数理解析研究所講究録
第57巻 1968年 123-133

重調和方程式の境界問題の解の正値性について

東京教育大学 理 清水昭信

§1. 序

重調和方程式の境界問題の解の正値性について Hadamard, Duffin, Garabedian, Aronszajn & Smith 等の研究がある。Duffin, Garabedian は、ある特殊の境界問題について Green 函数の正値性がくずれることを示した。Aronszajn & Smith [1] は、次の2つの type の境界問題の Green 函数の正値性について考察した。

D は n 次元 Euclid 空間 R^n の有界領域であり、D の境界 ∂D は十分なめらかであるとする。Δ は Laplacian を表わし、Δ^2 は、Δ を2回 operate する作用素とする。こうして、

問題 I :
$$\Delta^2 u(x) = f(x) \qquad x \in D$$
$$u(\xi) = 0 \qquad \xi \in \partial D$$
$$-c\frac{\partial u}{\partial n} + \Delta u(\xi) = 0 \qquad \xi \in \partial D$$

問題Ⅱ.　$\Delta^2 u(x) = f(x) \qquad x \in D$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\xi) + b\, u(\xi) = 0 \qquad \xi \in \partial D$$

$$d\, u(\xi) + \left(\frac{\partial}{\partial n} + b\right)\Delta u(\xi) = 0 \qquad \xi \in \partial D.$$

ここで，nは∂Dにおける内向きの方線であり，b, c, dは∂D上で定義された，十分なめらかな函数である。

Aronszajn & Smithは，ある条件の下で存在の保証される問題Ⅰ，問題Ⅱのgreen函数がPseudo-reproducing kernelとなることに注意して，reproducing kernelの正値性を考察する問題に帰着している。reproducing kernelについての一般論はAronszajn & Smithによって良く調べられているが，問題Ⅰ,問題Ⅱのgreen函数の正値性の考察という具体的問題に，reproducing kernelの一般論をあてはめることは，そう簡単ではない。問題Ⅰ,問題Ⅱのもつ特殊性をうまく使っている。なによりも，この方法では，問題Ⅰ，問題Ⅱからきまる$L^2(D)$上のoperatorがself-adjointであることが基本的である。

ここでは，上記問題Ⅱを更に一般化した問題[1)]の解の正値性をしらべる。その際，reproducing kernelについての理論と独立に，空間$C(\partial D)$上のsemi-groupの理論を用いて考察する。問題Ⅰについても，全く同じ方法で

1) 必ずしもself-adjointでない問題

考察出来る。問題の formulation は Aronszajn と Smith[1] と全く異っているため，得られる結果を厳密に比較することは困難であるが，Rough にみれば，ほぼ対応する結果が得られているとみなせる。

§2 問題の formulation と結果

D は，n 次元 Euclid 空間 R^n の中の有界領域であり，∂D は有限個の連結成分から成り，その各々の成分は，C^3 級の $(n-1)$ 次元 hypersurface であるとする。$C(\bar{D})$（又は $C(\partial D)$）は，$\bar{D}$（又は ∂D）上の連続函数の空間であり，norm は uniform norm とする。$C^2(\bar{D})$ 上の operator Δ (Laplacian) の $C(\bar{D})$ における最小閉拡張を $\bar{\Delta}$ とかくことにする。又，定数 $\alpha \geqq 0$ に対して，$G_\alpha^{min} f$ $(f \in C(\bar{D}))$ を次の式を満す函数として定義する。

$$(\alpha - \bar{\Delta})\, u(x) = f(x) \quad , \quad x \in \bar{D},$$
$$u(\xi) = 0 \quad , \quad \xi \in \partial D.$$

又，定数 $\alpha \geqq 0$ と $\varphi \in C(\partial D)$ に対して，$H_\alpha \varphi$ を次の式をみたす，$C(\bar{D})$ に属する函数として定義する。

$$(\alpha - \bar{\Delta})\, u(x) = 0 \quad , \quad x \in \bar{D},$$
$$u(\xi) = \varphi(\xi), \quad \xi \in \partial D.$$

「Wentzell type の operator」とは，K. Sato & T. Ueno [2]

