数理解析研究所講究録
第57巻 1968年 103-122

Full-harmonic structure とマルコフ過程

静岡大理　郡　敏昭

§0 序

ポテンシァル論の公理論的な とりあつかいが Brelot Bauer によりおこなわれたが その後 Meyer Hansen Boboc Constantinescu Cornea により「非負優調和函数全体と Excessive function 全体とが一致する Semigroup を構成しその Semigroup が連続な path を持った強マルコフ過程の semigroup of transitions となるようにすること」という問題があつかわれてきた。これは境界条件を自由にしたマルコフ過程であると考えられる(State space は locally compact, not compact)。一方 F.Y. Maeda は倉持による full superharmonic function を公理論的にあつかうため Full harmonic structure を

導入した。もし Maeda による full superharmonic function 全体で非負なものと Excessive function 全体とが一致する十分に良いマルコフ過程ができるなら Full harmonic structure を一つ与えることがいくつかの境界条件をひとまとめに与えることに相当していると考えられる。この論文では与えられた Full harmonic structure よりマルコフ過程を構成する問題をあつかう。

§1 準備

○ Brelot の Axiom

S: locally compact separable Hausdorff space
not compact , connected

S の開集合 U に対して $C(U)=\{$finite continuous function on $U\}$ の linear subspace $\mathcal{H}(U)$ が与えられ $\mathcal{H}=\{\mathcal{H}(U)\,;\,U$ 開集合全体$\}$ が sheaf をつくっているとする。Gを相対 compact な開集合とするとき Gが regular であるとはすべての ∂G 上の連続函数 f が $\overline{G}$ 上への一意的連続な拡張 H_f^G をもち そのGへの制限が $\mathcal{H}(G)$ に属し $f \geqq 0$ on $\partial G \Rightarrow H_f^G \geqq 0$ on $\overline{G}$ をみたすこととする。

Axiom T. Regular domain 全体は S の base になっている.

Axiom H. 任意の domain G に対し $h_n \in \mathcal{H}(G)$
$h_n \uparrow \Rightarrow \sup h_n \equiv +\infty$ or $\sup h_n \in \mathcal{H}(G)$

∘ Maeda の Axiom

$$\mathcal{D} = \left\{ D \quad \text{domain, not relatively compact} \atop \& \ \partial D \ \text{compact} \right\}$$

$D \in \mathcal{D}$ に対し $\mathcal{H}(D)$ の linear subspace $\tilde{\mathcal{H}}(D)$ が与えられたとする.

$\mathcal{G} = \{ G \ \text{open set} \quad \partial G \ \text{compact} \}$。
$\tilde{\mathcal{H}}(G) = \{ u \in \mathcal{H}(G)$; 任意の G の component で $\mathcal{D}$ に属す集合 D に対し $\mathrm{Rest.}_D u \in \tilde{\mathcal{H}}(D) \}$。

$D \in \mathcal{D}$ が regular とは 2頁の regular の定義で $G \to D$, $\mathcal{H}(G) \to \tilde{\mathcal{H}}(D)$, $H_f^G \to \tilde{H}_f^D$ とおきかえて定義されるものとする。 $G \in \mathcal{G}$ はそのすべての component が 2頁の意味もしくは上に定義された意味で regular なとき regular という。

Axiom S. $D \in \mathcal{D}$ (i) $u \in \tilde{\mathcal{H}}(D)$ $D' \subset D$ $D' \in \mathcal{D} \Rightarrow \mathrm{Rest.}_{D'} u \in \tilde{\mathcal{H}}(D')$

(ii) if $u \in \mathcal{H}(D)$, $\exists K$ compact set $\partial D \subset \mathring{K}$ and $\mathrm{Rest}_{D-K} u \in \tilde{\mathcal{H}}(D-K)$ then $u \in \tilde{\mathcal{H}}(D)$

Axiom $\widetilde{T}$. 任意の compact set K に対し $\mathring{K}' \supset K$, $S-K'$ regular となるような compact set K' が存在する。 superharmonic function を

$$\mathcal{S}(G) \equiv \left\{ \begin{array}{l} u \;:\; \text{lower semicontinuous function on } G \\ u > -\infty \;\&\; u \not\equiv +\infty \text{ on any component of } G \\ f \in C(\partial G),\ f \leqq u \Rightarrow H_f^G \leqq u \end{array} \right\}$$

