数理解析研究所講究録
第57巻1968年134-157



# Recurrent Markov chain の構成について

静岡大理　近藤亮司

## §1 序

$S$を可算無限集合、$\mathbb{B}$を$S$で定義された実数値有界函数全体の空間とする。又$\mu$を$S$上すべての点で正の測度とするとき、有限な台をもち、$\langle \mu, f \rangle = \sum_{x\in S} \mu(x) f(x) = 0$をみたすようなfの全体を$\mathbb{N}(\mu)$で表わす。$\mathbb{N}(\mu)$から$\mathbb{B}$への線型写像 R が

(S.C.M)　任意の$f \in \mathbb{N}(\mu)$に対し、もし集合$\{f>0\}$上で$Rf \leqq m$（$m$は実定数）が成り立てば$S$のすべての点で$Rf \leqq m$

をみたすならば、半完全最大値原理（semi-complete maximum principle）をみたすということにする。もしRが連続なrecurrent semi-groupのweak potential operatorであるならば、不変測度$\mu$に対し、上記最大値原理をみたすことが知られている[4][5]。ここでは逆に、ある測度$\mu$に対し、$\mathbb{N}(\mu)$から$\mathbb{B}$への線型写像Rが(S.C.M)をみたすとき、$\mu$を不変測度としてもち、

R を weak potential operator とするような一つの Markov semi-group を構成することが出来るか？ という問題について考える。これは完全最大値の原理をみたす核が与えられたとき、それを potential 核とする semi-group を構成する Hunt の定理の recurrent な場合への移行である。

$\mu$ が有界測度の場合には、このことは肯定的に解決出来、得られた semi-group は必ず recurrent となる。このことは §3 において述べる。しかし、$\mu$ が有界でない場合には、semi-group が決して対応しない場合や、構成出来る場合でも transient になったりして事情は可成り複雑である。そのような例は §4 において与える。$\mu$ が有界でない場合（$\mu$ が有界のときのように）のぞましい形で問題が解決されるための自然で適切な条件は未だ得られていない。

最大値の原理の形を少し変えると、discrete parameter の Markov chain に対する同種の問題となる。このことを §2 で述べて、その結果を後で利用する。

## §2 強められた半完全最大値原理

最初に以後用いられる記号をまとめておく。$S$ の空でない有限部分集合全体を $\mathfrak{F}$ で表わし、各 $E \in \mathfrak{F}$ に対し、

$f_E$ 　関数 $f$ の $E$ 上への制限

$\nu_E$ 測度 $\nu$ の E 上への制限

$\mathbb{B}_E$ $f_E$ 全体の空間

$\mathbb{N}^E$ $f \in \mathbb{N}(\mu)$ かつ $\operatorname{supp} f \subseteq E$ なる $f$ の全体

(但し $\operatorname{supp} f$ は $f$ の台)

という記号を用いる。又 $f^+$, $f^-$ はそれぞれ $\sup(f, 0)$, $\sup(-f, 0)$、$\chi_E$ は E の indicator とする。

$\mathbb{N}(\mu)$ から $\mathbb{B}$ への線型写像 $G$ があってそれが

(R.S.C.M) 任意の $f \in \mathbb{N}(\mu)$ に対し、もし $\{f > 0\}$ 上で $Gf \leqq m$ ($m$ は実定数) が成り立つならば、S 上で $Gf \leqq m - f^-$.

をみたすとき、$G$ は強められた半完全最大値原理 (reinforced semi-complete maximum principle) をみたすということにする。discrete parameter の recurrent Markov chain の weak inverse (Kemeny [6]) はこの最大値原理をみたすことは容易に証明することが出来る。以下 (R.S.C.M) をみたす $G$ が与えられたとして、その性質を調べる。

<u>補題 1</u> $G$ は次の意味で non-singular である。即ち $f \in \mathbb{N}(\mu)$ が恒等的に 0 に等しくなければ $Gf$ は $f$ の台の上で定数に等しくならない。(従って特に、$Gf =$ 定数 なら、$f = 0$ かつ定数 $= 0$ である)

証明　$f\in N(\mu)$, $f\neq 0$, $Gf=m$ が $\{f\neq 0\}$ で成立したとする。このとき (R.S.C.M) より $S$ 上で $Gf\leqq m-f^-$ が成立するので特に $\{f\neq 0\}$ 上では $m=Gf\leqq m-f^-\leqq m$。従って $f^-=0$ を得る。同様にして、$S$ 上で $G(-f)\leqq -m-(-f)^-=-m-f^+$ なることから $f^+=0$ を得るので $f=0$ となり仮定に反する。