の§4で定義された integro-differential operator を指す。ただし [2] §4の条件 (L.1) と (L.2) はみたされるとする。さて, L が Wentzell type の operator であるとしよう。operator LG_α^{min} は $\mathbb{C}(\overline{D})$ から $\mathbb{C}(\partial D)$ への positive bounded operator へ一意的に拡張出来る。[2; Lemma 4.2]。拡張された operator を $\overline{LG_\alpha^{min}}$ で表わす。更に operator $\overline{LH_\alpha}$ は LH_α の $\mathbb{C}(\partial D)$ における最小閉拡張とする [2; Corollary to Lemma 4.1]。$\mathcal{D}(\overline{\Delta})$ (又は $\mathcal{D}(\overline{LH_\alpha})$) は operator $\overline{\Delta}$ (又は $\overline{LH_\alpha}$) の domain とし, $[u]_{\partial D}$ は函数 $u \in \mathbb{C}(\overline{D})$ の ∂D への restriction とする。$\mathcal{D}(\hat{L}) = \{ u \in \mathcal{D}(\overline{\Delta}) ; [u]_{\partial D} \in \mathcal{D}(\overline{LH_\alpha}) \}$。ここで $\mathcal{D}(\overline{LH_\alpha})$ は α に依存しない。このとき $\mathcal{D}(\hat{L}) =$
$\{ u = G_\alpha^{min} f + H_\alpha g ; f \in \mathbb{C}(\overline{D}), g \in \mathcal{D}(\overline{LH_\alpha}) \}$ となる。$\mathcal{D}(\hat{L})$ 上に operator $\hat{L}$ を次の式で定義しよう。

$$\hat{L} u = \overline{LG_\alpha^{min}} f + \overline{LH_\alpha} g \quad , \text{ for } u = G_\alpha^{min} f + H_\alpha g$$

この定義は Well-defined である。

L_1 と B は, Wentzell type の operator とし, d は ∂D 上の連続函数としよう。我々は次のような biharmonic equation の境界問題を研究する。

(1.1) $\quad u \in \mathcal{D}(\overline{\Delta}^2) \cap \mathcal{D}(\hat{L}_1) \cap \mathcal{D}(\hat{L}_2)$

(1.2) $\quad \overline{\Delta}^2 u(x) = f(x) \quad , \quad x \in \overline{D}$.

(1.3) $\hat{L}_1 u(\xi) = 0, \quad \xi \in \partial D,$

(1.4) $\hat{L}_2 u(\xi) = \delta(\xi) u(\xi) - \hat{B}\,\overline{\Delta} u(\xi) = 0, \quad \xi \in \partial D.$

ここで，$\mathcal{D}(\overline{\Delta}^2) = \{u ;\ u \in \mathcal{D}(\overline{\Delta})\ \&\ \overline{\Delta} u \in \mathcal{D}(\overline{\Delta})\}$であり，$\mathcal{D}(\hat{L}_2) = \{u ;\ u \in \mathcal{D}(\overline{\Delta})\ \&\ \overline{\Delta} u \in \mathcal{D}(\hat{B})\}$である。

任意の$f \in C(\overline{D})$に対して，(1.1)〜(1.4)をみたす解uが一意的に存在するとき，fをuへ移すmappingを この境界問題のGreen operatorという。 それを$\mathbb{G}$であらわす。

次の定理1において，次の2つの仮定をおく。

仮定I. 方程式 $-\overline{L_1 H_0}\,\varphi = \psi$ は 任意の$\psi \in C(\partial D)$に対して unique solution $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{L_1 H_0})$をもつ。更に，ある正の定数$\lambda$が存在し，次の命題が成りたつ。 即ち 任意の$\psi \in C(\partial D)$に対して 方程式 $(\lambda I - \overline{BH_0})\varphi = \psi$ は unique solution $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{BH_0})$をもつ。 ここで Iは 恒等作用素である。

注意： 仮定Iのもとで，$\overline{L_1 H_0}$と$\overline{BH_0}$ は，$C(\partial D)$上の positive contraction strongly continuous semigroup の infinitesimal generator になっている[2; Corollary to Theorem 5.1].

仮定Ⅰのもとで, 次の境界問題のGreen operatorの存在が分っている。

$$-\overline{\Delta}\,u(x)=f(x) \quad , \quad x\in\overline{D},$$
$$\hat{L}_1 u(\xi)=0 \quad , \quad \xi\in\partial D.$$

このGreen operatorを $G_0^{\hat{L}_1}$ であらわす。次に, 新たに integro-differential operatorを導入しよう。$\tilde{L}$ と $\tilde{L}_\lambda$ を次の式で定義する。

$$\tilde{L}u=\hat{L}_2 G_0^{\hat{L}_1}u$$
$$\tilde{L}_\lambda u=\tilde{L}_\lambda u+\lambda[u]_{\partial D}$$
$$\mathcal{D}(\tilde{L})=\mathcal{D}(\tilde{L}_\lambda)=\{u;\ G_0^{\hat{L}_1}u\in\mathcal{D}(\hat{L}_2)\}.$$

注意: operator $\tilde{L}$ は次の形で表わされる。

$$\tilde{L}=d(\xi)\,(-\overline{L_1H_0})^{-1}\,\overline{L_1G_0^{min}}+\hat{B}.$$