と, full superharmonic function を

$$\widetilde{\mathcal{S}}(G) \equiv \left\{ \begin{array}{l} u \in \mathcal{S}(G)\text{, 任意の } D \in \mathcal{D}\text{, regular } \overline{D} \subset G \text{ に対し} \\ f \in C(\partial D)\ f \leqq u \Rightarrow \widetilde{H}_f^D \leqq u \end{array} \right\}$$

と定義する。

以下 $S \supset S_0 \in \mathcal{D}$: S_0 regular を一つ固定して話す。ことわらないかぎり函数は S_0 上で定義された函数とする。

$$\mathcal{P} \equiv \left\{ \begin{array}{l} p \in \widetilde{\mathcal{S}}_+(S_0) \\ \quad \text{if } {}^{\exists}u \in \widetilde{\mathcal{S}}(S_0),\ p+u \geqq 0 \text{ then } u \geqq 0 \end{array} \right\}$$

と定義する

仮定

◎ $1 \in \widetilde{\mathcal{S}}(S_0)$

◎ For ${}^{\forall}x \in S_0$ ${}^{\exists}p \in \mathcal{P}$ such that $0 < p(x) < \infty$

定義. $p, q \in \mathcal{P}$ $\quad p \succ q \Leftrightarrow p - q \in \mathcal{P}$

次の 1.1 ～1.5 は Maeda により証明されている.

1.1(定義) $p \in \mathcal{P}$, $W \in \mathcal{G}$ $\quad \overline{W} \subset S_0$ に対し

$$\mathcal{B}_W(p) \equiv \left\{ u \in \mathcal{P} ;\ \exists s \in \mathcal{S}(W) \quad u = p + s \text{ on } W \right\}$$

$$p_W(x) \equiv \inf \{ u(x) \ ,\ u \in \mathcal{B}_W(p) \}$$

1.2. $p_W \in \mathcal{P} \cap \mathcal{H}(S_0 - \overline{W})$

$p_W \prec p$

$\exists u \in \mathcal{P} \cap \widetilde{\mathcal{H}}(W) \quad p = p_W + u$

1.3. $\mathcal{P}_b \equiv \mathcal{P} \cap \mathcal{H}(S_0)$ とおくと

$$Bp(x) \equiv \sup \{ u(x) ,\ u \in \mathcal{P}_b \ ,\ u \prec p \}$$

は以下を満足する.

$Bp \in \mathcal{P}_b$, $\quad Bp \prec p$

$Bp = \mathrm{INF} \{ u \in \mathcal{P}_b \quad u \prec p \}$ ここに INF は order $\prec$ による inf とする.

1.4. $p, q \in \mathcal{P} \Rightarrow B(p+q) = p+q$

1.5. $$Bp(x) = \inf \left\{ p_{S_0 - K}(x) \ ;\ \begin{array}{l} K \text{ compact} \subset S_0 \\ S_0 - K \text{ regular} \end{array} \right\}$$

1.6. $p_W = \mathrm{SUP} \{ u \in \mathcal{P} \quad u \prec v \quad \forall v \in \mathcal{B}_W(p) \}$

1.7. $p_K \equiv p - p_{S_0 - K}$ と定義すると

$$p_K = \mathrm{SUP} \{ u \in \mathcal{P} \quad u \prec p \quad u \in \widetilde{\mathcal{H}}(S_0 - K) \}$$

1.6, 1.7 の SUP は order $\prec$ による。

1.8. (i) $W_1, W_2 \in \mathcal{G}$ $\quad W_1 \subset W_2 \subset S_0 \Rightarrow P_{W_1} \prec P_{W_2}$

(ii) K_1, K_2 compact $K_1 \subset K_2 \quad \Rightarrow P_{K_1} \prec P_{K_2}$

(iii) K compact $W \in \mathcal{G}$ $K \subset W \quad \Rightarrow P_K \prec P_W$