補題2　次の性質をもつ$S$上の(有符号)測度の族 $(\lambda^E)_{E\in\mathfrak{E}}$ が存在する。即ち (i) $\mathrm{supp}\,\lambda^E\subseteq E$, (ii) $\langle\lambda^E, 1\rangle=1$ (iii) すべての $f\in N^E$ に対し、$\langle\lambda^E, Gf\rangle=0$。

このような $(\lambda^E)_{E\in\mathfrak{E}}$ は $G$ から unique に定まる。

証明　最初に $E\in\mathfrak{E}$ を固定し、$N^E$ から $\mathbb{B}_E$ への線型写像 $G^E$ を

$$G^Ef=(Gf)_E \qquad (f\in N^E)$$

により定義する。補題1によれば $G^Ef=0$ なら $f=0$ であるから $G^E$ は $N^E$ から $\mathbb{B}_E$ への injection である。一方 $E$ が有限集合であることに注意すると、$\dim N^E=(\dim \mathbb{B}_E)-1$、従って $\dim G^E(N^E)=\dim N^E=(\dim \mathbb{B}_E)-1$ を得る。又再び補題1を用いると $1_E\notin G^E(N^E)$ であ

ることも分る。（$1_E$ = 函数 1 の E 上への制限）。従って $\mathbb{B}_E$ 上の linear functional $l^E \in (\mathbb{B}^E)^*$ で

$$l_E(g_E)=0 \iff g_E = G^E f \quad (f \in \mathbb{N}^E)$$

$$l_E(1_E)=1$$

をみたすものが唯一つ存在する。こゝで

$$\lambda^E(\xi) = \begin{cases} l_E((\chi_{\{\xi\}})_E) & \xi \in E \\ 0 & \xi \notin E \end{cases}$$

と定めれば $(\lambda^E)_{E \in \mathfrak{E}}$ が求めるものである。又上記証明より unique であることも分る。

$E \in \mathfrak{E}$, $g \in \mathbb{B}$ とする。このとき $h_E = (g - \langle \lambda^E, g \rangle)_E$ とおけば

$$l_E(h_E) = \langle \lambda^E, g \rangle - \langle \lambda^E, g \rangle = 0$$

であるから $f^E \in \mathbb{N}^E$ が唯一つ存在して

$$h_E = (g - \langle \lambda^E, g \rangle)_E = G^E f^E$$

とかける。こゝで $H^E g$, $\pi^E g$ を夫々

$$H^E g = G f^E + \langle \lambda^E, g \rangle$$

$$\pi^E g = G f^E - f^E + \langle \lambda^E, g \rangle = H^E g - f^E$$

により定義する。定義より $H^E$, $\pi^E$ は $\mathbb{B}$ から $\mathbb{B}$ への線型写像で E 上では $g = H^E g$, S＼E 上では

$H^E g = \pi^E g$ であることが容易に確かめられるが，更に

<u>補題 3</u>　(i)　もし $E$ 上で $g \geqq 0$ なら $H^E g \geqq 0$, $\pi^E g \geqq 0$ が $S$ 上で成立。　(ii)　$H^E 1 = 1$,　$\pi^E 1 = 1$,　(iii)　$E \subseteq F$ ならば　$H^F H^E g = H^E g$,　$\pi^F H^E g = \pi^E g$.
が成り立つ。

<u>証明</u>　(i)　$E$ 上で $g \geqq 0$ とする。　定義により $H^E g = Gf^E + \langle \lambda^E, g \rangle$　$(f^E \in N^E)$ とおけば．　$f^E$ の台の上で

$$Gf^E = -\langle \lambda^E, g \rangle + H^E g$$
$$= -\langle \lambda^E, g \rangle + g \geqq -\langle \lambda^E, g \rangle$$

が成立する。　従って $(R. S. C. M)$ より

$$Gf^E \geqq -\langle \lambda^E, g \rangle + (f^E)^+$$

が $S$ 上で成立する。　故に

$$H^E g = Gf^E + \langle \lambda^E, g \rangle \geqq (f^E)^+ \geqq 0$$

かつ

$$\pi^E g = Gf^E + \langle \lambda^E, g \rangle - f^E$$
$$\geqq Gf^E + \langle \lambda^E, g \rangle - (f^E)^+ \geqq 0$$