更に, $\mathcal{D}(\tilde{L})=\mathcal{D}(\hat{B})$ となる。

仮定Ⅱ　positive constant λ が存在して次の命題が成りたつ。$f\in\mathcal{D}(\tilde{L}H_0)$ が $\eta\in\partial D$ で positive maximum をとれば, $\tilde{L}_\lambda H_0 f(\eta)\leqq 0$ である。

定理1.　仮定Ⅰ, 仮定Ⅱのもとで, 次の命題が成りたつ。

(i) $\tilde{L}H_0$ は, $C(\partial D)$上のある positive contraction strongly

continuous semigroup の generator であり，
$-\hat{L}H_0$ の range は $\mathbb{C}(\partial D)$ に等しく，$-\hat{L}H_0$ は
有界，正値の逆作用素をもつ。

(ii) $\mathbb{C}(\bar{D})$の任意の函数 f に対して，(1.1)～(1.4)をみたす解が一意的に存在し，解は次の式で表現される。

(1.5) $\quad u = \mathbb{G}f = \mathbb{G}_0^{\hat{L}_1}\mathbb{G}_0^{\hat{L}}f$

ここで $\mathbb{G}_0^{\hat{L}}$ は次の式で与えられる。

(1.6) $\quad \mathbb{G}_0^{\hat{L}}f = \mathbb{G}_0^{min}f + H_0(-\hat{L}H_0)^{-1}\hat{L}\mathbb{G}_0^{min}f$

(iii) 函数 d が ∂D 上で nonnegative ならば，operators $\mathbb{G}_0^{\hat{L}}$ と $\mathbb{G}$ は positive である。

次に，L_1, L_2 として特殊な形のものを与え，仮定 I，仮定 II がともに満足されるための十分条件をもとめよう。
(1.3)，(1.4) の代りに，次の (1.3′)，(1.4′) を採用する。

(1.3′) $\quad \hat{L}_1 u(\xi) \equiv \frac{\partial}{\partial n}u(\xi) - (b(\xi)+\mu)\,u(\xi) = 0, \quad \xi \in \partial D.$

(1.4′) $\quad \hat{L}_2 u(\xi) \equiv d(\xi)\,u(\xi) - \hat{L}_1\bar{\Delta}\,u(\xi) = 0, \quad \xi \in \partial D.$

ここで，b と d は ∂D 上の連続函数であり，μ は定数，$\frac{\partial}{\partial n}$ は ∂D における内向きの方線に沿った微分をあらわす。更に，$\mathbb{C}(\partial D)$ 上の bounded operator である $\frac{\partial}{\partial n}\mathbb{G}_0^{min}H_0$ の operator norm を m であらわし，$\|d\| = \sup_{\xi}|d(\xi)|$ とする。
定理 1 を用いて，次の定理 2 を得る。

定理2. b, d が nonnegative function であり, $\mu > 0$, $\mu^2 > m\|d\|$ であるならば, (1.1) (1.2) (1.3′) (1.4′) をみたす解が一意的に存在し, Green operator $\mathfrak{G}$ は positive である。

注意. $\mathbb{C}(\bar{D})$ (又は $\mathbb{C}(\partial D)$) 上の operator が nonnegative function を nonnegative function へ移すとき, その operator は positive であるという.

§3. 定理1, 定理2 の証明.

[定理1の証明] 先ずいくつかの Lemma を証明する。

Lemma 1. $\tilde{L}H_0$ は $\mathbb{C}(\partial D)$ 上のある positive contraction strongly continuous semigroup の generator であり, $-\tilde{L}H_0$ の range は, $\mathbb{C}(\partial D)$ に等しく, $-\tilde{L}H_0$ は bounded positive inverse をもつ。

(証明). 任意の $f \in \mathcal{D}(\tilde{L}H_0)$ に対して, $\tilde{L}_\lambda H_0 f = \tilde{L}H_0 f + \lambda f$, $\tilde{L}H_0 = d(\xi)(-\overline{L_1 H_0})^{-1}\overline{L_1 G_0^{min}} + \overline{BH_0}$ であるから,

$$\tilde{L}_\lambda H_0 = \overline{BH_0} + d(\xi)(-\overline{L_1 H_0})^{-1}\overline{L_1 G_0^{min}} + \lambda I.$$

である。 仮定Iより, $\overline{BH_0}$ は generator である。 $d(\xi)(-\overline{L_1 H_0})^{-1}\overline{L_1 G_0^{min}} + \lambda I$ は bounded operator であり, 仮定II より, ある λ に対して $\tilde{L}_\lambda H_0$ が generator

になることが分る。（2; corollary to Theorem 1.2）
さて、今、$-\hat{L}H_0 = \lambda I - \hat{L}_\lambda H_0$ であるから、結局、
$-\hat{L}H_0$ は、generator であり、$-\hat{L}H_0$ の range は $\mathbb{C}(\partial D)$ であり、
$-\hat{L}H_0$ が bounded positive inverse をもつことが分る。

次の2つの Lemma は、容易に証明出来る。

Lemma 2　$u \in \mathbb{C}(\bar{D})$ が (1.1)〜(1.4) をみたすならば、$v = \bar{\Delta} u$ は、次の性質をもつ。

(2.1)　$u = G_0^{\hat{L}_1} v$

(2.2)　$v \in \mathcal{D}(\bar{\Delta})$ and $-\bar{\Delta} v = f$

(2.3)　$v \in \mathcal{D}(\hat{L})$ and $\hat{L} v(\xi) = 0$, $\xi \in \partial D$.