(iv) $W \in \mathcal{G}$ K compact $W \subset K \quad \Rightarrow P_W \prec P_K$

1.9. $P_K = (P_W)_K \qquad K$ compact $\subset W \in \mathcal{G}$

1.10. $P_K = \inf(P_{K_n} \; ; \; K_n \downarrow$ compact $K = \bigcap_n K_n \}$

$P_W = \sup(P_K \; ; \; K \subset W \in \mathcal{G})$

$P_K = \inf(P_W \; ; \; K \subset W$ relatively compact open $\}$

1.11. $(P_{K_1})_{K_2} = P_{K_1 \cap K_2}$, $(P_{W_1})_{W_2} = P_{W_1 \cap W_2}$

1.12. $P_{K_1 \cup K_2} + P_{K_1 \cap K_2} = P_{K_1} + P_{K_2}$

Minimum Principle

$G \in \mathcal{G} \qquad \overline{G} \subset S_0 \qquad u \in \mathcal{S}(G)$ とする

そのとき $\liminf_{G \ni x \to \xi} u(x) \geqq 0 \qquad \forall \xi \in \partial G$

$\exists p \in \mathcal{P} \qquad u + p \geqq 0$ on G

がみたされるなら $\quad u \geqq 0$

1.13 if $p \in \mathcal{P} \cap \widetilde{\mathcal{H}}(S_0 - K)$ for some compact K then $\quad Bp = 0$

1.14. $\alpha \geqq 0, p, p_1, p_2 \in \mathcal{P} \qquad p = p_1 + p_2$.

$\Rightarrow \; p_K = (p_1)_K + (p_2)_K \quad (\alpha p)_K = \alpha p_K$

1.15. $u \in \tilde{S}(G)$ $(G \in \mathcal{G})$ が $\forall U \in \mathcal{G}$ regular $\overline{U} \subset G$ に対し $\tilde{H}^{U}_{u|_{\partial U}}(x) \lneqq u(x)$ $(\forall x \in U)$ なるとき uを strict に full superharmonic という。 $p \in \mathcal{P}$ が $W \in \mathcal{G}$ 上で strict に full superharmonic なら $\forall U \in \mathcal{G}$ $\overline{U} \subset W$ に対し P_U は U上で strict に full superharmonic となる。

§2 Complete maximum principle をみたす kernel

Theorem 2.1. 任意の $p \in \mathcal{P} \cap C(S_0)$(1) に対し次の条件をみたす positive proper kernel V^pが一意的に存在する。

a) $\forall g \in \mathcal{B}_b(S_0)$(1) $g \geqq 0$ に対し $V^p g \in \mathcal{P} \cap C(S_0)$ もし $g \in \mathcal{B}_K(S_0)$(1) なら $V^p g \in \tilde{\mathcal{H}}(S_0 - \overline{\{g>0\}})$

b) $V^p 1(x) = p(x) - Bp(x)$ $\forall x \in S_0$

---

(1) $C(S_0)$ は S_0上の連続函数全体. $\mathcal{B}(S_0)$は Borel measurable function 全体, 下添字 b は bounded を 下添字 K は compact support の函数を示す。 $\mathcal{B}_K(S_0)$ は bounded Borel measurable で compact support をもつ函数全体。

証明は Meyer [2] とまったく同様におこなわれる。すなわち $\forall x \in S_0$ を固定し $K \rightsquigarrow P_K(x)$ が 1.8, 1.10, 1.12 より S_0 の任意の集合に対し Outer Capacity として拡張できる。その Borel set への制限 ; $V_x^p(dy)$ は (nonnegative) measure。$V^p 1_K(x) = P_K(x)$ は lowersemicontinuous だから $\forall g \in \mathcal{B}_b(S_0)$ に対し $V^p g \in \mathcal{B}(S_0)$ よって V^p は kernel。$V^p g \in \mathcal{P}$, $V^p g \prec p$ ($\forall g \in \mathcal{B}_b(S_0)$) もすぐわかる。これより Meyer が示したように $V^p g(x)$ の連続性がしたがう。$V^p 1_K(x) = P_K(x)$ は 1.2 より $\in \widetilde{\mathcal{H}}(S_0 - K)$。これと「$h_n \in \widetilde{\mathcal{H}}(W)$ $h_n \uparrow$ $\Rightarrow$ $\sup h_n \equiv +\infty$ or $\sup h_n \in \widetilde{\mathcal{H}}(W)$」が任意の $W \in \mathcal{G}$ に対し成り立つことより, $V^p g \in \widetilde{\mathcal{H}}(S_0 - \overline{\{g > 0\}})$ が任意の $g \in \mathcal{B}_K(S_0)$ $g \geq 0$ に対ししたがう。一意性も Meyer と同様である。

