数理解析研究所講究録
第56巻 1968年 6-29

エルゴード理論のReview

名大 理 数学 久保 泉

§1. はじめに

最近の十年間に，統計力学の基礎に対する数学的な，裏付けが確率論の分野において本格的に扱われるようになったと思われる。即ち，(A) エルゴード仮説・・・・Sinai, Anosov, Arnold, Avez 等 (B) Boltzmann 方程式を解くこと及びH-定理に関して・・・・Kac, Mckean, 等 (C) 極限Gibbs分布，熱力学への移行・・・・Minlos Sinai, 等 が調べられている。((B)に関しては，田中氏の報告を，(C) に関しては，Robinson, Ruelle の結果を含めて荒木氏の項を参照されたい)。

時間的母集団と位相的母集団の統計力学における同等性を主張するエルゴード仮説は，Birkhoff の個別エルゴード定理及び Neuman の平均エルゴード定理によって解決されたと言って良いと思われる。系の時間平均は，その軌跡が到達し得る相空間内の領域に対しては (Liouville の定理に

よる不変測度での）相平均と一致することがわかり，力学系をエルゴード部分に分解でき，その各部分の上ではエルゴード仮説が成立することがわかる。

しかしある具体的な力学系がエルゴード的かどうか，或は，どんなにして，エルゴード部分に分解出来るかは，困難な問題として残されていた。比較的早くから理解されたのは，定曲率の空間上の測地的 flow だった。曲率が零又は正の場合にはエルゴード的ではなく，負の定曲率を持つ compact Riemannian manifold の場合が最も興味深く，その測地的 flow が エルゴード的であり更に mixing であることは，すでに 1930 年代 Hopf，E．[16, 17]，Hedlund，G. A．[13，14] によって知られていた。

一方，Kolmogorov [19，20] が 1958～9 年にエントロピー（エルゴード理論における単位時間当りのエントロピー）と K-system の概念を導入したのを契機として flow の理論の一般論 [1，23，24，27，30 等] が進歩し，それ等の概念との関連で，エルゴード性，Mixing 性も論じられるようになった。（§2 参照）．

Sinai [25, 26] は 1960～1 年に compact な負の曲率空間上の測地的 flow が K-system（従ってエルゴード的）であることを示し，又そのエントロピーを計算した。

そこに用いられた基本的なアイデアは，かって Hopf，Hedlund によって負定曲率空間の測地的 flow の研究に用いられた時間の指数函数的に遠ざかっていく（近づいていく）軌跡とそれに横断する曲面群の果たす役割を使うことだった。　その方法を compact Riemannian manifold 上の滑かな flow に対して適用するため，Anosov [4, 5] は 1962～3年 C-system（У-СИСТЕМ）の概念を定義し，C-system がエルゴード的であることを示した。更に C-system が K-system であることは，Sinai，Anosov，Arnold 等によって解決された。（§3 参照）

もっと物理的な，統計力学に現われ得るような系については，1963年 Sinai が [28] で撞球問題と呼ばれる系のエントロピーが正であることを主張し，[29] でもっと一般的系；箱に閉じ込められた多体の剛体（もしくは作用距離の短い相互作用をもつ）系の flow のエントロピーが正であること及びエルゴード性を主張した。（§5,6 参照）

その後，彼は [31] で，上の如き一般の力学系の flow が，C-system に要求される正則性を持たない場合も一般論を展開した。　この報告で，この十年間に，統計力学で要求されるエルゴード問題に，数学者がいかに接近し得たか，まだいかに遠いか，を理解して頂ければ幸いである。

§ 2. 基礎的な事実

この§の内容に関しては [1][12][19, 20][23][24][32] を参照されたい。特に[32]は日本語で書かれ，すぐれた綜合報告になっていて証明も詳しい。

<u>個別エルゴード定理</u>

$(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ をある測度空間とする。但し $P(\Omega) < \infty$.

定義 2.1. Ω 上の変換 S の逆変換 S^{-1} が存在し共に可測で，保測 (i.e. $P(SB)=P(B)$, $B \in \mathfrak{B}$) なとき，S を automorphism という。 automorphism の one-parameter group $\{S_t\}$ が $(t,\omega) \longrightarrow S_t\omega$ の写像として可測なとき（可測な）flow と呼ぶ。両者に共通な名称として，system $\{S_t\}$ と言い，t が整数値だけをとるときもつかう。

定義 2.2. System $\{S_t\}$ に対し，$S_t B = B$ が任意の t に対して成立するような可測集合 $B \in \mathfrak{B}$ は，$P(B) = 0$ 又は $P(\Omega - B) = 0$ に限るとき $\{S_t\}$ は metrically transitive であるという。

定理 2.1. (Birkhoff) $\{S_t\}$ を flow，$f(\omega)$ を可積分函数とするとき，殆んど全ての $\omega \in \Omega$ に対し，極限

$$\bar{f}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(S_t\omega)\,dt, \quad \underline{f}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(S_{-t}\omega)\,dt$$

が存在し，$\bar{f}(\omega) = \underline{f}(\omega) = \underline{f}(S_t\omega)$ a.e. が成立する。

automorphism S に対しては $\int$ を $\sum$ に置代えて成立する。

定義 2．3． System $\{S_t\}$ がエルゴード的 $\Leftrightarrow$ $f(\omega)$ の時間平均 $\bar{f}(\omega)=\int f(\omega)\,dP$ が成立する。

又 $\{S_t\}$ が mixing であるとは $P(S_tA\cap B)\to P(A)P(B)$ $(t\to\infty)$ が任意の $A, B\in\mathcal{B}$ に対し成立するときにいう。

