数理解析研究所講究録
第57巻 1968年 49-71

Wentzell の境界条件をみたす Markov 過程

京大 理　志賀徳造

§.0

Wentzell型の境界条件をみたす拡散過程については、佐藤－上野の結果がある。それは、Wentzell型の境界条件をみたす拡散過程と、境界上のMarkov 過程が 1：1 に対応することを結論づけている。そこで、境界上のMarkov 過程が存在するための条件を、Wentzellの境界条件の中に条件化することが残された重要な問題であった。
最近、Courrège，Bony，Priouret は 拡散過程より広い枠組の中で、本質的には、微分方程式論の結果を用いることによって解決を与えている。
本報告は、この Courrége，Bony，Priouret の結果の紹介である。

§.1 Singular operator

D : N-dim orientable manifold (C^∞) の domain

$\overline{D}$ は compact, ∂D には C^3-classの滑らかさを仮定する。

$S(x, dy)$ が $\overline{D}$ 上の singular kernel であるとは、次の条件をみたす $\overline{D} \times \mathcal{B}_{\overline{D}}$ 上の kernel のことである。

(S_1) $S(x, \{x\}) = 0$, $S(x, dy)$ は dy について $\overline{D} - \{x\}$ 上の Radon measure

(S_2) 任意の local coordinate (U, χ) に対して、

$U \supset {}^\forall K$: compact

$\int_K S(x, dy) |\chi(y) - \chi(x)|^2$ は U 上で有界

関数の系 $\{\sigma_\alpha(x, y)\}_{(x,y) \in \overline{D} \times \overline{D}}$ を次のように構成して、以後これを fix する

(V_α) (U_α) は $\overline{D}$ の 2つの finite covering で $\overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$

(U_α, χ_α) が local coordinate になるものを選ぶ。

$(U_\alpha \times U_\alpha,\ \overline{D} \times \overline{D} - \bigcup_\alpha \overline{V_\alpha} \times \overline{V_\alpha})$ は $\overline{D} \times \overline{D}$ の finite covering

これに対応する 1の分解を $(\sigma_\alpha(x, y), \rho)$ として

$\sum \sigma_\alpha \equiv \sigma$ とおき、これを locally unit function という。

$0 \leqq \sigma \leqq 1$, $\quad \mathrm{supp}[\sigma_\alpha] \subset U_\alpha \times U_\alpha$,

$u \in C^1(\overline{D})$ に対して

$$\Theta_x u(y) \equiv \sum_{\alpha} \sigma_\alpha(x.y)\left[u(x) + \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial \chi_\alpha^k}(x)(\chi_\alpha^k(y) - \chi_\alpha^k(x))\right]$$

によって定義された $\Theta_x u$ を1次のTaylor展開という。

次の形の作用素 S ($\mathcal{D}(S) = C^2(\overline{D})$) を singular operator という.

(S_1). $Su(x) = a(x)u(x) + \dfrac{\partial u}{\partial X} + \displaystyle\int_{\overline{D}} S(x.dy)(u(y) - \Theta_x u(y))$

(S_2). $S1 \leqq 0$.

ここに, X は vector field on $\overline{D}$ である.

さらに、S ; $C^2(\overline{D}) \longrightarrow C(\overline{D})$ continuous を仮定する。

A を $\overline{D}$ 上の uniformly elliptic operator of 2nd order とする.

ここで取り扱うMarkov過程の特性作用素は次の形のものである.

$$A + S = W$$

W は elliptic operator に関する最大値原理がそのまゝ成り立つことを示そう.

<u>Prop. 1</u>

$u \in C^2(\overline{D})$ $\quad \sup u = u(x_0) \geqq 0 \quad {}^{\exists}x_0 \in D$

ならば,

$Wu(x_0) \leqq 0$

☺ $Au(x_0) \leqq 0$ はよく知られている

$$Su(x_0) = a(x_0)u(x_0) + \int_{\overline{D}} S(x_0, dy)\,(u(x_0) - \sigma(x_0, y)u(x_0))$$
$$= u(x_0)\, S1(x_0) \leqq 0$$

Prop. 2

$u \in C^2(\overline{D})$ $Wu \geqq 0$ in $\overline{D}$

$\sup u = u(x_0) \geqq 0, {}^{\exists} x_0 \in D$ ならば uは定数である.

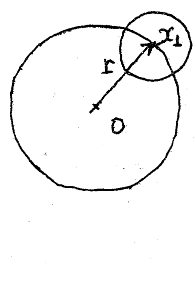
☺ $D \subset R^n$ の場合に示せば, manifold の場合に修正することは容易.

今, uが定数でないと仮定しよう.

$M = \{x \in \overline{D} ;\ u(x) = \sup u\} \neq \overline{D}$ だから. Mと唯一点で接する閉球が存在する. その球を$B(0, r)$としてよい.

$B(0, r) \cap M = \{x_1\}$, $|x_1| = r$

その時, 次のような関数が存在する.



$v \geqq 0$ in $B(0, r)$

$v \leqq 0$ in $B(0, r)^c$

$Wv(x_1) > 0$

このvは次のようにして構成される.