Theorem 2.2. $p \in C_b(S_0) \cap \mathcal{P}$ に対し Theorem 2.1 による kernel を $V^p(x, dy)$ とする。このとき

a) V^p ; $\mathcal{B}_b(S_0) \rightsquigarrow C_b(S_0)$

b) V^p は complete maximum principle をみたす。

c) if $\exists K$ compact $p \in \widetilde{\mathcal{H}}(S_0 - K)$ then $V^p f$

$\in \widetilde{\mathcal{H}}(S_0-K) \qquad (\forall f \in \mathcal{B}_b(S_0))$

d) c)と同じ仮定で x を固定して measure $V^p(x, dy)$ の Support は K にふくまれる。

e) $\forall \varepsilon>0$ に対して compact set K が存在して $\sup_{x\in H} V^p(x, S_0-K)<\varepsilon$ とできる。ここに H は任意の compact set。

証明 (b) Meyer [3] p204 の Remark より $a \geqq 0$, $f, g \in C_K^+(S_0)$ に対して $a+V^pf(x) \geqq V^pg(x)$ on $\{x, g(x)>0\}$ から $a+V^pf(x) \geqq V^pg(x)$ everywhere がしたがうことを言えばよい。 $p\in \mathcal{P}_b$ の場合 $p=Bp$ だから $V^pf \equiv 0$ $(\forall f\in\mathcal{B}_b(S_0))$ このときは c.m.p は成りたっている。一般の場合 $F=\{g(x)>0\}$ とおくと Theorem 2.1. a) より $V^pg\in\widetilde{\mathcal{H}}(S_0-\overset{\circ}{F})$ (F compact より $S_0-F\in\mathcal{G}$ に注意)。また仮定より constant a は full superharmonic. よって $a+V^pf-V^pg\in\mathcal{S}(S_0-F)$。$V^pf$, V^pg は連続だから $\lim_{S_0-F\ni x\to\xi}(a+V^pf(x)-V^pg(x)) = a+V^pf(\xi)-V^pg(\xi)\geqq 0$ $(\forall\xi\in\partial(S_0-F)\subset F)$. Minimum Principle より $a+V^pf-$

$V^p g \geqq 0$ on $S_0 - F$.

(c) $0 \leqq f \leqq 1$ としてよい。$-V^p f = -p + Bp + V^p(1-f) = -p + V^p(1-f)$ が $p \in \tilde{\mathcal{H}}(S_0 - K)$ と 1.13 よりしたがう ふたたび $p \in \tilde{\mathcal{H}}(S_0 - K)$ より $-V^p f \in \tilde{\mathcal{S}}(S_0 - K)$ 一方 $V^p f \in \mathcal{P} \subset \tilde{\mathcal{S}}(S_0 - K)$ だから $V^p f \in \tilde{\mathcal{H}}(S_0 - K)$。

(d) $-p \in \tilde{\mathcal{H}}(S_0 - K)$ より $0 \in \mathcal{B}_{S_0 - K}(p)$（定義 1.1）よって $P_{S_0 - K} = 0$ $p = P_K$ また 1.13 より $Bp = 0$。ゆえに $V^p(x, S_0) = V^p 1(x) = p(x) - Bp(x) = p(x) = P_K(x) = V^p 1_K(x) = V^p(x, K)$。

(e) Axiom $\tilde{T}$ と 1.5 より $P_{S_0 - K_n}(x) \downarrow Bp(x)$ が任意の compact exhaution (K_n) に対して言える。$V^p(x, S_0 - K_n) = p(x) - Bp(x) - P_{K_n}(x) = P_{S_0 - K_n}(x) - Bp(x) \downarrow 0$ $(n \uparrow \infty)$. Dini の定理より この収束は compact set 上で一様。

Corollary 2.3

$\exists (V^p_\lambda)_{\lambda > 0}$ submarkov resolvent kernel such that $V^p - V^p_\lambda = \lambda V^p V^p_\lambda = \lambda V^p_\lambda V^p$

Lemma 2.4.