定理 2．2． 二乗可積分函数 $f(\omega)\in L^2(\Omega,\mathcal{B},P)$ に対し $U_tf(\omega)\equiv f(S_t\omega)$ により，強連続な *one-parameter unitary group* が定義され，次の三条件は同値である。(i) $\{S_t\}$ がエルゴード的。(ii) $\{S_t\}$ が metrically transitive. (iii) $\{U_t\}$ が定数以外に固有値零の固有函数を持たない。

<u>可測分割</u>

定義 2．4． Ω の分割 $\zeta=\{C\}$ とは，disjoint な集合の集りで $\Omega=\bigcup_{C\in\zeta}C$ を充すものをいう。分割 ζ がある可算ヶの可測集合の系 $\{\Gamma_n\}$ から生成される (i.e. 二点 ω_1, ω_2 が ζ の同じ要素に入るのは，ω_1, ω_2 が同時に Γ_n に入っているか，同時に入ってないかが全ての n に対して成立するとき限る) 場合に分割 ζ は可測であるという。

二つの可測分割 ζ, ξ が与えられたとき，ζ が ξ の細分ならば $\zeta\geq\xi$ と記し，ξ は ζ より粗いという。 分割 ξ に対し，ξ より粗い可測分割の内最も細い (上の不等号で大きい) ものを ξ の可測被覆という。 一般に可測分割の系 $\{\xi_\alpha\}$ が与えられたとき，$\bigvee_\alpha\xi_\alpha$ で全ての ξ_α より細い可測分割

の内て最も粗いものを，$\bigwedge_{\alpha} \xi_\alpha$ で 全ての ξ_α より粗い可測分割の内,最も細いものを表わす。

命題 2.1. Ωのtribialな分割$\{\Omega\}=\nu$，Ωのsystem $\{S_t\}$の軌跡への分割の可測被覆を$\nu_{\{S_t\}}$と記すとき，

$\{S_t\}$がエルゴード的 $\Longleftrightarrow$ $\nu_{\{S_t\}}=\nu$.

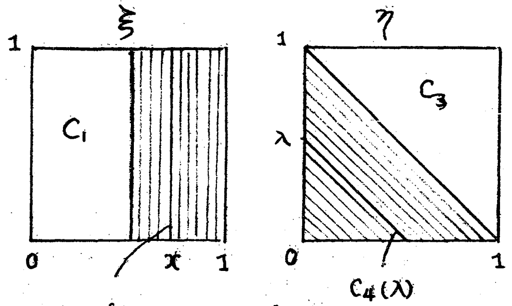
命題 2.2. (Ωが Lebesgue space と呼ばれる自然な空間ならば) 可測分割ζに対し，ζの各要素C $(\in\zeta)$の上に自然に測度$P(\cdot|C)$が導かれ，又ζの各要素を一点とみなした空間Ω/ζの上にも自然に測度$P_\zeta(C)$が導かれ

$$P(B) = \int_{\Omega/\zeta} P(B\cap C|C)\, dP_\zeta(C)$$

例 2.1. 右図の如く，正方形の二種の分割 $\xi=\{C_1, C_2(x); \frac{1}{2}\leq x<1\}$，$\eta=\{C_3, C_4(\lambda)$ $0\leq\lambda<1\}$ は可測分割である。ηの条件付測度は，$C_4(\lambda)$上のパラメターとして，直線の長さを取れば，

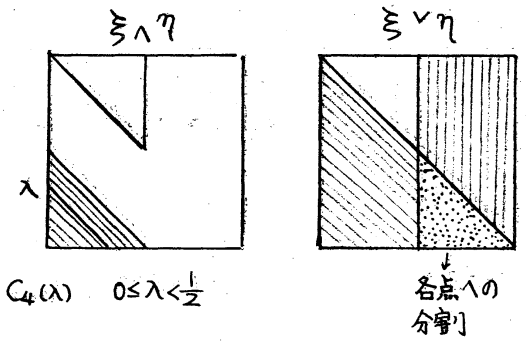
$$\begin{cases} P(dx\,dy|C_3) = 2\,dx\,dy \\ P(du|C_4(\lambda)) = \frac{1}{\sqrt{2}\lambda}\,du \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_\eta(C_3) = \frac{1}{2} \\ dP_\eta(C_4(\lambda)) = \lambda\, d\lambda \end{cases}$$



$C_2(x)=\{(x,y);\ 0\leq y<1\}$

$C_4(\lambda)=\{(x,y);\ x+y=\lambda,\ 0\leq x,y<1\}$



エントロピー

Ωの分割ζに対して $S\zeta$ を $S\zeta=\{SC\ ;\ C\in\zeta\}$ で定義する。

定義 2．5．　Ωの有限又は可算ヶの可測集合への分割 $\xi=\{D\}$ に対し分割のエントロピーを次式で定義する。

$$H(\xi)=-\sum_{D\in\xi}P(D)\log P(D).$$

automorphism Sに対し，αを有限分割とするとき極限

$$h(S,\alpha)\equiv\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H(\alpha\vee S\alpha\vee\cdots\vee S^{n-1}\alpha)$$

が存在する。　$h(S)=\sup_{\alpha\,;\,\text{有限分割}}h(S,\alpha)$ を automorphism Sの（単位時間当りの）エントロピーと呼ぶ。