が $S$ 上で成立する。

(ii)　$H^E 1 = Gf^E + \langle \lambda^E, 1 \rangle$　とする。　このとき $E \supseteq \mathrm{supp}\, f^E$ 上で　$Gf^E = 0$　であるから補題 1 により．

$f^E = 0$.　従って $H^E 1 = \langle \lambda^E, 1 \rangle = 1$.　$\pi^E 1 = H^E 1 - f^E = H^E 1 = 1$ となる。

(iii)　$E \subseteq F$ かつ

$$h = H^E g = Gf^E + \langle \lambda^E, g \rangle \qquad f^E \in \mathbb{N}^E$$

$$H^F h = Gf^F + \langle \lambda^F, h \rangle \qquad f^F \in \mathbb{N}^F$$

とする。　F 上では $H^F h = h$ であることから，F 上で

$$Gf^F + \langle \lambda^F, h \rangle = Gf^E + \langle \lambda^E, g \rangle$$

を得る。従って $f^F - f^E$ の台 $(\subseteq F)$ 上で

$$G(f^F - f^E) = \langle \lambda^E, g \rangle - \langle \lambda^F, h \rangle = \text{定数}$$

となるので，$f^F = f^E$ 且つ $\langle \lambda^E, g \rangle = \langle \lambda^F, h \rangle$ を得る。　故に

$$H^F h = H^F H^E g = H^E g$$

及び

$$\pi^F h = \pi^F H^E g = h - f^E = \pi^E g$$

となる。

この補題より $H^E$, $\pi^E$ は S 上の Markov kernel で，測度 $H^E(x, \cdot)$, $\pi^E(x, \cdot)$ の台は E に含まれることが分る。

補題 4　$E \subseteq F$ とし，$g \geqq 0$ の台が E に含まれるならば　$\pi^E g \geqq \pi^F g$　が成り立つ。

証明　$\Pi^E g(x)$

$$= \Pi^F H^E g(x)$$
$$= \sum_{y\in E} \Pi^F(x,y) g(y) + \sum_{y\in S\setminus E} \Pi^F(x,y) H^E g(y)$$
$$\geqq \sum_{y\in E} \Pi^F(x,y) g(y)$$
$$= \Pi^F g(x).$$

定理 1　$\mu$ を $S$ 上にいたる所正な有界測度、$G$ を強められた半完全最大値原理をみたす $N(\mu)$ から $\mathbb{B}$ への線型写像とする。このとき $S$ 上の kernel $P$ で

(1.1)　(Markov kernel)　$P \geqq 0,\ P1 = 1$

(1.2)　(invariant measure)　$\mu P = \mu$

(1.3)　(weak inverse)　$(I-P)Gf = f \quad (\forall f \in N(\mu))$

をみたすものが存在し、しかも unique である。

更に $P$ は

(1.4)　(recurrent)　$\sum_n P^n(x,y) = \infty \quad (\forall x,y\in S)$

である。

注意　$\mu$ が有界であってもなくても、(1.3) をみたす Markov kernel $P$ は unique である。このことは、定理の証明をみれば分る。又この事情は、後で述べる補題 5 及び定理 2 においても同様である。

証明. $E_n \in \mathfrak{K}$, $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots$, $\bigcup_{n \geqq 1} E_n = S$ とする。任意の $x, y \in S$ に対し, $n$ を充分大とすれば $y \in E_n$ となるので補題4により

$$\pi^{E_n}(x, y) \geqq \pi^{E_{n+1}}(x, y) \geqq \cdots \geqq 0$$

である。従って, すべての $x, y \in S$ について,

$$P(x, y) = \lim_{n \to \infty} \pi^{E_n}(x, y)$$

が存在する。明らかに $P \geqq 0$, $P1 \leqq 1$ 即ち, $P$ は sub-Markov kernel である。最初に (1.2) を示そう。$g \in \mathbb{B}$, $H^{E_n} g = Gf^{E_n} + \langle \lambda^{E_n}, g \rangle$ ($f^{E_n} \in \mathbb{N}^{E_n}$) とする。$\mu$ が有界であることと, $\chi_{E_n} \pi^{E_n} \to P$ $(n \to \infty)$ 及び

$$\begin{aligned}
&\langle \mu, \chi_{E_n} \pi^{E_n} g \rangle \\
&= \langle \mu, \chi_{E_n} H^{E_n} g \rangle - \langle \mu, \chi_{E_n} f^{E_n} \rangle \\
&= \langle \mu, \chi_{E_n} g \rangle
\end{aligned}$$