$p, q \in \mathcal{P} \cap C_b(S_0) \quad p > q$

$\Rightarrow \quad V^p = V^q + V^{p-q}$

(∵ 1.14 より)

Proposition 2. 5. $p \in \mathcal{P} \cap C_b(S_0)$ V^p (V^p_λ) を Theorem 2.1, Corollary 2.3 のそれらとする。このとき任意の $s \in \tilde{\mathcal{S}}_+(S_0)$ に対し $\lambda V^p_\lambda s \leqq s$.

証明 Meyer [3] IX T.70 より, $f, g \in C^+_K$ $(s + V^p f - V^p g)(x_0) > 0$ なる x_0 が存在するとき $(s + V^p f - V^p g)(x) \geqq 0$ on $\{x . g(x) > 0\}$ から $s + V^p f - V^p g \geqq 0$ everywhere がしたがう を言えばよいがこれは Theorem 2.2 (b) と同じように Minimum Principle からしたがう。

Proposition 2.6.

a) p strictly full superharmonic on $W \in \mathcal{G}$

$\Rightarrow$ P_W strictly full superharmonic on W

b) p strictly full superharmonic on $\mathring{K}$ (Kは compact set)

$\Rightarrow$ P_K は strictly full superharmonic on $\mathring{K}$

$\Rightarrow$ $V^p(x, A) > 0 \quad \forall x \in K \quad \forall A \subset \mathring{K}$

§3 $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda V^{\rho}_{\lambda} f(x)$ について。及び Excessive functions.

Full superharmonic function の理論においても superharmonic function の理論の場合と同じように各点 x での $\mathcal{P}$ の positive な element の存在（§1の仮定）より次のことがわかる（方法は Bauer [4] §2.4～§2.7 におけると同様である）

Theorem 3.1. 次の条件 a) b) をみたす可算個の $(P_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{P} \cap C_b(S_0)$ が存在する

a) $\forall K$ compact subset of S_0 に対して部分列 (n_j) が存在し (P_{n_j}) は $C(K)$ で total：すなわち $\forall\mu$: Radon measure on K に対し $\mu(P_{n_j})=0 \ \forall P_{n_j} \Rightarrow \mu(f)=0 \ \forall f\in C(K)$。さらに各 P_{n_j} は $\mathcal{H}(S_0-K)$ に属するようにえらべる。

b) $r_N = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2^n}\frac{P_n}{\|P_n\|} \in \mathcal{P}\cap C_b(S_0)$ for $\forall N\geq 1$。

今後任意の $q\in\mathcal{P}\cap C_b(S_0)$ を一つ固定して

$p \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n}{\|p_n\|} + q$ とおく。

Lemma 3.2.

μ を bounded Radon measure on S_0 とする

$\mu(s) \leqq s(x) \quad \forall s \in \mathcal{S}_+(S_0)$

$\Rightarrow \quad \mu(p) < p(x)$ if $\mu \neq \varepsilon_x$

(証) 仮定より $\mu(p_n) \leqq p_n(x)$ もし $\mu(p)$ $= p(x)$ なら $\forall n$ に対し $\mu(p_n) = p_n(x)$。したがって $\nu = \mu - \varepsilon_x$ とおくと x を含む任意の compact set K に対し $\nu(f) = 0 \ \forall f \in C(K)$ が Theorem 3.1 (a) よりしたがう ゆえに $\mu = \varepsilon_x$.