命題 2．3．　System $\{S_t\}$ に対し $h(S_t)=|t|\,h(S_1)$。

定義 2．6．　可測分割 $\zeta=\{C\}$，$\xi=\{D\}$ に対して，

$H(\xi|\zeta;\omega)=-\log P(D\cap C|\zeta;C)$　$\omega\in D\cap C$　で

$$H(\xi|\zeta)\equiv\int H(\xi|\zeta;\omega)\,dP$$

を分割ξの条件ζの下での条件付エントロピーと呼ぶ。

命題 2．4．　$h(S,\alpha)=H(\alpha\,|\,\bigvee_{k=1}^{\infty}S^{-k}\alpha)$

K－system

定義 2．7．　System $\{S_t\}$がK-systemであるとは，ある可測分割ζが存在して次の三条件を充すときに言う。

（K.1）　$S_t\zeta\geq\zeta$　$t\geq0$，（K.2）$\bigvee_t S_t\zeta=\varepsilon$

（但しεは各一点一点への分割），（K.3）$\bigwedge_t S_t\zeta=\nu$。

定理 2.3. $\{S_t\}$ が K-system ならば，$\{S_t\}$ に対し次のことが言える。(i) $\{S_t\}$ はエルゴード的，(ii)（全ての位数の）mixing，(iii) S_1 のエントロピー $h(S_1) > 0$，(iv) $\{U_t\}$ のスペクトルは，σ-ルベーグスペクトル。

automorphism S に対し，下の式で可測分割 π を定義する。

$$\pi = \pi(S) = \bigvee_{\alpha:\text{有限分割}} \bigwedge_n \bigvee_{k \le n} S^k \alpha .$$

定理 2.4. 任意の automorphism S に対して次の条件を充す可測分割 ζ が存在する。(i) $S\zeta \geq \zeta$，(ii) $\bigvee_n S^n \zeta = \varepsilon$，(iii) $\bigwedge_n S^n \zeta = \pi(S)$，(iv) $h(S) = H(S\zeta \mid \zeta)$。

定理 2.5. automorphism S に対し次のことが成立。

1°. $\pi(S) = \nu \iff S$ は K-system.

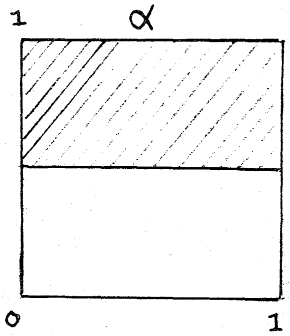
2° $S\xi \geq \xi$, $\bigvee_k S^k \xi = \varepsilon \implies \pi(S) \leq \bigwedge_k S^k \xi$

更に $H(S\xi \mid \xi) = h(S) < \infty \implies \pi(S) = \bigwedge_k S^k \xi$.

上で述べた定理は，§3,4 で述べられる事実の証明に非常に大きな役割をはたす。定理 2.3 により，K-system であることを示せれば，エルゴード性が示される。

例 2.2. 2-shift

テクニカルではあるが，単純で，確率論的な意味も大きく，荒木氏の項の一次元 Ising モデルに関係の深い例について記しておこう。上の議論の理解の助けにして頂きたい。



[0,1]×[0,1) の正方形を考えその上の automorphism S を $S(x,y)=(x',y')$

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = \frac{1}{2}y \end{cases} \text{if } 0 \le x < \frac{1}{2} \qquad \begin{cases} x' = 2x-1 \\ y' = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \end{cases} \text{if } \frac{1}{2} \le x < 1$$

で定義する。 分割 $\alpha = \{[0,1)\times[0,\frac{1}{2}), [0,1)\times[\frac{1}{2},1)\}$ という二つの集合への分割を考えよう。

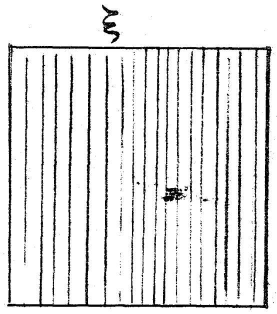
分割 $\alpha \vee S\alpha \vee \cdots\cdots \vee S^{n-1}\alpha$ は

$= \{[0,1)\times[\frac{k-1}{2^{n-1}}, \frac{k}{2^{n-1}})\,;\, k=1,2,\cdots 2^{n-1}\}$

だから，エントロピーは，$\frac{1}{n}H(\alpha \vee S\alpha \vee \cdots \vee S^{n-1}\alpha)$

$= -\frac{1}{n}\frac{1}{2^{n-1}}\log\frac{1}{2^{n-1}} \times 2^{n-1} \longrightarrow \log 2 \quad (n\to\infty)$。

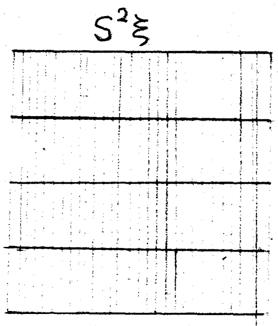
即ち $h(S,\alpha)=\log 2$。実は $h(S)=\log 2$ が成立。



$\xi = \bigvee_{n\ge1} S^{-n}\alpha$ は右図の如き縦線への分割となる。 $\xi = \{C(x)=\{x\}\times[0,1)\}$ とおくと $dP_\xi(C(x)) = dx$, $P(dy|C(x)) = dy$, である。

$S\xi$ は，ξ の縦線を二等分して出来る分割だから． $H(S\xi|\xi) = H(\alpha|\xi)$

$= -\int \log\frac{1}{2}\, dP_\xi = \log 2$



又，$S^n\xi$ は，ξ の縦線を更に 2^n 等分して得られる分割だから $\bigvee_n S^n\xi = \varepsilon$ を得る。又 $\bigwedge S^n\xi = \nu$ もわかり， S が K-system であること，従ってエルゴード的なことがわかった。