であることを用いると,

$$\begin{aligned}
&\langle \mu P, g \rangle = \langle \mu, P g \rangle \\
&= \langle \mu, \lim_{n \to \infty} \chi_{E_n} \pi^{E_n} g \rangle \\
&= \lim_{n \to \infty} \langle \mu, \chi_{E_n} \pi^{E_n} g \rangle \\
&= \lim_{n \to \infty} \langle \mu, \chi_{E_n} g \rangle = \langle \mu, g \rangle
\end{aligned}$$

を得る。$g \in \mathbb{B}$ は任意であるから $\mu P = \mu$ となる。

次に(1.1)を示す。(1.2)より $\langle \mu P, 1 \rangle = \langle \mu, 1 \rangle$ であるが $P1 \leqq 1$ であるから $\mu$-測度0を除き $P1 = 1$ が成立する。所が $\mu$ は至る所正なので $S$ 上で $P1 = 1$. 即ち $P$ は Markov kernel である。

(1.3)の証明. $f \in N(\mu)$, $g = Gf + \|Gf\|$ とおく。但し $\|Gf\| = \sup_x |Gf(x)|$。 $E_n \in \mathfrak{K}$, $E_n \uparrow S$ とすれば、充分大きい $n$ に対し $\mathrm{supp}(f) \subseteq E_n$ となる。従って

$$\pi^{E_n} g(x) = \pi^{E_n} Gf(x) + \|Gf\|$$
$$= Gf(x) - f(x) + \|Gf\|$$

がすべての $x \in S$ に対して成立する。 $g \geqq 0$ に注意すると、Fatouの不等式から

$$Pg(x) \leqq \liminf_{n \to \infty} \pi^{E_n} g(x)$$
$$= Gf(x) - f(x) + \|Gf\|$$

を得るが、このことは $P1 = 1$ により

$$PGf \leqq Gf - f$$

を意味している。 $f$ の代りに $-f$ を考えれば

$$PG(-f) \leqq G(-f) - (-f)$$

即ち

$$PGf \geqq Gf - f$$

を得るので、結局 $PGf = Gf - f$ となって (1.3) の等式が成立する。

uniqueness は次のようにして得られる。今、$P, \tilde{P}$ を (1.3) をみたす2つの Markov kernel とする。$g \in \mathbb{B}$, $E_n \in \mathfrak{K}$, $E_n \uparrow S$ とすると、$\| H^{E_n} g \| \leqq \| g \|$ かつ $H^{E_n} g \to g \ (n \to \infty)$ (各点収束) であるから、Lebesgue の定理で

$$
\begin{aligned}
Pg &= \lim_{n \to \infty} P H^{E_n} g \\
&= \lim_{n \to \infty} P \left( G f^{E_n} + \langle \lambda^{E_n}, g \rangle \right) \\
&= \lim_{n \to \infty} \left( G f^{E_n} - f^{E_n} + \langle \lambda^{E_n}, g \rangle \right) \\
&= \tilde{P} g
\end{aligned}
$$

を得る。従って $P = \tilde{P}$ となり uniqueness がいえた。

最後に (1.4) を示す。$P$ はいたる所正な有界な不変測度をもつので、$S$ の各点は Markov chain $P$ に関し再帰的:

$$\sum_{n \geqq 0} P^n (x, x) = \infty$$

である。従って、(1.4) をいうには $P$ が irreducible であることを示せばよい。もし、ある $x, y \in S$, $x \neq y$ があって、すべての $n \geqq 0$ に対し $P^n (x, y) = 0$ と仮定する。こゝで $N(\mu)$ に属する函数 $e_y$ を

$$e_y(z) = \begin{cases} 1 & z = x \\ -\mu(x)/\mu(y) & z = y \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

と定義する。

$\{e_y < 0\} = \{y\}$ 上で $Ge_y = Ge_y(y)$ であることから (R.S.C.M) を用いて $Ge_y \geqq Ge_y(y)$ を得る。従って、任意の $n \geqq 0$ に対し

$$\sum_{k=0}^{n} P^k(x, x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} P^k e_y(x)$$

$$= Ge_y(x) - P^{n+1} Ge_y(x)$$

$$= [Ge_y(x) - Ge_y(y)] - P^{n+1}[Ge_y - Ge_y(y)](x)$$

$$\leqq Ge_y(x) - Ge_y(y) < \infty$$

を得る。このことは $\sum_{n \geqq 0} P^n(x, x) = \infty$ と矛盾するので、P は irreducible である。従って (1.4) が証明された。

