数理解析研究所講究録
第59巻 1968年 1-7

或る種の二階楕円型線型偏微分作用素の純虚数巾

東大 理 藤原大輔

§1 問題

R^n内の有界領域Ωは滑らか（C^∞ class）な境界$\partial\Omega$をもつとする。二階楕円型偏微分作用素

$$\mathcal{A} = \frac{-1}{\sqrt{g(x)}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(g^{ij}(x)\sqrt{g(x)}\,\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + a_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j} + a(x)$$

を考える。ここで，$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}(x)\,dx^i \otimes dx^j$ はΩでの実な計量を与え，実vector $\xi = (\xi^1, \cdots, \xi^n)$ に対し，$a_0 > 0$ があって，$x \in \Omega$ によらず

$$\sum_{i,j} g_{ij}(x)\,\xi^i\xi^j \geq a_0 \sum_i \xi^{i2}$$

とする。境界条件 $Bu|_{\partial\Omega} = 0$ の下で$\mathcal{A}$を考える。

Bとしては，

$$Bu|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} + \sum_{j=1}^{n-1} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u\Big|_{\partial\Omega}$$

又は，　$Bu = u$

をとる。ここで，$\partial/\partial\nu$ は$\partial\Omega$へのmetric ds^2に関する

法線微分，$\partial/\partial \tau_j$ は $\partial\Omega$ に接する微分とする。$Bu|_{\partial\Omega} = 0$ の下で A を考え，関数空間 $L^p(\Omega)$，$1 < p < \infty$，でこれを最小閉拡張し，これを A_B とする。（必要なら，十分大なる正数を A に加えると）$(A_B - \lambda)^{-1}$ は $\lambda \neq$ positive-real なら存在する。

$$(1.1) \qquad A_B^{\alpha} u = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} (-\lambda)^{\alpha} (\lambda + A_B)^{-1} u \, d\lambda$$

として，A_B^{α} を定義する。Γ は $-A_B$ の spectrum を囲む，複素積分路。（右辺が絶対収束する u につき $A_B^{\alpha} u$ を (1.1) で定義し，閉拡張して A_B^{α} を得る。）

$\alpha = \kappa i$，$\kappa \in \mathbb{R}$ のとき，$A_B^{\kappa i}$ は有界な作用素となるかどうか，が問題である。

§2. 結果

定理1　B が $\partial\Omega$ に接する微分を含まないならば，次の評価が成立する。$\forall \varepsilon > 0$ に対し $\exists C_\varepsilon > 0$，

$$\| A_B^{\kappa i} \|_{L^p(\Omega)} \leqslant C_\varepsilon \, e^{\varepsilon |\kappa|}$$

$A_B^{\kappa i}$ はこのとき完全連続でない。

B が $\partial\Omega$ に接する微分を含めば必しも $A_B^{\kappa i}$ は有界でない。

これから導かれる系を列挙する.

<u>定理2</u>　Bが$\partial\Omega$に接する微分を含まぬと，$\{A_B^\alpha\}_\alpha$は$\mathrm{Re}\,\alpha\leq 0$で連続，$\mathrm{Re}\,\alpha<0$で$\alpha$につき正則な連続作用素の半群を作り，生成作用素は$\mathrm{Log}\,A_B$　。

<u>定理3</u>　$0<\theta<1$のとき，A_B^θの定義域を$D(A_B^\theta)$と書くと，Bが$\partial\Omega$に接する微分を含まぬなら，

$$D(A_B^\theta)=[L^p(\Omega),\ D(A_B)]_\theta$$

ここで，$[L^p(\Omega),\ D(A_B)]_\theta$は$L^p(\Omega)$と$D(A_B)$の間の指数$\theta$の複素補間空間。

<u>定理4</u>

$Bu=\frac{\partial u}{\partial\nu}+c(x)u$　のときは，

$$D(A_B^\theta)=\begin{cases} H^{p,2\theta}(\Omega) & ,\ 0<2\theta<2-\frac{1}{p} \\ \left\{u\in H^{p,2\theta}(\Omega)\ \middle|\ \frac{\partial u}{\partial\nu}+c(x)u\Big|_{\partial\Omega}=0\right\} & ,\ 2-\frac{1}{p}<2\theta<2 \end{cases}$$

$Bu=u$　のときは，

$$D(A_B^\theta)=\begin{cases} H^{p,2\theta}(\Omega) & ,\ 0<2\theta<1-\frac{1}{p} \\ \left\{u\in H^{p,2\theta}(\Omega)\ \middle|\ u\big|_{\partial\Omega}=0\right\} & ,\ 1-\frac{1}{p}<2\theta<2 \end{cases}$$

ここで，$H^{p,\sigma}(\Omega)$とは，$H^{p,\sigma}(R^n)$のΩへの制限であり，$H^{p,\sigma}(R^n)$とは，$(I-\Delta)^{-\frac{\sigma}{2}}$による$L^p(R^n)$の像。