§3. *C-system*

この§に関しては，[6]，[7]，[10]，[11]，[33] 等が綜合報告的なものであり [4]，[5]，[8]，[9]，[22] 等がそれ等の内容を構成している論文である。

この§では，*compact, connected, smooth Riemannian manifold* M上の滑らかな変換の作るflow，例えば，滑らかなHamiltonian から決まる力学系，測地的flow，のエルゴード性に関する定理を述べる。

定義 3．1． C^2-*differentiable* な *diffeomorphism* の *one-parameter group* $\{S_t\}$ が *C-flow* $\Leftrightarrow$

(i) $\frac{d}{dt} S_t m \big|_{t=0}$ non-vanishing

(ii) Mの tangent plane の field X_m, Y_m, Z_m が存在し，

$TM_m = X_m \oplus Y_m \oplus Z_m$, $\dim X_m, \dim Y_m \geq 1$ である。但し

Z_m は $\{S_t\}$ の点 m における測度vector の張る一次元space.

(iii) 任意の $t > 0$ に対し，次の式が成立する，

$$\|{}^*S_t \xi\| \geq a e^{\lambda t} \|\xi\|, \quad \|{}^*S_{-t} \xi\| \leq b e^{-\lambda t} \|\xi\| \qquad \xi \in X_m$$

$$\|{}^*S_t \xi\| \leq b e^{-\lambda t} \|\xi\|, \quad \|{}^*S_{-t} \xi\| \geq a e^{\lambda t} \|\xi\| \qquad \xi \in Y_m \text{ 。}$$

C-diffeomorphism S は同様に定義される。即ち，(i) は不要，(ii) は $TM_m = X_m \oplus Y_m$ に直す，(iii) は整数 $t > 0$ に対して要求する。

定理 3.1.　C-system はエルゴード的。

定理 3. 2.　C-diffeomorphism は K-system.

定理 3. 3.　C-flow に対しては次のいづれかが成立，

(i)　K-system である.

(ii)　non-constant な固有函数をもつ。

以上が C-system における重要な結果である。　次に，測地的 flow における定理をあげよう。

定理 3. 4.　M はトーラス $\mathbb{T}^2$ でも Klein の壺でもなく $\dim M \geq 2$ であって，測地的 flow がエルゴード的ならば

⇒　唯一つ連続な固有函数は定数である。

定理 3. 5.　負曲率空間の測地的 flow は C-flow である。従って定理 3.4 により．K-flow である。

次にエントロピーの上からの評価を与える定理を述べよう。　S を diffeomorphism とし，$\lambda_m = \sup_{w \in TM_m} \frac{\| {}^*S_m w \|}{\| w \|}$

$\lambda = \max_{m \in M} \lambda_m$　とおく。

定理 3. 6.　S のエントロピーは，$h(S) \leq \dim M \cdot \log \lambda$

上の六つの定理の陰にかくれた重要な定理がある。それは，C-system の foliation の絶対連続性に関する定理と，その foliation の果す役割に関する定理である。　次の § 4 の Sinai の考え方は，後者の部分の一般化をすることである。

§4. Sinai の formulation —— Transversal field.

実際の物理系に現われる flow は，§3で論じられたほど十分な正則性を持って居るとは限らない。物理系にも適用し得るように考える。この§の内容は，[31]を参照されたい。[33]の押川氏の報告(1-33)は簡潔にその内容が紹介されておりわかりやすい。

Mを連結な orientable な C^∞-Riemannian manifold で境界を持ち得る。境界はいくらかの特異性を許した正則性を要請する。M上の flow $\{S_t\}$ は，境界 ∂M に到達するまでは，特異性を持たないベクトル場により定まる微分方程式系に従って運動し，∂M に到達すると，∂M から ∂M への滑らかな変換で他の ∂M 上の点に移りそこから内部に向けて運動するものとする。

定義 4.1. Uを M の可測な部分集合，ξ を U の可測分割で，その要素 C_ξ は k-次元開球に同相な，Mの区分的に滑らかな k-次元開局所部分多様体であり，C_ξ 上の Riemann 計量から決まる体積要素 $d\sigma_{C_\xi}$ により，条件付測度が

$$P(A|C) = \int_{A\cap C} P(y|C)\, d\sigma_C(y)$$

と密度函数 $P(y|C)>0$ で表わされるものとする。このとき，ξ を U における局所的な可測ファイバー構造と呼ぶ。

このような，局所的な可測ファイバー構造の族 (U_α, ξ_α)

が次の条件を充すとき可測ファイバー構造 Z が与えられたという。 (i) $\{U_\alpha\}$ が M の局所基, i.e. 任意の B, $P(B)>0$ $P(M-B)>0$ に対し, U_α が存在し $P(U_\alpha\cap B)\cdot P(U_\alpha\cap(M-B))\neq 0$ を充し, $\{U_\alpha\}$ は M の各点への分割 ε を生成する。

(ii) $U_\alpha\cap U_\beta\neq\phi$ のとき, 殆んど全ての $x\in U_\alpha\cap U_\beta$ に対し, $C_{\xi_\alpha}(x)\cap U_\beta = C_{\xi_\beta}(x)\cap U_\alpha$ であり*, これ等が, k-次元の区分的に滑らかな局所的部分多様体である。