Corollary 3.3. p は strictly full superharmonic。

Corollary 3.4. K compact subset of S_0 $x \in K$. $\mu \in C^*(K)$ とする このとき $\mu(s) \leqq s(x) \quad \forall s \in \mathcal{S}_+(S_0)$ ならば $\mu(p_K) < p_K(x)$ 又は $\mu = \varepsilon_x$。

(証) Theorem 3.1 a) の後半より $\exists (p_{n_j}) \subset C_c(S_0) \cap \mathcal{P} \cap \tilde{\mathcal{H}}(S_0 - K)$ b) より $p_{n_j} < 2^{n_j} \|p_{n_j}\| p = C_{n_j} \cdot p$。$p_{n_j} \in \tilde{\mathcal{H}}(S_0 - K)$ から $(p_{n_j})_{S_0 - K} = 0$, $(p_{n_j})_K = p_{n_j}$ がわかる。又 1.14 より $(p_{n_j})_K <$

$C_{n_j} \cdot P_K$ よって $C_{n_j} \cdot P_K - P_{n_j} \in \mathcal{P}$ だから
$\mu(C_{n_j} P_K - P_{n_j}) \leqq C_{n_j} P_K(x) - P_{n_j}(x)$
一方 $\mu(P_{n_j}) \leqq P_{n_j}(x)$. したがってもし
$\mu(P_K) = P_K(x)$ ならば $\mu(P_{n_j}) = P_{n_j}(x) \Rightarrow$
$\mu(f) = f(x) \quad \forall f \in C(K) \Rightarrow \mu = \varepsilon_x$.

Lemma 3.5. $\lambda V_\lambda^{P_K} f(x) \to f(x) \quad (\forall f \in C(K) \ \forall x \in K)$

証明： Theorem 2.2.(d) より $V^{P_K}(x, \cdot)$ の Support は K に含まれるから $V_\lambda^{P_K}(x, \cdot)$ の Support も K に含まれる。$\mu_x^{K,\lambda} : f \rightsquigarrow \lambda V_\lambda^{P_K} f(x)$ により $\mu_x^{K,\lambda} \in C^*(K)$ を define すると $\mu_x^{K,\lambda}$ の Support は K に含まれ $\|\mu_x^{K,\lambda}\| \leqq 1$ だから部分列 $(\lambda_j) \uparrow \infty$ がえらべて μ_x^{K,λ_j} はある $\mu_x^K \in C^*(K)$ に weak* で収束する。Proposition 2.5 より $\mu_x^K(s) \leqq s(x) \quad (\forall s \in \mathcal{S}_+(S_0))$ がしたがうから Corollary 3.4 より $\mu(P_K) < P_K(x)$ 又は $\mu = \varepsilon_x$。ところで Resolvent equation より $\lambda V_\lambda^{P_K}(P_K)(x) = \lambda V_\lambda^{P_K} V^{P_K} 1(x) \to V^{P_K} 1(x) = P_K(x) - B P_K(x) = P_K(x)$.（最後の等式は 1.13. より）。

<u>Proposition 3.6.</u> $\forall p \in \mathcal{P} \cap C_b(S_0)$ に対して $V_\lambda^p s \geq V_\lambda^{p_K} s$ $(\forall s \in \tilde{\mathcal{S}}_+(S_0))$

証明. $V_\lambda^p s = V^p(s - \lambda V_\lambda^p s)$, $V_\lambda^{p_K} s = V^{p_K}(s - \lambda V_\lambda^{p_K} s)$, $s \geq \lambda V_\lambda^p s$, $s \geq \lambda V_\lambda^{p_K} s$ に注意しよう。又 $V^p(1_K f) \in \mathcal{P} \cap C_b(S_0) \cap \tilde{\mathcal{F}}(S_0 - \overline{\{f>0\}})$, $V^p(1_K \cdot 1)(x) = p_K(x) = p_K(x) - B p_K(x) = V^{p_K} 1(x)$ と Theorem 2.1 の一意性より kernel $V^p(x, A \cap K)$ と kernel $V^{p_K}(x, A)$ は一致する