上記証明で (1.1), (1.2), (1.4) を証明するのに $\mu$ が有界であることを本質的に用いている。実際 $\mu$ が有界でないとき、(1.1), (1.2) (1.3) はみたすが (1.4) をみたさない例、(1.1), (1.3) はみたすが (1.2) (1.4) をみたさない例

がある。

§3. 半完全最大値原理

この§では最初から $\mu$ は有界測度とし、R は $N(\mu)$ から $\mathbb{B}$ への線型写像で半完全最大値原理 (S. C. M) をみたすとする。$\alpha > 0$ に対して、$G_\alpha = I + \alpha R$ とおくと $G_\alpha$ は $N(\mu)$ から $\mathbb{B}$ への線型写像である。

__補題5__　$G_\alpha$ は強められた半完全最大値原理をみたす。

__証明__　$f \in N(\mu)$ とし、$\{f>0\}$ 上で $G_\alpha f \leqq m$ とする。このとき $\{f>0\}$ 上では

$$m \geqq G_\alpha f = f + \alpha Rf \geqq \alpha Rf$$

が成立するので、(S. C. M) より S 上で $m \geqq \alpha Rf$ となる。特に $\{f \leqq 0\}$ 上では

$$\begin{aligned} G_\alpha f &= f + \alpha Rf \\ &= -f^- + \alpha Rf \leqq m - f^- \end{aligned}$$

となり、$\{f>0\}$ 上では $f^- = 0$ であるから、結局 S 上で

$$G_\alpha f \leqq m - f^-$$

となる。

$G_\alpha$ は (R.S.C.M) をみたすので §1 定理1によって、(1.1), (1.2) (1.3) (1.4) をみたす $S$ 上の kernel $Q_\alpha$ が存在する。こゝで $R_\alpha = Q_\alpha/\alpha$ とおくと、

<u>補題6</u> $(R_\alpha)_{\alpha>0}$ は次の条件をみたす。

(2.1) (Markov kernel) $\alpha R_\alpha \geqq 0$, $\alpha R_\alpha 1 = 1$

(2.2) (invariant measure) $\alpha \mu R_\alpha = \mu$

(2.3) (resolvent equation)

$$R_\alpha - R_\beta + (\alpha-\beta) R_\alpha R_\beta = 0$$

(2.4) (weak potential operator)

$$(I-\alpha R_\alpha) R f = R_\alpha f \qquad \forall f \in N^1(\mu)$$

このような $(R_\alpha)_{\alpha>0}$ は unique である。更に

(2.5) (recurrent)

$$\lim_{\alpha\downarrow 0} R_\alpha(x, y) = \infty \qquad \forall x, y \in S$$

が成立する。

<u>証明</u> (2.1), (2.2) (2.4) 及び uniqueness は定理1における (1.1), (1.2), (1.3) のいいかえに過ぎないので、(2.3), (2.5) の証明だけを述べる。

$G_\alpha$ に対して補題1で定まる測度の族を $(\lambda_\alpha^E)_{E\in\mathfrak{E}}$, Markov kernel の族を $(H_\alpha^E)_{E\in\mathfrak{E}}$ と表わす。

もし $g \in \mathbb{B}$, $H^E_\beta g = G_\beta f^E + \langle \lambda^E_\beta, g \rangle$ とおると、

$$H^E_\beta g = G_\alpha f^E + (\beta - \alpha) R f^E + \langle \lambda^E_\beta, g \rangle$$

$$R_\alpha H^E_\beta g = R f^E + (\beta - \alpha) R_\alpha R f^E + \langle \lambda^E_\beta, g \rangle / \alpha$$

を得る。所で、

$$R_\beta H^E_\beta g = R f^E + \langle \lambda^E_\beta, g \rangle / \beta$$

であるから、

$$R_\alpha H^E_\beta g - R_\beta H^E_\beta g$$

$$= (\beta - \alpha) [ R_\alpha R f^E + \langle \lambda^E_\beta, g \rangle / \alpha\beta ]$$

となる。一方

$$R_\alpha R_\beta H^E_\beta g \times (\beta - \alpha)$$

$$= (\beta - \alpha) [ R_\alpha R f^E + \langle \lambda^E_\beta, g \rangle / \alpha\beta ]$$