このとき, (ii)' の関係で接続されて出来る連結な k-次元多様体を Γ とし, かかる Γ の全体を $Z=\{\Gamma\}$ と記す。

定義 4.2. 二つの可測ファイバー構造 Z_1 と Z_2 において, Z_2 が Z_1 に絶対連続とは $\Longleftrightarrow$ $P(U^2_\beta\,|\,C_{\xi^1_\alpha})>0$ なる U^2_β に対し, $\mu(A)=P(\bigcup_{x\in A} C_{\xi^2_\beta}(x))$ によって定まる $A\subset C^1_{\xi_\alpha}\cap U^2_\beta$ の測度と, $P(A\,|\,C_{\xi^1_\alpha})$ が互に絶対連続であり, $\{\bigcup_{x\in C_{\xi^1_\alpha}\cap U^2_\beta} C_{\xi^2_\beta}(x)\ ;\ C_{\xi^1_\alpha},\ \beta,\ \alpha\}$ が M の局所基をなす。

命題 4.1. Z_2 が Z_1 に絶対連続ならば, $\nu_{Z_1}\wedge\nu_{Z_2}=\nu$.**

S をある M 上の automorphism とする。 もしある可測ファイバー構造 $Z=\{\Gamma\}$ に対して, $S\Gamma(x)=\Gamma(Sx)$ が成立す

* $C_{\xi_\alpha}(x)$ で 点 x を含む分割 ξ_α の要素を表わす。

** 可測ファイバー構造 Z に対し, $\Gamma(x)$ で x を含む Sheet を表わす
又 ν_Z で M の各 Γ への分割の可測被覆を表わす。

れば，　Z を S の transversal field と呼ぶ。

S が Riemannian manifold Γ から SΓ への変換として，SΓ の接空間に引起す作用素 $^*S$ の作用素ノルム $\|^*S\|$ が全ての点 $x \in M$ で $\|^*S\| < 1$ ならば，Z は拡大しているといい，$\|^*S^{-1}\| < 1$ ならば縮少しているという。

flow $\{S_t\}$ に対しても同様に定義される。

定理 4.1.　System $\{S_t\}$ の拡大している transversal field Z が存在するならば，M の可測分割 ζ で次の三条件を充すものが存在する。

(i) $S_t\zeta > \zeta$，$t>0$，(ii) $\bigvee_t S_t\zeta = \varepsilon$　(iii) $\bigwedge_t S_t\zeta = \nu_Z$　。

従って $\nu_{\{S_t\}} \leq \nu_Z$ が成立する。　又 $\nu_Z = \nu$ が成立するならば，$\{S_t\}$ はエルゴード的である。

定理 4.2.　automorphism S の transversal field で拡大する Z_1 と縮少する Z_2 が存在して，互に絶対連続ならば，定理 4.1 で構成される ζ は，$h(S\zeta|\zeta) = h(S)$ を充し，$\pi(S) = \nu_{Z_1} = \nu_{Z_2} = \nu$。

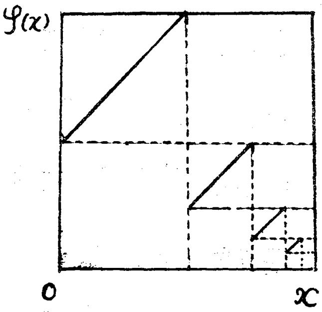
従って，S は K-system であり，エルゴード的である。

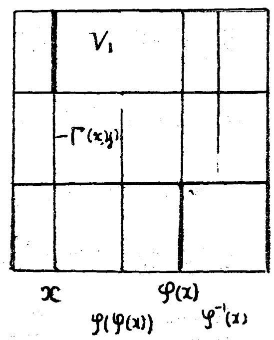
定理 4.3.　flow $\{S_t\}$ の transversal field で拡大する Z_1 と縮少する Z_2 が存在し，$\tilde{Z}_1 = Z_1 \wedge \tilde{Z}$ と $\tilde{Z}_2 = Z_2 \wedge \tilde{Z}$ が互に絶対連続ならば，　$\pi\{S_t\} = \nu_{Z_1} = \nu_{Z_2}$

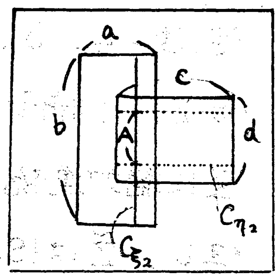
但し，$\tilde{Z}$ は $\{S_t\}$ の軌跡のなす一次元可測ファイバー構造，

$Z_i \wedge \tilde{Z} = \tilde{Z}_i$ は Z_i と $\tilde{Z}$ から構成される $1+\dim Z_i$ 次元の可測ファイバー構造を意味する。

例　§3 の例を再び考えてみよう。Riemannian manifold ではないが本質的に変らない。右図のグラフで定義される $[0,1) \to [0,1)$ の写像 φ を考える。$V_1 = [0,1) \times \left((0, \frac{1}{3}) \cup (\frac{2}{3}, 1) \right)$ の分割 $\xi_1 \ni C_{\xi_1}(x) = \{x\} \times (\frac{2}{3}, 1) \cup \{\varphi(x)\} \times (0, \frac{1}{3})$, 及び有理点を端点とする長方形とその縦線への分割を考えれば, 可測ファイバー構造が出来る。その一つの sheet $\Gamma(x,y)$ は, $\cdots \varphi^{-1}(x), x, \varphi(x), \varphi^2(x), \cdots$ における縦線を連結して出来る集合である。今 $S\Gamma(x,y) = \Gamma(S(x,y))$ であることと $\|{}^*S^{-1}\| = 2$ であることは容易にわかる。従って $\{\Gamma\} = Z$ は, 拡大する transversal field である。定理 4.1 によって与えられる増加分割は ξ 自身がそれである。同様に正方形の横線への分割を考えることにより縮小する transversal field Z' が構成出来る。Z と Z' は互に絶対連続, (例えば右図で, $P(\bigcup_{(x,y) \in A} C_{\eta_2}(x,y)) = c \times$ Lebesgue 測度 $A = aP(A \mid C_{\xi_2})$ が成立するから明らか) よって定理 4.2 により S は K-system であり, $h(S) = \log 2$.