したがって $V^p(1_{S_0 - K} g) = V^p g - V^p(1_K g) = V^p g - V^{p_K} g = V^{p - p_K} g$ $(\forall g \in \mathcal{B}_b(S_0))$ となる。さて $t = V_\lambda^p s - V_\lambda^{p_K} s$ とおくと $t = (V^p s - V^{p_K} s) - \lambda V t - \lambda V V_\lambda^{p_K} s + \lambda V^{p_K} V_\lambda^{p_K} s$ が上の注意よりわかる. すなわち $(I + \lambda V) t = V^{p - p_K} s - V^{p - p_K}(\lambda V_\lambda^{p_K} s) = V^{p - p_K}(s - \lambda V_\lambda^{p_K} s)$。$h \equiv s - \lambda V_\lambda^{p_K} s \geq 0$ とおくと上の注意より $(I + \lambda V^p) t = V^p(1_{S_0 - K} \cdot h)$. 今 $V^p(1_{S_0 - K} \cdot h)(y) = t(y) + \lambda V^p t(y) \geq \lambda V^p t(y)$ for $y \in \{\lambda t(y) > 0\}$, $0 \geq V^p(\lambda t - 1_{S_0 - K} \cdot h)(y)$ on $\{\lambda t - 1_{S_0 - K} h > 0\}$ だから complete maximum principle より $0 \geq V^p(\lambda t - 1_{S_0 - K} \cdot h)$ everywhere 。ゆえに $t + \lambda V^p t = V^p(1_{S_0 - K} h) \geq \lambda V^p t$ すなわち $t \geq 0$。

Proposition 3.7. $\lambda V_\lambda^P s(x) \to s(x)$ $\forall s \in \tilde{\mathcal{S}}_+(S_0) \cap C(S_0)$ $\forall x \in S_0$

(証) Proposition 2.5 と Proposition 3.6 より

$0 \leqq s(x) - \lambda V_\lambda^P s(x) \leqq s(x) - \lambda V_\lambda^{P_K} s(x)$

$= (1_K s)(x) - \lambda V_\lambda^{P_K}(1_K s)(x)$ が任意の x を含む Compact set K に対し成り立つ $1_K s \in C(K)$ だから Lemma 3.5 より 右辺 $\to 0$

Lemma 3.8. (Maeda)

$S_n \in \tilde{\mathcal{S}}(S_0)$ $S_n \uparrow \Rightarrow \sup S_n \equiv +\infty$ 又は $\sup S_n \in \tilde{\mathcal{S}}(S_0)$

Proposition 3.9

$$\tilde{\mathcal{S}}_+(S_0) = \{\text{finite excessive function for } (V_\lambda^P)\} \equiv \mathcal{E}_f$$

証明. $t \in \mathcal{E}_f$. $\lambda V_\lambda^P t(x) \uparrow t(x)$

$\lambda V_\lambda^P t(x) = \lambda V^P(t - \lambda V_\lambda^P t)(x) \in \mathcal{P} \cap C(S_0)$

Lemma 3.8 より $t \in \tilde{\mathcal{S}}_+(S_0)$ $\therefore \mathcal{E}_f \subset \tilde{\mathcal{S}}_+(S_0)$

一方 Proposition 3.7 より $\tilde{\mathcal{S}}_+(S_0) \cap C(S_0) \subset \mathcal{E}_f$

ところが $\forall s \in \tilde{\mathcal{S}}_+(S_0)$ に対し $\exists (P_n) \subset \mathcal{P} \cap C(S_0)$ $P_n(x) \uparrow s(x)$ が言えるから $P_n \in \mathcal{P} \cap C(S_0) \subset \tilde{\mathcal{S}}_+(S_0) \cap C(S_0) \subset \mathcal{E}_f$ だから $s \in \mathcal{E}_f$

すなわち $\tilde{\mathfrak{S}}_+(S_0) \subset \mathcal{E}_f$

Proposition 3.7, Theorem 3.1 より $\forall x \in S_0$ $\forall f \in C_K(S_0)$ に対して $\lambda V_\lambda f(x) \underset{\lambda\to\infty}{\to} f(x)$ がしたがう。

$\mathfrak{X} \equiv B_b(S_0)$ は sup norm で Banach space,

$\mathfrak{X}_0 \equiv \overline{V(\mathfrak{X})} \subset C_b(S_0)$,

T_t strongly continuous semigroup on $\mathfrak{X}_0$, such that

$$V_\lambda f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t f \, dt \qquad \begin{matrix}\forall f \in \mathfrak{X}_0 \\ \forall \lambda \geqq 0\end{matrix},$$

$\mathfrak{L} \equiv \tilde{\mathfrak{S}}_+(S_0) \cap \mathfrak{X}$, $\mathfrak{L}' \equiv \mathcal{P} \cap \mathfrak{X}$