$v_K(x) = e^{-K|x|^2} - e^{-Kr^2}$ は前の2条件をみたしている.

更に, Av_Kを具体的に計算すれば. Aが uniformly elliptic ($\overline{D}$: compact) より下からの評価がえられ. 更に singular kernel の性質を考慮して，Kを定めればよい。

この v に対して，

$\exists \alpha > 0$, $Wv(x) > 0$ in $x \in B(x_1, \alpha)$

$u_\lambda(x) \equiv u(x) + \lambda v(x)$ $(\lambda > 0)$ とおけば，$Wu_\lambda(x) > 0$

$x \in B(x_1, \alpha)$

ところが u_λ は $B(0, r) \cap B(x_1, \alpha)$ で sup を attain

するように，λ をえらぶことができる

i.e. $\sup_{x \in B(0,r) \cap B(x,\alpha)^c} u(x) < \sup u$，$u_\lambda(x_1) = \sup u$ に注意すれ

ばよい．

ところが，これは Prop. 1 に矛盾する．

<u>Prop. 3</u>

$u \in C^2(\bar{D})$ $Wu(x) \geqq 0$，$x \in \bar{D}$，

$u(x_1) = \sup u$ $\exists x_1 \in \partial D$ ならば，u は定数であるか，

又は $\frac{\partial u}{\partial n}(x_1) < 0$ （ここに n は内向き法線を表わす）

（証明 略）

Prop. 3 の証明は Prop. 2 と殆んど同じ方法で出来る．

（注） Prop. 1 より W は $C(\bar{D})$ の中で closable である

$\{W, \mathcal{D}(W) = C^2(\bar{D})\}$ の closure を $\overline{W}$ で表わす．

§2 Minimal resolvent

k回導関数が λ次 Hölder continuous であるような関数の空間は，適当なノルム（Hölder norm）により Banach 空間になる
その空間を $C^{k,\lambda}$ によって表わす.
次の事実は微分方程式論において基本的である.

Lemma. 1 [Dirichlet 問題]

A を class $C^{0,\lambda}$ の elliptic operator とする（i.e $A: C^{2,\lambda} \to C^{0,\lambda}$）
そのとき

$$C^{2,\lambda}(\bar{D}) \longrightarrow C^{0,\lambda}(\bar{D}) \times C^{2,\lambda}(\partial D)$$

$$u \rightsquigarrow (Au, [u]_{\partial D})$$ は isomorph である
（1:1. onto の意）

Lemma. 2 [oblique derivative をもつ境界問題]

τ を ∂D 上の class $C^{1,\lambda}$ なる vector field とする
$\mu \in C^{1,\lambda}(\partial D)$ ならば

$$C^{2,\lambda}(\bar{D}) \longrightarrow C^{0,\lambda}(\bar{D}) \times C^{1,\lambda}(\partial D)$$

$$u \rightsquigarrow \left(Au, \mu\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial \tau}\right)$$ は isomorph である.

次に Index theorem の簡単な形を述べる.
E, F, 各々を Banach 空間
T を E から F への有界 operator とする.
もし. $\dim[\mathrm{Ker}(T)] < +\infty$. $\mathrm{codim}[\mathrm{Im}(T)] < +\infty$

ならば "Tは index をもつ" といい.

$\chi(T) \equiv \dim[\mathrm{Ker}(T)] - \mathrm{codim}[\mathrm{Im}(T)]$ を Tの index.

という。

<u>Lemma. 3</u>

$T : E \longrightarrow F$ bdd. かつ isomorph.

$K : E \longrightarrow F$ compact operator そのとき $T+K$ は

" index 0" をもつ.

∵ T^{-1} は $F \longrightarrow E$ への bdd op. であるから. $T^{-1} \cdot K \equiv H$ は

$E \longrightarrow E$ への compact operator.

従って $I+H$ が "index 0" をもつことがわかればよい

H ; compact だから $\dim[\mathrm{Ker}(I+H)] = \dim[\mathrm{Ker}(I+H^*)] < +\infty$

$\dim[\mathrm{Ker}(I+H^*)] = \dim[\,f \;;\; (f, (I+H)x) = 0,\ x \in E\,]$

$= \mathrm{codim}[(I+H)x,\ x \in E]$

従って $I+H$ は "index 0" をもつ.

<u>Theorem 1</u>

$S \;;\; C^2(\overline{D}) \longrightarrow C^{0,\lambda}(\overline{D})$ continuous

その時. $\forall \alpha > 0$ に対して

$C^{2,\lambda}(\overline{D}) \longrightarrow C^{0,\lambda}(\overline{D}) \times C^{2,\lambda}(\partial D)$

$u \longmapsto ((W-\alpha)u,\ [u]_{\partial D})$ は isomorph である

∵ S は $C^{2,\lambda}(\bar{D}) \longrightarrow C^{0,\lambda}(\bar{D})$ への compact operator

$u \rightsquigarrow ((W-\alpha)u,\ [u]_{\partial D})$ は次の三つの写像の和である。 (1) $u \rightsquigarrow (Au,\ [u]_{\partial D})$ (2) $u \rightsquigarrow (Su, 0)$ (3) $u \rightsquigarrow (-\alpha u, 0)$ (1) は isomorph. (2), (3) は compact だから, Lemma. 3 により. $u \rightsquigarrow ((W-\alpha)u.\ [u]_{\partial D})$ は "index 0" をもつ.