逆に、$v \in \mathbb{C}(\bar{D})$ が (2.2)(2.3) をみたすならば、(2.1) で定義される u は、(1.1)〜(1.4) をみたす。

Lemma 3.　(2.2), (2.3) をみたす解は一意的に存在し、次の式で与えられる。

(2.4)　$v = G_0^{min} f + H_0 (-\hat{L}H_0)^{-1} \hat{L} G_0^{min} f$

Lemma 2 と Lemma 3 から、(1.1)〜(1.4) をみたす解が一意的に存在し、次の式で与えられることが分る。

$u = G_0^{\hat{L}_1} G_0^{\hat{L}} f$　，ここで　$G_0^{\hat{L}} f = G_0^{min} f + H_0 (-\hat{L}H_0)^{-1} \hat{L} G_0^{min} f$.

次に$d(\xi) \geqq 0$としよう。

$$\tilde{\mathfrak{L}} G_0^{min} = d(\xi)(-\overline{L_1 H})^{-1}\overline{L_1 G_0^{min}} + \overline{B G_0^{min}}$$

であるから，$\tilde{\mathfrak{L}} G_0^{min}$は，positiveであることが分る。従って(1.5)，(1.6)より，$G_0^{\tilde{\mathfrak{L}}}$と$G$がpositiveになる。

〔定理2の証明〕 境界条件(1.3′)，(1.4′)はそれぞれ(1.3)，(1.4)の特別の場合である。$b(\xi) \geqq 0$，$d(\xi) \geqq 0$，$\mu > 0$，$\mu^2 > m\|d\|$としよう。定理1によって，仮定Iと仮定IIがみたされることを示せば，十分である。仮定Iが$b(\xi) \geqq 0$，$\mu > 0$のとき，みたされることは，明らかである。さて，

$$\tilde{\mathfrak{L}} H_0 \varphi = \overline{\frac{\partial}{\partial n} H_0}\varphi - b\varphi + \left\{ d\left(\mu - \overline{\left(\frac{\partial}{\partial n} - b\right) H_0}\right)^{-1} \overline{\frac{\partial}{\partial n} G_0^{min}} H_0 \varphi - \mu\varphi \right\}$$

である。$K = d\left(\mu - \overline{\left(\frac{\partial}{\partial n} - b\right) H_0}\right)^{-1} \overline{\frac{\partial}{\partial n} G_0^{min}} H_0$とおく。

Kは$C(\partial D)$上のbounded positive operatorであり，

$\|K\| \leqq \|d\| \cdot \frac{m}{\mu}$である。$\lambda$を$0 < \lambda < \mu - \frac{m\|d\|}{\mu}$となるようにとる。$f \in \mathcal{D}(\tilde{\mathfrak{L}} H_0)$が$x \in \partial D$でpositive maximumをとったとしよう。

$$K f(\xi) \leqq f(x)\, K 1(\xi) \leqq \frac{m}{\mu}\|d\|\, f(x) \quad ,(\forall \xi \in \partial D)$$

であるから，

$$\tilde{\mathfrak{L}}_\lambda H f(x) = \overline{\frac{\partial}{\partial n} H} f(x) - b(x) f(x) + \{ K f(x) - (\mu - \lambda) f(x) \}$$

$$\leqq \left\{ \frac{m}{\mu}\|d\| - (\mu - \lambda) \right\} f(x) \leqq 0$$

従って．仮定IIがみたされることが分った。

References

[1] N. Aronszajn and K.T. Smith, "Characterization of positive reproducing kernels. Applications to Green's functions." Amer. J. Math, Vol 79, 1957, pp. 611–622.

[2] K. Sato and T. Ueno, "Multi-dimensional diffusion and the Markov processes on the boundary." J. Math. Kyoto Univ., Vol 4, No.3, 1965, pp. 529–605.

[3] A. D. Wentzell, "On the lateral conditions for multi-dimensional diffusion processes." Teor. Veroyat. Primen., Vol 4, 1959, pp. 172–185.

[4] A. Shimizu, "Boundary value problems for the biharmonic equation and Markov processes on the boundary." to appear