興味を惹き、今日では、ほとんど数学の一部門になるまで発展した。Halmos のいうように、エルゴード仮設の物理学的な動機との直接的関連は、今やその数学的発展の中で、ほんのわずかな役割を占めているだけかも知れない。

だが、筆者とくわめて多くの物理学者が、ますます精緻に展開されてきた「エルゴード理論」に対して抱く感慨は、比喩的にいえば、里子に出した音子のめざましい成長を眩しもうに眺めながら、自然現象とエルゴード性の関係が果して明らかになる方向に進んでいるのであろうか、とつぶやいているのが偽らぬところではなからうか。

このいわば諦めの状態を打破するような新しい動きが、最近、数学者と物理学者の双方から期せずしてでてきた。その第一は1966年コペンハーゲンで開かれた統計力学に関する国際会議の席上、London大学の物理学者 I. E. Prigogine によってソ連の数学者 Ja. G. Sinai の新しい論文が紹介され、統計力学者たちに大きな衝撃を与えたことである。Sinai はいうまでもなく Kolmogorov 門下の逸材として、エルゴード理論の分野ですでにいくつかの重要な著作を発表しているが、最近、彼は固い芯のある完全弾性体よりなる古典力学系を真正面から解き、この系がエルゴード性をもつことを「証明」した。この内容についての久保泉氏の解説は本講究録に収録されているから、ここでは重複を避ける。物理学者にとっては、有名な、「不変測度をもつ Markov 連鎖が indecomposable ならエルゴード性をもつ」という定理の証明だけでは、どうしようもないもどかしさがあった。物理学者は Sinai の研究を知らされて、物理的に non-trivial な場合が初めてとりあげられたと考え、これを歓迎したのであった。

第二は粒子間にいろいろな相互作用を仮定して、多体系を数値的に解くことが盛に行われるようになったことである。物理学者の Fermi は、固い芯の効果とめらわすような potential を仮定して数値計算を行えば、エルゴード性が計算の結果と

いて知られるたう), という予想のもとで, このまうな研究の先鞭をつけた。いうまでもなく, 電子計算機による速く計算が可能になったからである。我国では斎藤信彦氏がこの方面で精力的な研究としておられる。(本研究会でも斎藤氏の報告が行われた。その内容は「科学」5, 7月号 1968 と参照されたい) 簡単にいえば, 格子振動に非線型相互作用を入れて, 熱平衡への接近の問題を調べようとするものである。固い結晶は非線型相互作用の極端な場合と考えられる。この問題も電子計算機を用いる研究と平行して, 解析的に解こうとする試みも進められている。Zabusky 等の仕事に関連して戸田盛和氏が最近の研究を本研究会で報告された。本研究会の後, 9月中旬, 京都で開かれた統計力学の国際会議において, 万有引力と相互作用としてもつ多粒子系について数値計算を行うと, やがてクラスターらしきものが形成される, という報告があったが, その本質の究明も全く今後に残されている。

オ三は, エルゴードの問題を含む, 統計力学の基礎的諸問題に新しい光があてられるようになってきたことである。中でも, 従来量子力学で用いられてきた数学的枠組みそのものの検討から出発する動きが注目される。周知のように, これまで物理学者は量子力学の数学的枠組みとして, von Neumann

によって整備されたヒルベルト空間論を使用した。そして多体問題を扱う場合、有限個の系から出発して、いわゆる極限移行の操作を施し、無限系に到達した。ここで極限移行という場合、物理的に明確に定義される量とつねに保持することが必要である。これは決して簡単な問題ではない。事実、この極限操作から望ましくない結果が出てくる統計力学的問題は多いのである。1964年頃から物理学者の間で、新しい量子力学の教学的枠組みとして  $C^*$  algebra の応用が注目され始めた。本講究録の荒木不二洋氏の報告にあるように、これは、始めから、格子系のような無限系を扱うのに適している。

このような状況のもとで、エルゴードの問題を中心として数学者と物理学者の対話の場をもつことは、無意義ではないと思われる。不幸にして、今日、大部分の数学者と物理学者は相互の「言葉」に対する不馴れさから、お互がこれまでえた成果が十分に活用されていないうらみがある。有効な問題提起が適切な時期に行われれば、学問の進歩に大いに役立つことは歴史の示すところである。

今回の研究会で、数学者が使っているエントロピーと物理学者のそれとの関連が論議され、はっきりした結論はえられなかったが、self-contained な体系でありさえすれば、かま

わなという立場から一歩踏み出したものとして有益であった。また、研究会の討論のなかで、Sinaiの論文をめぐり、これが物理的に non-trivial な場合の一つとすれば、物理的には次の段階として、どのような拡張なし、新しい問題が考えられるかという質問が出された。物理的に現実的な相互作用系を考えることは容易であるが、着実な発展のために、「解けそうな」問題と定式化することはなかなか困難である。筆者自身もこの宿題に対する一応の答と本構成録に載せるつもりであったが、<sup>これは</sup>次の機会にゆずりたい。

最後に、再び強調しておきたいことは、固い芯をもつ物理的重要性である。この一見素朴な形の相互作用は、最近の素粒子、原子核の理論において、決定的な役割を果たしている。もちろん、固い芯のまわりに軟い部分をつけたり、芯に変形の自由をよえらるというように、いろいろな修正の試みもなされているが、「真」という理想化の段階を過ぎていることは疑う余地がない。この意味で、Sinaiが固い芯をもつ古典粒子系のエルゴード性に目と向けたことは高く評価されるのである。