故に, 1 : 1 を示せれば, この定理は証明出来たことになる.

$(W-\alpha)u = 0,\ [u]_{\partial D} = 0 \Rightarrow u = 0$ であることは.

Prop. 1 より直ちにわかる。

(注) Th. 1 は $W1 \neq 0$ ならば. $\alpha = 0$ の時も正しい (∵ Prop. 2)

Theorem 2

(i). $\forall \alpha > 0$, $\forall f \in C^{0,\lambda}(\bar{D})$ に対して

$$\begin{cases} (\alpha - W)u = f \\ \qquad [u]_{\partial D} = 0 \end{cases}$$ は $C^{2,\lambda}(\bar{D})$ の中に unique solution をもつ。

その solution を $u = G^0_\alpha f$ と表わす.

(ii) G^0_α は $C(\bar{D})$ 上の sub-Markov resolvent operator に拡張出来る.

(iii) $\forall f \in C(\bar{D})$ に対して $u = G_\alpha f$ は

$$\begin{cases} (\alpha - \overline{W})u = f \\ \qquad [u]_{\partial D} = 0 \end{cases}$$ の unique solution である.

(iv) for $\forall f \in C_0 \equiv C(\overline{D}) \cap \{u \,;\, [u]_{\partial D} = 0\}$

$$\| \alpha G_\alpha^0 f - f \| \longrightarrow 0 \quad \text{as} \quad \alpha \to \infty$$

∵

(i) は Th. 1 より明らか. (ii) は G_α が $C^{0,\lambda}(\overline{D})$ 上で positive sub Markov であることを示せば十分. それは Prop. 1 から容易にわかる。

(iii), W の closable だから. closure の定義により。

(iv) $f \in C_0^2(\overline{D})$ に対して, $(\beta - W) f \equiv g$ とおくと

$[f]_{\partial D}$ だから. $f = G_\beta^0 g$

$$\| \alpha G_\alpha^0 f - f \| = \| \frac{\beta}{\alpha - \beta} G_\beta g \| + \| \frac{\alpha}{\alpha - \beta} G_\alpha^0 g \| \longrightarrow 0 \ (\alpha \to \infty)$$

従って $f \in C_0(\overline{D})$ についても, 明らかに成り立つ.

Yosida-Hille の定理により. G_α^0 には $C_0(\overline{D})$ 上の continuous semi-group $\{T_t^0\}$ が対応する.

<u>Theorem 3</u>

(i). $\alpha > 0$, $\varphi \in C^{2,\lambda}(\partial D)$ に対して

$$\begin{cases} (\alpha - W) u = 0 \\ \qquad u(x) = \varphi(x) \quad x \in \partial D \end{cases}$$ は $C^{2,\lambda}(\overline{D})$ の中に unique solution

をもつ. それを $u = H_\alpha \varphi$ と表わす

(ii) H_α は $C(\partial D) \longrightarrow C(\overline{D})$ への positive contraction operator に拡張出来る

(iii) $H_\alpha\varphi$ が $C^2(\overline{D})$ に属し、$H_\alpha\varphi$ が ∂D 上の点 x_0 で、nonnegative maximum をとれば、$H_\alpha\varphi$ は定数であるか、又は $\frac{\partial}{\partial n}H_\alpha\varphi(x_0)<0$ である。

☺ (i), (ii) は Th.2 と殆んど同じ。

(iii) は Prop 3 より容易にわかる。

§.3 Wentzell の境界条件について。

S と同じようにして、境界上の singular operator T を定義する。

$\partial D\times\mathcal{B}_{\overline{D}}$ 上の kernel $t(x',dy)$ は、次の条件 (W_1), (W_2) をみたすとき、境界上の singular kernel という

(W_1) $t(x',\{x'\})=0$

$t(x',dy)$ は dy について $\overline{D}-\{x'\}$ 上の Radon measure

(W_2) $\forall(U,\chi)$; 境界を表現する local coordinate に対し

$$\int_K t(x',dy)\left[\chi^N(y)-\sum^{N-1}\{\chi^j(y)-\chi^j(x')\}^2\right]$$

(ここに $^\forall K$ は U の compact subset) は U 上有界

(注) 境界を表現する local coordinate (U,χ), $U\cap\partial D\neq\phi$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x\in\overline{D} \text{ ならば、} \quad \chi^N(x)\geq 0 \text{ であって、} \\ x\in\partial D \rightleftarrows \chi^N(x)=0 \text{ なる座標系。}\end{array}\right.$