§5. ある簡単なモデル

この§で［28］で扱われている問題に［29］及び§4の方法を適用することを考えてみよう。

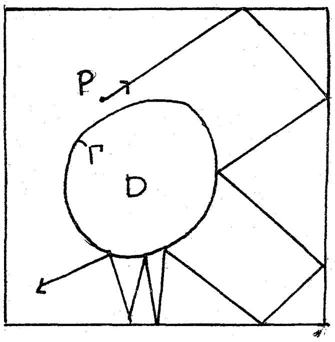


図1

図1 の如く，二次元の箱Lの中に，滑らかな境界Γで囲まれた凸領域Dがあり，箱の内部（Dの外部）で質量1の質点が速さ1で慣性運動をし，Γと箱Lの壁で完全弾性衝突をしながら運動しているとしよう。（本質的ではないがΓの曲率は零にならないと仮定する。又，Lの壁は二次元トーラスとしてつながっているとしてもよい）。

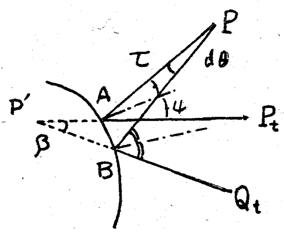


図2

<u>1°. 衝突</u>

点Pから微少角dθだけ異なった角度で出発した二つの軌跡を考え，夫々点A，BでΓと衝突し，時刻tにおける位置をP_t，Q_tとする。距離APをτ，Aにおける反射角をψ，ρを点AにおけるΓの曲率半径とする。又直線AP_t，BQ_tの交点をP′，と置くと高位の微少量を無視して

$$\angle AP'B \fallingdotseq \left(\frac{2\tau}{\rho\cos\psi}+1\right)d\theta$$

$$\overline{P'A} \fallingdotseq 1\Big/\left\{\frac{2}{\rho\cos\psi}+\frac{1}{\tau}\right\}$$

$$\overline{P_tQ_t} \fallingdotseq \left\{t+\frac{2\tau}{\rho\cos\psi}(t-\tau)\right\}d\theta$$

が成立する。 この事実から，一点Pから各方向に出発した軌跡の時tにおける点全体が作る波面を考えれば，同一の波面上の二点の波面に沿っての距離は時刻tの指数函数的に増加することがわかる。 そのことを使ってSinai [28] はここで考えるflowのエントロピーが正であることを証明しようとしたが，証明は完全ではない。

2°. 測度空間とflow.

$\Omega = \{\omega = (p, \vec{v}) = (x, y, \theta)\ ;\ p = (x, y) \in L-D,\ 0 \le \theta < 2\pi\}$ とおく。$\vec{v}$ は点 p を足に持つ単位速度ベクトルで，ある固定方向となす角度 θ を径数にとる。 Ω 上の測度 P を

$$dP(\omega) = dP(x, y, \theta) \equiv dx\,dy\,d\theta$$

で定義すれば， $S_t\,\omega = (p_t, \vec{v}_t)$ ，(但し $\omega = (p, \vec{v})$，p_t は点 p から速度 $\vec{v}$ で出発した軌跡の時刻tにおける位置 $\vec{v}_t$ をその時点の速度とする)，によって定まる $\{S_t\}$ はflowになる。 我々はこのflowを問題の対象とする。

3°. flowの表現…… パラメターの変換

Γ 上の点の径数として，その点における法線方向をとる。$\rho(\varphi)$ はその点における Γ の曲率半径， $\tau(\varphi, \psi)$ は点 φ から法線との角 ψ で出発した軌跡が Γ に衝突するまでの時間とする。 $\omega \in \Omega$ の径数として， $t \le 0$ で $S_t\omega$ が最後に Γ に衝突した点 $\varphi(\omega) = \varphi$，その点での反射角 $\psi = \psi(\omega)$，

その点から現在の点までに要する時間 $u=\sigma(\omega)$. を考える。

$$\tilde{\Omega}=\{\omega=(\varphi,\psi,u)\ ;\ 0\le\varphi<2\pi,\ -\frac{\pi}{2}<\psi<\frac{\pi}{2},\ 0\le u<\tau(\varphi,\psi)\}$$

は，上の対応で考えて，Ω の部分集合として $P(\Omega-\tilde{\Omega})=0$，又

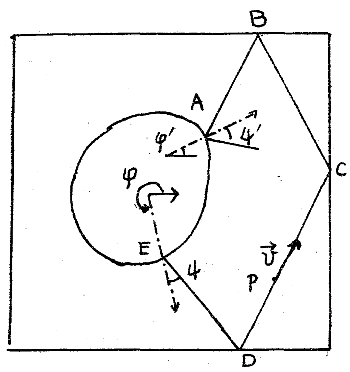
$$dP(\varphi,\psi,u)=p(\varphi)\cos\psi\ d\varphi\ d\psi\ du.$$