であることは容易に分るので

$$R_\alpha H^E_\beta g - R_\beta H^E_\beta g$$

$$= (\beta - \alpha) R_\alpha R_\beta H^E_\beta g$$

となる。こゝで $E_n \in \mathfrak{K}$, $E_n \uparrow S$ とおけば容易に (2.3) がある。(2.5) を示すには、最初に不等式

$$R_\alpha(x, y) \leqq R_\alpha(y, y)$$

に注意する。これは $I + \beta R_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} (\beta R_{\alpha+\beta})^n$ とかいてみれば分る通り、$I + \beta R_\alpha$ が完全最大値原理

をみたすので　$I(x,y)+\beta R_\alpha(x,y) \leqq I(y,y)+\beta R_\alpha(y,y)$ となり，両辺を $\beta$ で割って $\beta\uparrow\infty$ とすることにより得られる。

従ってもし，ある $y\in S$ について，$\lim_{\alpha\downarrow 0} R_\alpha(y,y)<\infty$ であれば，すべての $x\in S$ に対し，

$$\lim_{\alpha\downarrow 0} \alpha R_\alpha(x,y)=0$$

となる。故に (2.2) より

$$\mu(y)=\mu(\lim_{\alpha\downarrow 0}\alpha R_\alpha)(y)=0$$

となり矛盾する。このことは (2.5) が $x=y$ について正しいことを示している。一般の $x,y$ については

$$1=\lim_{\alpha\downarrow 0} R_\alpha(x,y)/R_\alpha(y,y)$$

より，(2.5) が成立する。この等式を示すには，例えば $r(x)=\liminf_{\alpha\downarrow 0} R_\alpha(x,y)/R_\alpha(y,y)$ とおくと，$r$ が (discrete parameter) の recurrent Markov chain $Q_\alpha=\alpha R_\alpha$ の excessive function であることを用いれば証明される。

Reuter [7] によれば，$(R_\alpha)_{\alpha>0}$ が (2.1), (2.3) をみたすならば，$S$ 上に kernel の族 $(P_t)_{t>0}$ があって，

(2.6) (Markov kernel)　$P_t\geqq 0$，$P_t 1=1$.

(2.7) (semi-group) $P_t P_s = P_{t+s}$

(2.8) (continuity on $(0, \infty)$)

各 $x, y \in S$ に対し、関数 $t \to P_t(x, y)$ は $(0, \infty)$ 上で連続

(2.9) $$R_\alpha(x, y) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} P_t(x, y)\, dt$$

をみたすことが知られている。又、このような $(P_t)_{t>0}$ は unique である。従って任意の $f \in \mathbb{B}$ に対し、$t \to P_t f(x)$ が $(0, \infty)$ 上で連続、$t \to \mu P_t(y)$ が $(0, \infty)$ 上で連続。逆 Laplace 変換の一意性により、次の定理を得る。

<u>定理 2</u>　$\mu$ を有界測度、$R$ を半完全最大値原理をみたす $\mathbb{N}(\mu)$ から $\mathbb{B}$ への線型写像とする。このとき $t > 0$ で連続な Markov semi-group $(P_t)_{t>0}$ で

(2.10) $$\mu P_t = \mu \qquad \forall t > 0$$

(2.11) $$(I - P_t) R f = \int_0^t P_s f\, ds \qquad \forall t > 0,\ f \in \mathbb{N}(\mu)$$

をみたすものが存在して unique である。又 $(P_t)_{t>0}$ は

(2.12) $$\int_0^\infty P_t(x, y)\, dt = \infty \qquad \forall x, y \in S$$

をみたすという意味で recurrent である。

次に$(P_t)_{t>0}$の$t=0$における連続性を調べる。このことに対しては次の定理が成り立つ。

<u>定理3.</u> $(P_t)_{t>0}$が

(2.13) (continuity at $t=0$)

$$\lim_{t \downarrow 0} P_t(x, y) = I(x, y)$$

をみたすための必要充分条件は $R$が(補題1の意味で) non-singular なことである。

<u>証明</u> 先づ$(P_t)_{t>0}$が$t=0$で連続と仮定する。更に$Rf=m$が$f$の台の上で成立しているとすると、(S.C.M)により$S$上で$Rf=m$である。従って(2.11)により

$$\int_0^t P_s f\, ds = (I-P_t)Rf = 0$$

がすべての$t>0$に対して成立する。$(P_t)_{t>0}$の$t=0$における連続性は$\lim_{t\downarrow 0} P_t f(x) = f(x)$を意味するので

$$f(x) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}\int_0^t P_s f(x)\, ds = 0 \quad \forall x \in S$$