境界を表現する座標系 (U,χ) は、各境界点に対して常に存在するので、境界点を含む local coordinate は、いつも

境界を表現するものを選んでおく。

次のように定義される $\Theta^*_{x'}u$ を境界上の1次のTaylor展開という。

$$\Theta^*_{x'}u(y) = \sum_\alpha \sigma_\alpha(x, y)\left[u(x') + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\partial u}{\partial \chi^j_\alpha}(x')\left(\chi^j_\alpha(y) - \chi^j_\alpha(x')\right)\right]$$

さらに、境界上の singular operator T は、次のように定義される。

$u \in C^2(\bar{D})$ に対し、

$$Tu(x') = \eta(x')u(x') + \frac{\partial u}{\partial Z}(x') + \int_{\bar{D}} t(x', dy)\left[u(y) - \Theta^*_{x'}u(y)\right]$$

$T1(x') \leqq 0 \quad \forall x' \in \partial D$、 ここに Z : vectorfield on ∂D

<u>Def</u> L がWentzellの境界条件であるとは、

$\mathcal{D}(L) = C^2(\bar{D}) \ni u$ に対し

$$Lu(x') = Qu(x') + \mu(x')\frac{\partial u}{\partial n}(x') - \delta(x')Wu(x') + Tu(x')$$

Q ; elliptic operator on ∂D.

$\mu \geqq 0 \quad \delta \geqq 0$

つぎに、以后考える L の class を設ける。

L ; "transversal"

$\Longleftrightarrow$ $\forall x' \in \partial D$ に対して

$\mu(x') > 0$ or $\delta(x') > 0$ or $t(x', D) = \infty$

L ; "w-transversal"

$\Longleftrightarrow$ $\forall x' \in \partial D$ に対して、 $\mu(x') + \delta(x') + |T1(x')| + t(x', D) \neq 0$

L ; "(L.1) をみたす"

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} Q : \text{uniformly elliptic on } \partial D \text{ かつ class } C^{0,\lambda} \\ \mu, \delta \in C^{0,\lambda}(\partial D) \\ T ; C^2(\bar{D}) \longrightarrow C^{0,\lambda}(\partial D) : \text{continuous} \end{cases}$$

L ; "(L.2) をみたす"

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} Q = \dfrac{\partial}{\partial \tau} \quad \tau \text{ は class } C^{1,\lambda} \text{ の vectorfield on } \partial D \\ \mu, \delta \in C^{1,\lambda}(\partial D) \quad / \\ T ; C^2(\bar{D}) \longrightarrow C^{1,\lambda}(\partial D) ; \text{continuous} \end{cases}$$

Prop. 4

$u \in C^2(\bar{D})$ $\quad \sup u = u(x') \geqq 0 \quad {}^{\exists}x' \in \partial D$

$$\Longrightarrow \quad Qu(x') + \mu(x')\frac{\partial u}{\partial n}(x') + Tu(x') \leqq 0$$

∵ $Tu(x') \leqq 0$ は Prop 1 に同じ.

Prop. 5

L ; w-transversal $\quad u \in C^2(\bar{D})$ $\quad Lu \geqq 0$. $\sup u > 0$

$$\Longrightarrow \quad {}^{\exists}x \in \bar{D} \; ; \; u(x) = \sup u \text{ かつ } Wu(x) \leqq 0$$

∵

D で sup を attain する時は, Prop. 1 から明らかだから.

∂D 上で sup を attain する時のみ考える. $x' \in \partial D$, $u(x') = \sup u$.

$$0 \leqq Lu(x') = \underset{\substack{\wedge\!\!\shortparallel \\ 0}}{Qu(x')} + \underset{\substack{\wedge\!\!\shortparallel \\ 0}}{\mu(x')\frac{\partial u}{\partial n}(x')} + \underset{\substack{\wedge\!\!\shortparallel \\ 0}}{Tu(x')} - \delta(x')Wu(x')$$

$\delta(x') \neq 0$ ならば，$Wu(x') \leqq 0$　よって．x'をとればよい．

$\delta(x') = 0$ ならば　$\mu(x')\dfrac{\partial u}{\partial n}(x') = 0$，$Tu(x') = 0$

$\dfrac{\partial u}{\partial n}(x') = 0$ ならば．~~Prop~~ $Au(x') \leqq 0$　$\therefore$ $Wu(x') \leqq 0$

そうでなければ　$\mu(x') = 0$，ところが $Tu(x') = 0$ である　ことは L の transversality に矛盾する

<u>Prop. 6</u> (Prop. 5 の Corollary)

L : ω-transversal，$\beta > 0$

$u \in C^2(\bar{D})$．$Lu \geqq 0$．$(W - \beta)u \geqq 0$

$\Longrightarrow$ $u \leqq 0$

<u>Prop. 7</u>

$\forall x' \in \partial D$ に対して　$\mu(x') + {}^t t(x', D) + |T1(x')| \neq 0$

$W1 \neq 0$ とする．その時．$u \in C^2(\bar{D})$．$Lu \geqq 0$．$Wu \geqq 0$

$\Longrightarrow$ $u \leqq 0$

(∵) $\sup u > 0$ とする．もし D の中で sup を attain すれば

Prop. 2 より $u = const$，$W1 \leqq 0$．$W1 \neq 0$ だから仮定に矛盾，

$\sup u = u(x') > 0$．$x' \in \partial D$ とすると

$\dfrac{\partial u}{\partial n}(x') < 0$　(by Prop. 3)　従って．Prop. 5 と同様の議論により　L の (ω)-transversality に矛盾する．