が成立する。　今 $X=\{x=(\varphi,\psi)\ ;\ 0\le\varphi<2\pi,\ -\frac{\pi}{2}<\psi<\frac{\pi}{2}\}$

上の測度 $d\mu(\varphi,\psi)=p(\varphi)\cos\psi\ d\varphi\ d\psi$ を定義する。X 上の点変換 S を，$(\varphi,\psi)\in X$ に対し，

$S_{\tau(\varphi,\psi)}(\varphi,\psi,0)=(\varphi',\psi',0)$ のとき，

$S(\varphi,\psi)=(\varphi',\psi')$ で定義する。



$u=\sigma(\omega)=ED+DP$
$\tau(\varphi,\psi)=ED+DC+CB+BA$
$S(\varphi,\psi)=(\varphi',\psi')$

S が X 上の automorphism であることは，積分幾何の公式もしくは，Jacobian の計算から分かる。そうして，flow $\{S_t\}$ は，次のように表わされる。

$$S_t(\varphi,\psi,u)=\left(S^n(\varphi,\psi),\ u+t-\sum_{k=1}^{n}\tau(S^k(\varphi,\psi))\right)$$

但し，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\tau(S^k(\varphi,\psi))\le u+t<\sum_{k=1}^{n+1}\tau(S^k(\varphi,\psi))$。

3°. Transversal field.

Sinai [29] に従って構成する。$\omega=(p,\vec{v})$ に対し，$\pi(\omega)=p$ により $\pi:\Omega\to L-D$ 写像 π を定義する。

$R_0(p)=\{\omega\ ;\ \pi(\omega)=p\}$，$R_t^+(p)=S_{+t}R_0(p)$ $(R_t^-(p)=S_{-t}R_0(p))$，$\tilde{R}_t^{\pm}(p)\equiv\pi(R_t^{\pm}(p))$，により，$R_t^{\pm}(p)$，$\tilde{R}_t^{\pm}(p)$ な Ω 及び L-D 内の波面を考える。

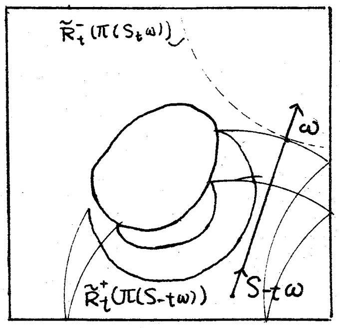


図 4.

今，波面 $\tilde{R}^{\pm}_t(\pi(S_{\mp t}\omega))$ を考えれば，$t\to\infty$ のとき $\pi(\omega)$の近傍で，ある区分的に滑らかな（C^2-級）の曲線に収束する。 それを $\tilde{R}^{\pm}(\omega)$ で表わし，対応する $R^{\pm}(\omega)$を考える。（Ωの中で，$R^{\pm}_t(\pi(S_{\mp t}\omega))$ が $R^{\pm}(\omega)$ に収束する。）

命題 5. 1. $\omega' \in R^{\pm}(\omega) \Rightarrow \omega \in R^{\pm}(\omega')$,

$$R^{\pm}(S_t\omega) = S_t R^{\pm}(\omega)。$$

もし，上のようにして構成された $Z^+=\{R^+\}$, $Z^-=\{R^-\}$ なる波面の集合が，可測ファイバー構造の条件を充すならば，§4の定理が適用出来るわけである。 $Z^+=\{R^+\}$ が縮小する $Z^-=\{R^-\}$ が拡大する性質を持つことが，$4°$ の事実から容易にわかる。 従って，我々は少くとも次のことは言える。

命題 5. 2. 与えられた力学系の flow $\{S_t\}$ のエントロピー $h(S_t)$ は 正であり 次の評価が成立する。

$$h(S_t) \geqq t \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \log\left(1+\frac{2}{K(\varphi,\psi)\rho(\varphi)\cos\psi}\right)\rho(\varphi)\cos\psi\, d\varphi\, d\psi$$

ここで，$K(\varphi,\psi)$ は，$K(S(\varphi,\psi))=\left\{\tau(\varphi,\psi)+\left(K(\varphi,\psi)+\frac{1}{\rho(\varphi)\cos\psi}\right)^{-1}\right\}^{-1}$ で定まる連分数から決る。

（もし，$\tilde{Z}^+$, $\tilde{Z}^-$ が 互に絶対連続なことが示されれば，上の不等号は，等号となり，$\{S_t\}$ がエルゴード的であり，K-systemなことがわかる。）

§6. 具体的な力学系の例

この§は[10][28][29][31] 等を参照されたい
しかし報告者はその完全な証明を知らないままそこにあげられた事柄を紹介することをお許し願いたい。

例1. 定理3.5 で負曲率空間の測地的 flow は K-system 従ってエルゴード的であることが分かった。 このような運動は，ユークリッド空間の中に，閉曲面 V^2 を置きその近くに，引力と斥力の中心を配置して V^2上にポテンシャルを引おこし，このポテンシャルの下での慣性運動と同値である。 c.f. [18].