とする。

$\mathfrak{L}$ から $\mathfrak{L}$ への map Q_t を次のように定義する.

$$Q_t s(x) = \lim_{\lambda\to+\infty} \uparrow T_t(\lambda V_\lambda s)(x)$$

次の定理は Boboc, Constantinescu Cornea [5] に証明されている（$\mathfrak{L}$ を $\mathfrak{L}'$ に制限しても $Q_t : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}'$ map でその他も成り立つことはあきらか）

Theorem 3.10

(1) $Q_t s \leqq Q_t s' \quad (s, s' \in \mathcal{L} \quad s \leqq s')$

$Q_t(s + s') = Q_t s + Q_t s'$

$Q_t(\alpha s) = \alpha Q_t s \quad (\alpha > 0)$

(2) $Q_t s(x) \leqq s(x)$

(3) $s_n \in \mathcal{L} \quad s_n \uparrow s \in \mathcal{L}$

$\Rightarrow Q_t s_n \uparrow Q_t s$

(4) $Q_t s_n(x)$ は t の右連続函数.

(5) $Q_t Q_u = Q_{t+u}$ on $\mathcal{L}$

(6) $$V s(x) = \int_0^\infty Q_t s(x)\, dt \quad (s \in \mathcal{L})$$

(7) $\forall t > 0$. $s \in \mathcal{L}$ に対して $\exists (f_n) \subset C_k^+(S_0)$

$V f_n(x) \uparrow Q_t s(x)$

Theorem 3.1 Theorem 3.10 より

$\exists$ $P_t(x, dy)$ kernel on $S_0 \times \mathcal{B}(S_0)$

such that $P_t(p - q)(x) = Q_t p(x) - Q_t q(x)$

$(p - q \in (\mathcal{L} - \mathcal{L}) \cap C_K(S_0))$

となることがわかる (Bourbaki Integration Chap. 4. §2) しかし $P_t p = Q_t p \quad p \in \mathcal{L}$ は一般には成立しないしまた $Q_t p - Q_t q$

$\in C_K(S_0)$ が $f-g \in C_K(S_0)$ からしたがうとはかぎらないので Kernel P_t が Semigroup になるかどうかはわからない。

§4. S_0のコンパクト化とその上のTransition Semigroup

Theorem 3.1 の $(P_n)_{n\geq 1}$ は $\lambda V_{\lambda+1} P_n \leq P_n$ をみたすのでKunita-Watanabe [6] の方法でS_0をコンパクト化しその上への V_λ の拡張を $\hat{V}_\lambda$，対応する Transition Semigroup を $\hat{P}_t(x, dy)$ ($x \in \hat{S}$ $dy \in \mathcal{B}(\hat{S})$) とする。

$x \in S_0$ に対しては

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} \hat{P}_t \hat{s}(x)\,dt = \widehat{V_\lambda s}(x) = V_\lambda s(x)$$
$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t} Q_t s(x)\,dt$$

で $\hat{P}_t \hat{s}(x)$, $Q_t s(x)$ は t の右連続函数だから $\hat{P}_t \hat{s} = Q_t s$. ここに $s \in \tilde{S}(S_0)$ で $\hat{s}$ は $\hat{S}$ へのその拡張. $\hat{P}_t$ に対応するマルコフ過程の S_0 のSetへの Hitting probability と full harmonic measure $\hat{H}^G(x, dy)$ の関係，$\hat{S}$ の Branching Point 等については別のところに述

ペ3.

References

1. F. Y. Maeda; Axiomatic Treatment of full-superharmonic functions, J. Sci. Hirosima Univ. 30 (1966) 197–215

2. P. A. Meyer; Brelot's axiomatic theory of the Dirichlet problem and Hunt's theory, Ann. Inst. Fourier 13/2, 357–372 (1963)

3. P. A. Meyer; Probabilités et potentiel.

4. H Bauer; Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie

5. N Bdoc, C. Constantinescu, A. Cornea; Semigroups of transitions on harmonic spaces, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. (1967)

6. H. Kunita, T. Watanabe; Some Theorems Concerning Resolvents over Locally Compact Spaces, Proc. 5-th. Berkeley Symp. 131 – 164