この Prop 4〜7 と Index についての Lemma 3 を用いれば，次の形の Main result を得る。

<u>Theorem. 4</u>

A : uniformly elliptic on $\overline{D}$ かつ class $C^{0,\lambda}$

S ; $C^2(\overline{D}) \longrightarrow C^{0,\lambda}(\overline{D})$ への continuous operator

L は "(L.1) をみたす".

$\Longrightarrow$

1°, $C^{2,\lambda}(\overline{D}) \longrightarrow C^{0,\lambda}(\overline{D}) \times C^{0,\lambda}(\partial D)$

$u \rightsquigarrow (Wu, Lu)$ は "index 0" をもつ.

2°, さらに，L ; weak-transversal ならば，$\beta > 0$ に対し

$u \rightsquigarrow ((W-\beta)u, Lu)$ は isomorph である。

3° $\forall x' \in \partial D$ に対し，$\mu(x') + |T1(x')| + t(x', D) \neq 0$ で，

$W1 \neq 0$ ならば，$u \rightsquigarrow (Wu, Lu)$ は isomorph

(Proof)

まず $u \rightsquigarrow ((A-\beta)u, (Q-\beta))$ が isomorph であることを注意しよう。この map は $u \rightsquigarrow ((A-\beta)u, [u]_{\partial D})$ と $(u, \varphi) \rightsquigarrow (u, (Q-\beta)\varphi)$ を続けたものである。ところが ∂D は compact だから $\varphi \rightsquigarrow (Q-\beta)\varphi$ は $C^{2,\lambda}(\partial D) \longrightarrow C^{0,\lambda}(\partial D)$ への写像として，isomorph.

従って，Lemma 1 と合せれば，2つの写像は共に isomorph。

また、 $u \rightsquigarrow (Su, 0)$ $u \rightsquigarrow (0, \mu\frac{\partial u}{\partial n})$ $u \rightsquigarrow (0, Tu)$

$u \rightsquigarrow (\beta u, 0)$ $u \rightsquigarrow (0, \beta[u]_{\partial D})$ はいずれも

$C^{2,\lambda}(\bar{D}) \longrightarrow C^{0,\lambda}(\bar{D}) \times C^{0,\lambda}(\partial D)$ への compact operator

だから Lemma 3 により

$u \rightsquigarrow (Wu, Qu + \mu\frac{\partial u}{\partial n} + Tu)$ は index 0 をもつ

更に $(f, \varphi) \rightsquigarrow (f, \varphi - \delta[f]_{\partial D})$ は $C^{0,\lambda}(\bar{D}) \times C^{0,\lambda}(\partial D)$

上の isomorph だから、最後の2つの写像を続ければ

$u \rightsquigarrow (Wu, Lu)$ は index 0 をもつことがわかる。

2°. "index 0" をもつことは 1° よりわかる.

従って、1:1 を示せば十分.

ところが L ; w-transversal だから Prop. 6 より明らか。

3° は Prop. 7 から容易にわかる。

Theorem 4 により.

$\beta > 0$, $f \in C^{0,\lambda}(\bar{D})$ に対して

$$\begin{cases} (W - \beta)u = -f \\ \qquad Lu = 0 \end{cases}$$ は $C^{2,\lambda}(\bar{D})$ の中に unique solution をもつ

それを $u = G_\alpha f$ と表わせば.

G^L_α は $C(\bar{D})$ 上の sub-Markov resolvent operator.

を定義することは、Theorem 2 と同様にして、わかる。

<u>Theorem 5</u>

A, S は Th.4 と同じもの

L は "(L.2) をみたす"

$\forall x' \in \partial D$ に対し　$\mu(x') + t(x', D) + |T1(x')| \neq 0$

$\Longrightarrow$

$\forall \beta > 0$ に対し　$C^2(\bar{D}) \longrightarrow C^{0,\lambda}(\bar{D}) \times C^{1,\lambda}(\partial D)$

$$u \longmapsto \left((W-\beta)u,\ \mu\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial \tau} + Tu\right)$$

は isomorph である.