例2. L を中心の座標 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$，辺長1の正方形．$V(r)$ を単調減少函数で $V(r)=0 \quad r \geq r_0$ がある $0 < r_0 < \frac{1}{2}$ に対して成立するものとする。 $U(q_1, q_2) = V(r)$； $r = \sqrt{(q_1 - \frac{1}{2})^2 + (q_2 - \frac{1}{2})^2}$ をポテンシャルとする力を受けて，質量 m の質点が運動している力学系を考えよう。

Case 1. L の壁で反射角と入射角が等しいように，完全弾性衝突をしている。

Case 2. L の両側を二次元トーラスになるように identify してある。

定理. $|V'(r)| > b_1$，$|V''(r)| < b_2$ ならば，上の二つの系はエルゴード的で，エントロピーは正．

例3.　Lの中を例1.の如きポテンシャルを持つ二つの粒子が運動している系の *flow* のエントロピーは正。

例4.　Qを三次元ユークリッド空間の単位立方体とする。その中に直径 d 質量 m の球体が n ケ入っており全エネルギーHで，　互に，並に壁で，弾性衝突しながら運動している．この *flow* のエントロピーは正であり，エルゴード的である。

例5.　§5.で論じた場合に，除外領域 D の数を増したり，L の両側をトーラスになるように *identify* しても同じ議論が出来る．

REFERENCE

1 Abramov, L.M. ; The entropy of a flow, Dokl. Mat. A.N. SSSR 128 No. 5. (1959) 873-876.

2 Ambrose, W. ; Representation of ergodic flows, Ann. Math. 43 (1941) 723-729.

3 Anosov, D.V. ; О предельных циклах систем дифференчиальных уравнений с мальим параметрром при старщих производных, Mat. Sbor. 7, 50 299-334.

4 Anosov, D.V. ; Roughness of geodesic flows on compact Riemannian manifolds of negative curvature, Soviet Math. Dokl. 3 (1962) 1068- .

5 Anosov, D.V. ; Ergodic properties of geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature, Soviet Math. Dokl. 4 (1963) 1153- .

6 Anosov, D.V. ; Геодезические потоки на замкнутых римановых много образиях отрицательной кривизны, Trud. Mat. Inst. V.A. Stekloba (1967).

7 Anosov, D.V. - Sinai, Y.G. ; Некоторые гладкие эргодические системы, Uspehi Mat. Nauk 22 No.5 (1967) 107-172.

8 Arnold, V.I. ; Remarks on rotation numbers, Sibirskii Mat. Zhurnal 2 No.6 (1961) 807-813.

9. Arnold, V.I. ; Some remarks on flows of line elements and frames, Soviet Math. Dokl. 2 (1961) 562-564.

10 Arnold, V.I. - Avez, A. ; Problémes ergodiques de la mécanique classique, Paris (1966).

11 Avez, A. ; Frgodic theory of dynamical systems, Vol.1. (1966)
Vol.2. (1966)
Univ. Minesota Inst. : Technology School of Math..

12 Halmos, P.R. ; Lectures on ergodic theory, New York (1958).

13 Hedlund, G.A. ; Fuchsian groups and mixtures, Ann.Math. 40 No.2 (1939) 370-383.

14 Hedlund, G.A. ; The dynamics of geodesic flows, Bull. Amer. Math. Soc. 45 No.4 (1939) 241-260.

15 Hopf, E. ; Ergoden Theorie.

16 Hopf, E. ; Statistik der geodätishen Linien in Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung, Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig 91 (1939) 261-304.

17 Hopf, E. ; Statistik der Lösungen geodätischer Probleme vom unstabilen Typus II, Math. Ann. 117 (1940) 590-608.

18 Kolmogorov, A.N. ; Общая теория динамических систем и классическая механика, Proc. International Congress Math. 1 (1954) 315-333.

19 Kolmogorov, A.N. ; A new metric invariant of transitive systems and automorphisms of Lebesgue space, D.A.N. 119 (1958) 861-864.

20 Kolmogorov, A.N. ; On the entropy per time unit as a metric invariant of automorphisms, D.A.N. SSSR 124 (1959) 754-755.

21 Krylov, N.S. ; Works on the foundations of statistical mechanics, Izdat. Akad. Nauk. SSSR (1950).

22 Kuchinirenko, A.G. ; An estimate from above for the entropy of a classical system, Sov. Math. Dokl. 6 No.2 (1965) 360-362.

23 Rohlin, V.A. : On the fundamental ideas of measure theory, Amer. Math. Soc. Transl. (1) 10 (1962) 1-54.

24 Rohlin, V.A. - Sinai, Ya.G.; Construction and properties of invariant measurable partitions, Sov. Math. Dokl. 2 No.6 (1961) 1611-1614.

25 Sinai, Ya.G. ; Geodesic flows on manifolds of negative constant curvature, Sov. Math. Dokl. 1 No.2 (1960) 335-339.

26 Sinai, Ya.G. Geodesic flows on compact surfaces of negative curvature, Sov. Math. Dokl. 2 No.1 (1961) 106-109.

27 Sinai, Ya.G. ; Dynamical systems with countably multiple Lebesgue spectra, A.M.S. Transl. (2) 39 (1961) 83-110.

28 Sinai, Ya.G. ; On some "Pysical" system with positive entropy, Vest. Moscow. Univ. 5 (1963) 6-12.

29 Sinai, Ya.G. ; On the foundations of the ergodic hyothesis for a dynamical system of spatistical mechanics, Sov. Math. Dokl. 4 No.6 (1963) 1818-1822.

30 Sinai, Ya.G. ; A weak isomorphism of transformations with an invariant measure, Mat. Sbornik 63 (105) No.1 (1964) 23-42.

31 Sinai, Ya.G. ; Classical dynamical systems with countably multiple Lebesgue spectra II , Izvestiya Akad. Nauk SSSR 30 (1966) 15-68.

32 Totoki, H. ; Flow と エントロピー , Seminer on Probability 20.

33 定常過程研究会報告集, 数理研講究録 20.