となり$f=0$となる。従って$R$はnon-singularである。

次に$R$をnon-singularとしよう。

一般に $t>0$ で連続な Markov semi-group $(P_t)_{t>0}$ に対しては，すべての $x, y \in S$ に対し，

$$\varpi(x, y) = \lim_{t \downarrow 0} P_t(x, y)$$

が存在し，$\varpi$ は $\varpi^2 = \varpi$ をみたす sub-Markov kernel であることが知られている [ ]。従って，R が non-singular のとき $\varpi = I$ であることを示せばよい。所で R が non-singular のときには，補題 2 の条件 (i) (ii) (iii) をみたす $(\lambda^E)_{E \in \mathfrak{K}}$ が R に対して定まり，それを用いて任意の $g \in \mathbb{B}$ に対し，

$$H^E g = Rf^E + \langle \lambda^E, g \rangle \qquad f^E \in \mathbb{N}^E$$

を定義することが出来る。又 (R. C. M) を用いて $\|H^E g\| \leqq \|g\|$ であることも示し得る。今 $E_n \in \mathfrak{K}$，$E_n \uparrow S$ とすると，

$$\begin{aligned} P_t H^{E_n} g &= P_t R f^{E_n} + \langle \lambda^{E_n}, g \rangle \\ &= R f^{E_n} - \int_0^t P_s f^{E_n} ds + \langle \lambda^{E_n}, g \rangle \\ &= H^{E_n} g - \int_0^t P_s f^{E_n} ds \end{aligned}$$

となる。特に，$g = \chi_{\{y\}}$ とおくと，Fatou の不等式により

$$\varpi H^{E_n} g(x) \leqq \liminf \left[ H^{E_n} g(x) - \int_0^t P_s f^{E_n}(x) ds \right]$$

$$= H^{E_n} g(x)$$

となるが $0 \leqq H^{E_n} g \leqq 1$, $\lim_{n\to\infty} H^{E_n} g = \chi_{\{y\}}$ であることを注意して Lebesgue の定理を用いれば

$$W(x, y) \leqq I(x, y)$$

となる。このような sub-Markov kernel は

$$W(x, y) = w(x) I(x, y) \quad (0 \leqq w(x) \leqq 1)$$

の形をしているが $W^2 = W$ より, $w(x) = 0$ 又は $1$ である。 $P_t \to W$ $(t \to 0)$ に Lebesgue の定理を用いると,

$$w(y)\mu(y) = \lim_{t\downarrow 0} \mu P_t(y) = \mu(y)$$

となるので $w(x) = 1$ $(\forall x \in S)$ となり, $(P_t)_{t>0}$ の $t=0$ での連続性がいえた。

§4 例

この§では有界でない測度に対する強められた半完全最大値原理(R.S.C.M)をみたす作用素の例をあげる。(R.S.C.M)は半完全最大値原理(R.C.M)を意味するので, (R.C.M)をみたし, non-singular な作用素の例にもなっている。

例 1. $S$ を整数全体の集合, $\mu(x) = 1$ $(\forall x \in S)$ とする。

このとき

(3.1) $$Gf(x) = -\sum_{y\in S}|x-y|f(y) \qquad f\in N(\mu)$$

と定義する。簡単な計算で

(3.2) $$Gf(x) = Gf(x+1) + 2\sum_{y\leqq x} f(y)$$

(3.3) $$Gf(x) = Gf(x-1) + 2\sum_{y\geqq x} f(y)$$

(3.4) $$Gf(x) = \frac{1}{2}[Gf(x+1) + Gf(x-1)] + f(x)$$

であることが分る。もし $f$ の台が $\{a, a+1, \cdots, b\}$ に含まれていれば (3.2) より $Gf(x) = Gf(a)$ $(x\leqq a)$ (3.3) より $Gf(x) = Gf(b)$ $(x\geqq b)$ であるから、$G$ は $N(\mu)$ を $\mathbb{B}$ に写す。又 $Gf\leqq m$ が $\{f>0\} = \{a_1, a_2, \cdots, a_p\}$ 上で成立すれば、$x<a$ の場合、(3.2) より $Gf(x)\leqq Gf(x+1)+f(x)$ 及び $Gf(x+1)\leqq Gf(a_1)$ を得るので $Gf(x)\leqq Gf(a_1)+f(x)\leqq m-f^-(x)$ となる。同様に (3.3) を用いれば、$x\geqq b$ に対しても $Gf(x)\leqq m-f^-(x)$ となる。更に (3.4) より $a_k<x<a_{k+1}$ $(k=1,\cdots,p-1)$ のときには、