証明は Th.4 と全く同じ方法で, Lemma.2, Lemma 3 を用いれば容易にいえる

<u>Cor of Th.5</u>

$$\begin{cases} (W-\beta)u = -f \\ \quad Lu = -\varphi \end{cases} \qquad f \in C^{1,\lambda}(\bar{D}),\ \varphi \in C^{1,\lambda}(\partial D)$$

は $C^{2,\lambda}(\bar{D})$ の中に unique solution をもつ

∵　$T' \equiv T - \beta\delta I$ も singular operator on ∂D

Th.5 において, T の代りに T' を適用すれば,

$$\begin{cases} (W-\beta)u = -f \\ \mu\dfrac{\partial u}{\partial n} + \dfrac{\partial u}{\partial \tau} + T'u = -\varphi - \beta\delta[f]_{\partial D} \end{cases}$$ は $C^{2,\lambda}(\bar{D})$ の中に

unique solution をもつ　これは同時に, 問題の解である。

従って，L が "(L.2) をみたす" 場合にも，sub-Markov resolvent G_α^L は対応する。

次に G_α^L に $C(\overline{D})$ 上の continuous semi-group が果して対応するか？が問題になるが，そのためには，Hille-吉田の理論により，$G_\alpha^L(C(\overline{D}))$ が $C(\overline{D})$ の中で dense であることが必要十分である．

この問題に対しては，佐藤－上野の結果がそのまゝ成立つ。

Theorem 6

L が (L.1) 又は (L.2) をみたし，更に transversal ならば，$G_\alpha^L(C(\overline{D}))$ は $C(\overline{D})$ の中で dense である。

従って，G_α^L には，$C(\overline{D})$ 上の conti. semigroup が対応する。

Th. 6 は，G_α^L の range が $C(\overline{D})$ の中で dense であるためには，transveral であることが十分であることを云っているのだが，この証明は，佐藤－上野の方法が全くそのまゝ，成立つので，省略する．

これで，一応 semigroup の存在するための条件を，L により条件づけられたが (L.1)，(L.2) の中で，T の regularity の条件が具体的でない。それは S についても同様であるが，

従って，S_xは T の regularity に関する条件を具体化する必要がある。

§4. Singular operator の regularity について.

A は $\overline{D}$ 上の uniformly elliptic operator of 2nd order だから，$\overline{D}$ には，Riemann metric が入る。

$\overline{xy}$ は，その意味での geodesic distance

<u>Lemma 4</u> [$\Theta_x u$ の性質]

(1) $\exists\, C>0 \quad \forall u \in C^2(\overline{D}) \quad |u(y)-\Theta_x u(y)| \leqq C\|u\|_2\, \overline{xy}^2$

(2) $\exists\, C>0 \quad \forall u \in C^2(\overline{D}) \quad |\Theta_x u(y)-\Theta_{x'} u(y)| \leqq C\|u\|_2\, \overline{xx'}$

ここに，$\|\ \|_2$ は $C^2(\overline{D})$ の norm.

これは $D \subset R^N$ の場合に示して，あとは，適当に修正すればよい。D が有界領域の場合は直接計算すれば容易に示される。

<u>Theorem 7</u>

$\alpha>0$，$0<\mu<1$，M : real $C>0$ が存在して

(a) $\displaystyle\int_{B(x,r)} S(x,dy)\,\overline{xy}^2 \leqq C r^\alpha$

(b) $\displaystyle\int_{C[B(x,\rho)\cup B(x',\rho)]} |S(x,dy)-S(x',dy)| \leqq C\,\overline{xx'}^{\mu}\frac{1}{\rho^{M}}$

$\Longrightarrow \quad \exists\, 0<\lambda<1$

$u \rightsquigarrow \int S(x,dy)[u(y)-\Theta_x u(y)]$ は $C^2(\overline{D}) \to C^{0,\lambda}(\overline{D})$; conti.

(Proof)

$0 < {}^{\exists}\lambda < 1$ $\overline{xx'}$ が十分小さいところで.

$$\left|\int S(x.dy)[u(y)-\theta_x u(y)] - \int S(x',dy)[u(y)-\theta_{x'} u(y)]\right|$$

$\leqq C\|u\|_2 \overline{xx'}^{\lambda}$ であることを示せば十分。

$\overline{xx'} = \varepsilon < 1$, $0 < \delta < 1$.

$$I_1 = \left|\int_{B(x.\varepsilon^\delta)\cup B(x',\varepsilon^\delta)} S(x.dy)\ [u(y)-\theta_x u(y)]\right|$$

$$I_2 = \left|\int_{B(x.\varepsilon^\delta)\cup B(x',\varepsilon^\delta)} S(x',dy)\ [u(y)-\theta_{x'} u(y)]\right|$$

$$I_3 = \left|\int_{C[B(x.\varepsilon^\delta)\cup B(x',\varepsilon^\delta)]} S(x.dy)[u(y)-\theta_x u(y)] - S(x',dy)[u(y)-\theta_{x'} u(y)]\right|$$

とおくと

$$\left|\int S(x.dy)[u(y)-\theta_x u(y)] - \int S(x',dy)[u(y)-\theta_{x'} u(y)]\right|$$

$\leqq I_1 + I_2 + I_3$

$B(x.\varepsilon^\delta)\cup B(x',\varepsilon^\delta) \subset B(x,2\varepsilon^\delta), B(x',2\varepsilon^\delta)$ に注意して

Lemma 4 (1) と (a) を用いて

$$I_1 \leqq C_1\|u\|_2 \int_{B(x.2\varepsilon^\delta)} S(x.dy)\,\overline{xy}^2 \leqq C_2\|u\|_2\,\varepsilon^{\alpha\delta}$$

$I_2 \leqq C_2\|u\|_2\,\varepsilon^{\alpha\delta}$ も同様である

$$I_3 \leqq \int_{C[B(x.\varepsilon^\delta)\cup B(x',\varepsilon^\delta)]} |S(x,dy) - S(x',dy)|\,u(y) + \int_{\{\ \text{〃}\ \}} S(x.dy)\,|\theta_x u(y) - \theta_{x'} u(y)|$$

$$+ \int_{\{\ \text{〃}\ \}} |S(x',dy) - S(x.dy)|\,|\theta_{x'} u(y)|$$

第1項 $\leqq C_4 \overline{xx'}^{\mu} \dfrac{1}{\varepsilon^{\delta N}} \|u\|_2 = C_4\, \varepsilon^{\mu-\delta N} \|u\|_2$ (∵ 仮定 (b))

第2項 $\leqq C_5 \|u\|_2\, \overline{xx'} \displaystyle\int_{CB(x,\varepsilon^{\delta})} S(x.dy) \leqq C_6 \|u\|_2\, \varepsilon^{1-2\delta}$

∵ Lemma 4 (2) と

$$\int_{C[B(x.\varepsilon^{\delta})]} S(x.dy) \leq C\, \varepsilon^{-2\delta}$$ に注意すればよい.

これは $\displaystyle\int S(x.dy)\,\overline{xy}^2 \leq {}^{\exists}C$ ($S(x.dy)$ の定義!!) より出る

第3項 $\leqq C_7 \|u\|_2\, \varepsilon^{\mu-\delta N}$ は 第1項と同じ.

$$\therefore\quad I_3 \leqq C_8 \|u\|_2 \left(\varepsilon^{\mu-\delta M} + \varepsilon^{1-2\delta} \right)$$

故に $I_1 + I_2 + I_3 \leqq C_9 \|u\|_2 \left(\varepsilon^{\alpha\delta} + \varepsilon^{\mu-\delta M} + \varepsilon^{1-2\delta} \right)$

$0 < \mu - \delta N < 1$ なるように δ を定め, 更に $\alpha\delta < 1$ なるようにも出来る. $\lambda = \inf(\alpha\delta, \mu-\delta M, 1-2\delta)$ とおけば

$$I_1 + I_2 + I_3 \leqq C_{10} \|u\|_2\, \varepsilon^{\lambda}$$ となる。

Cor of Th.7

$$Su = cu + \frac{\partial u}{\partial X} + \int S(x.dy)[u(y) - \theta_x u(y)]$$

c, X がともに class $C^{0,\lambda}$ とすると.

$C^2(\overline{D}) \longrightarrow C^{0,\lambda}(\overline{D})$

$u \longmapsto Su$ は continuous である。

さらに, Th.7の条件をみたす S は, 具体的にはどんな形のものがあるかを, 次の Th で述べる。

Theorem. 8

$m(dy)$; Aにより induce された Riemann volume element

(1°) $K(x,y) \leqq C \quad \forall x$. almost all y

(2°) $|K(x,y) - K(x',y)| \leqq C\,\overline{xx'}^{\mu} \quad \forall x, \forall x'$ almost all y

その時. $S(x,dy) = \dfrac{K(x,y)}{\overline{xy}^{n+2-\alpha}} m(dy)$ は Th.7 の仮定をみたす。

(Proof)

(a) $\widetilde{m}(\partial B(x,r))$ を 球面 $\partial B(x,r)$ の面積とすると 空間 $\overline{D}$ は compact だから $\exists K_1\, r^{N-1} \leqq \widetilde{m}(\partial B(x,r)) \leqq \exists K_2\, r^{N-1}$

$$\int_{B(x,r)} S(x,dy)\,\overline{xy}^2 \leqq C\cdot\int_{B(x,r)} \frac{m(dy)}{\overline{xy}^{N-\alpha}} \leqq C'\int_0^r \frac{1}{t^{N-\alpha}}\cdot t^{N-1}\,dt$$

$$\leqq C'\int_0^r t^{-(1+\alpha)}dt \equiv C'' r^{\alpha}$$

(b) $N+2-\alpha > 0$ としてよい.

$$\int_{C[B(x,\rho)\cup B(x',\rho)]} |S(x,dy) - S(x',dy)|$$

$$= \int_{C[B(x,\rho)\cup B(x',\rho)]} \left| \frac{K(x,y)}{\overline{xy}^{N+2-\alpha}} - \frac{K(x',y)}{\overline{x'y}^{N+2-\alpha}} \right| dm(y)$$

$$\left| \frac{K(x,y)}{\overline{xy}^{N+2-\alpha}} - \frac{K(x',y)}{\overline{x'y}^{N+2-\alpha}} \right| \leqq \frac{1}{\overline{xy}^{N+2-\alpha}} |K(x,y) - K(x',y)|$$
$$+ |K(x',y)| \left| \frac{1}{\overline{xy}^{N+2-\alpha}} - \frac{1}{\overline{x'y}^{N+2-\alpha}} \right|$$