$$Gf(x) = \sup[Gf(a_k), Gf(a_{k+1})] + f(x)$$
$$\leqq m - f^-(x)$$

となり、結局 $G$ は (R.S.C.M) をみたす。又 Markov kernel $P$ を $P(x,y)=\frac{1}{2}$ $(y=x\pm 1)$、$P(x,y)=0$

(その他の $y$) により定義すれば $\mu$ が不変測度で

(*) $(I-P)Gf = f \quad (\Leftrightarrow (3.4))$

であること、及び、$P$ が irreducible recurrent であることが分る。従ってこの場合 $\mu$ が有界でなくても定理1は成立する。又同様に

$$P_t = e^{t(I-P)} = e^{-t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tP)^n}{n!}$$

とおくと、$(P_t)_{t>0}$ は定理2の条件をすべてみたし、$t=0$ で連続である。このような場合には $\mu$ が有界でなくても各々の問題はよい解をもつ。

<u>例2.</u> $S$ 及び $\mu$ は例1と同じとする。$G$ を

(3.5) $$Gf(x) = \sum_{y \leqq x} f(y)$$

により定義すると、$G$ は $\mathbb{N}(\mu)$ を $\mathbb{B}$ に写し (R.S.C.M) をみたすことが示される。このとき Markov kernel $P$ を

$$P(x,y) = \begin{cases} 1 & y = x+1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

とおくと、$\mu$ は $P$ の不変測度で、関係式(*)が成立することが確められる。しかし、

$$\sum_{n=0}^{\infty} P^n(x,y) = \begin{cases} 1 & y \geqq x+1 \\ 0 & y < x \end{cases}$$

となるので P は irreducible recurrent ではない。
同様に $P_t = e^{t(I-P)}$ を考えれば $(P_t)_{t>0}$ は $\mu$ を不変測度として持ち、G は $(P_t)_{t>0}$ の weak potential operator であるが

$$\int_0^\infty P_t(x, y)\,dt = \sum_{n=0}^\infty P^n(x, y) < \infty$$

となるので irreducible recurrent ではない。

例 3. $S = \{0, 1, 2, \cdots\}$, $\mu(x) = 1$ $(x \in S)$ とし、

$$3.6) \quad Gf(x) = \sum_{0 \leqq y \leqq x} f(y)$$

とおく。G は (R. S. C. M) をみたすことは容易に分る。
P を

$$P(x, y) = \begin{cases} 1 & y = x+1 \\ 0 & その他 \end{cases}$$

とおくと P は Markov kernel で (*) をみたす。(*) をみたす Markov kernel は一意的だったので、これ以外にはないことは明らかである。所で

$$1 = \mu(0) > \sum_{x \in S} \mu(x) P(x, 0) = 0$$

となるので $\mu$ は不変測度ではない。従って、この場合 $\mu$ を不変測度とし、(*) をみたす Markov kernel は存在しない。$P_t = e^{t(I-P)}$ について考えれば

continuous parameter のときも同様である。

## 参考文献


[1] K. L. Chung: Markov Chains with Stationary Transition Probabilities, Springer-Verlag, 1960.

[2] G. A. Hunt: Markov processes and potentials II. Illinois J. Math. 1 (1957), 316-396.

[3] J. G. Kemeny and J. L. Snell: Potentials for denumerable Markov chains, J. of Math. Appl. 3 (1961), 196-260

[4] R. Kondō: On weak potential operators for recurrent Markov chains with continuous parameters, Osaka J. Math. 4 (1967), 327-344

[5] 近藤亮司: 再帰 Markov 連鎖の弱 potential 作用素について, 数理研考究録「最大値の原理と半群の生成」(1968)

[6] S. Orey: Potential kernels for recurrent Markov chains, J. Math. Anal. Appl. 8 (1964), 104-132

[7] G. E. H. Reuter: Note on resolvents of denumerable sub-markovian processes, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 9 (1967), 16-19.