第1項 $\leqq C \dfrac{1}{\overline{xy}^{N+2-\alpha}} \overline{xx'}^{\mu} \leqq C \dfrac{1}{\rho^{N+2-\alpha}} \overline{xx'}^{\mu}$

$N+2-\alpha = k\nu \quad 0<\nu<1$ なる よう 自然数 k を選ぶ.

$$\left| \frac{1}{\overline{xy}^{k\nu}} - \frac{1}{\overline{x'y}^{k\nu}} \right| = |\overline{x'y}^{\nu} - \overline{xy}^{\nu}| \sum_{\substack{i+j=k+1 \\ i,j\geqq 1}} \frac{1}{\overline{xy}^{i\nu}\,\overline{x'y}^{j\nu}}$$

$$\leqq k\,|\overline{x'y}^{\nu}-\overline{xy}^{\nu}|\,\frac{1}{(\overline{xy}\wedge \overline{x'y})^{(k+1)\nu}}$$

$$\leqq k\,\overline{xx'}^{\nu}\,\frac{1}{(\overline{xy}\wedge\overline{x'y})^{N+2-\alpha+\nu}}\quad\left(\because\ 0<\nu<1\ \text{なので}\ |\overline{x'y}^{\nu}-\overline{xy}^{\nu}|\leqq\overline{xx'}^{\nu}\right)$$

$$\leqq k\,\frac{1}{\rho^{N+2-\alpha+\nu}}\,\overline{xx'}^{\nu}$$

$$\therefore\ \int_{C[B(x,\rho)\cup B(x',\rho)]}|S(x',dy)-S(x',dy)|\leqq C'\left(\frac{1}{\rho^{N+2-\alpha}}+\frac{1}{\rho^{N+2-\alpha+\nu}}\right)\overline{xx'}^{\nu\vee\mu}$$

ρ, $\overline{xx'}<1$ としてよいから $M=N+2-\alpha+\nu$, $\tilde{\mu}=\nu\vee\mu$ と

おけば、 〃 $\leqq C''\dfrac{1}{\rho^{M}}\overline{xx'}^{\tilde{\mu}}$ 。

境界上の singular operator T についても、同じ型の結果を得る。

$\widetilde{x'y}$ を local には $\sum|\chi^i(y)-\chi^i(x')|^2+\chi^N(y)$ と equivalent な量として定義する。

i.e $\forall(U,\chi)$ $U\cap\partial D\neq\phi$, $U\supset{}^{\forall}K$: compact に対し

$\exists K_1, K_2>0$ $\quad K_1\widetilde{x'y}\leqq\sum_{i=1}^{N-1}|\chi^i(y)-\chi^i(x)|^2+\chi^N(y)\leqq K_2\widetilde{x'y}$

for $\forall x'\in K$, $\forall y'\in K$

Theorem 9

(a) $\forall x'\in\partial D$ $\quad\displaystyle\int_{B(x',r)}t(x',dy)\,\widetilde{x'y}\leqq C r^{\alpha}$

(b) $\forall x', \forall x''$ $\quad\displaystyle\int_{C[B(x',\rho)\cup B(x'',\rho)]}|t(x',dy)-t(x'',dy)|\leqq C\,\overline{x'x''}^{\mu}\frac{1}{\rho^{M}}$

$\exists\alpha>0$ $\quad 0<{}^{\exists}\mu<1$ $\quad M$: real $\quad C>0$

$\Longrightarrow$ $0<{}^{\exists}\lambda<1$, $\quad u\rightsquigarrow\displaystyle\int_{D}t(x',dy)[u(y)-\theta^{*}_{x'}u(y)]$ は

$C^2(\bar{D})$ から $C^{0,\lambda}(\partial D)$ への cont. operator である。

更に $|K(x', y)| \leq C$　　　$\forall x.$ a.a y

$|K(x', y) - K(x'', y)| \leq C\,\overline{x'x''}^{\mu}$　　$\forall x', \forall x''$, a.a. y

ならば， $t(x', dy) = \dfrac{K(x', y)}{\overline{xy}^{n-\alpha}\ \widehat{x'y}}\, m(dy)$ は，この定理の仮定をみたす。

これらの証明は Th. 8 に同じである。

Remark 1

Wentzell の境界条件 L が (L. 2) をみたす場合 T は $C^2(\bar{D})$ から $C^{2,\lambda}(\partial D)$ への conti. op. であることを必要とするが，この条件に対する Th. 9 の形での条件は，未解決である。

Remark. 2

A 及び Q が uniformly elliptic であることは，微分方程式の結果に帰着させるために必要だったが，degenerate した elliptic op. については，この種の境界問題はどうなるか。

文献

[1] Brelot-Choquet-Deny のセミナーノート，1965/1966

[2] Courrege ; Bourbaki のセミナーノート 1965/1966, n°302

[3]. Sato-Ueno ; J. Math. Kyoto. 4-3 (1965)