4

<u>注意</u>　$p \neq 2$ のとき，$L^p(\Omega)$ と $D(A_B)$ との間の実補間空間と補間空間は異なることに注意されたい。　過去において，作用素の分数巾の定義域を定める試みは，実補間空間として捉えようとしていたと思われる。（J. L. Lions [1]，H. Komatsu [2], P. Grisvard [3], [4]，N. Shimakura [7]，D. Fujiwara [5]）

以上の結果を高階の作用素に拡張することはまだ出来ない。

<u>§3.　定理1の証明の大略</u>

$x_0 \in \partial\Omega$ を中心として，normal coordinate を選んで次のようにできる：x_0 での Ω の cotangent space $T^*_{x_0}(\Omega)$ を $\partial\Omega$ の cotangent space $T^*_{x_0}(\partial\Omega)$ と conormal space $\mathcal{N}$ に直交分解して，それに応じて　$\xi \in T^*_{x_0}(\Omega)$ を

$$\xi = (\xi', \xi_n) \qquad \xi' = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-1})$$

とする。　A の主シンボルは

$$|\xi|^2 = |\xi'|^2 + \xi_n^2$$

に出来る。　$\pm i(|\xi|^2 + \sigma^2)^{\frac{1}{2}} = \tau^{\pm}$ とおく。　ここで $1^{\frac{1}{2}} = 1$。従って $\mathrm{Im}\,\tau^+ > 0$（σ real のとき）。pseudo-differential operator の一種（昨年 β-pseudo-differential operator として紹介した）を使って A_B の Green 作用素を構成してみると，$A_B^{\kappa i} u$ の最も特異な部分は，次の二項の積分の和で計

ることが出来ることが知れる。

$$(3.1)\quad I_1 = \int_\Gamma (-\sigma^2)^{\kappa i} d\sigma^2 \int_{\mathbf{R}^n} (|\xi|^2+\sigma^2)^{-1} e^{ix\cdot\xi}\,\hat{u}(\xi)\,d\xi ,$$

$$I_2 = \int_\Gamma (-\sigma^2)^{\kappa i} d\sigma^2 \int_{\mathbf{R}^{n-1}} e^{ix'\cdot\xi'} d\xi' \int_\gamma e^{ix_n\cdot\xi_n} \frac{(\xi_n + i(|\xi'|^2+\sigma^2)^{\frac{1}{2}})}{(\xi^2 + \sigma^2)} d\xi_n$$

$$\times \int_{\mathbf{R}^1} \frac{\hat{u}(\xi',\eta)}{|\xi'|^2+\eta^2+\sigma^2}\, d\eta .$$

ここで γ は τ^+ を囲み *Imaginary part* が >0 なる半平面内の閉曲線。 u は $\mathbf{R}^n$ の L^p 空間の元で，$x_n<0$ で 0 なるものとする。 第二項を扱うと，γ 上で積分実行して，

$$I_2 = (2\pi i)\int_\Gamma (-\sigma^2)^{\kappa i} d\sigma^2 \int_{\mathbf{R}^{n-1}} e^{ix'\cdot\xi'} d\xi' \int_{\mathbf{R}^1} \frac{e^{ix_n\cdot\tau^+}\,\hat{u}(\xi',\eta)}{|\xi'|^2+\eta^2+\sigma^2}\, d\eta$$

$\tau^+=\mu$ を積分変数にとって積分路を変更すると，

$$I_2 = (2\pi i)\int_{\Gamma'} (|\xi'|^2+\mu^2)^{\kappa i}\, 2\mu\, d\mu \int_{\mathbf{R}^{n-1}} e^{i(x_n\cdot\mu + x'\cdot\xi')} d\xi' \int_{\mathbf{R}^1} \frac{\hat{u}(\xi',\eta)}{\eta^2-\mu^2} d\eta$$

ここで Γ' は $\mathrm{Im}\,\mu = \mathrm{const} > 0$ なる曲線を右から左へ。

$\hat{u}(\xi',\eta)$ は $\mathrm{Im}\,\eta \le 0$ で一様有界，$\mathrm{Im}\,\eta<0$ で正則。 よって，

$$(3.2)\quad I_2 = (2\pi i)^2 \int_{\Gamma'}\int_{\mathbf{R}^{n-1}} (|\xi'|^2+\mu^2)^{\kappa i}\,\hat{u}(\xi',-\mu)\, e^{i(x'\cdot\xi' + x_n\cdot\mu)} d\xi'\, d\mu$$

$$= (2\pi i)^2 \int_{\mathbf{R}^n} (|\xi'|^2+\mu^2)^{\kappa i}\,\hat{u}(\xi',-\mu)\, e^{i(x'\cdot\xi' + x_n\cdot\mu)} d\xi'\, d\mu .$$

$(|\xi'|^2+\mu^2)^{\kappa i}$ は (ξ',μ) の κi 次同次 C^∞-関数であることを考慮して，Mikhlinの定理を拡張して適要すれば，（あるいは Seeley の定理？）

$$\| I_2 \|_{L^p} \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon|\kappa|} \| u \|_{L^p}$$

なる評価を得る．(3.1) と (3.2) 式を見比べれば，I_1 も同じ評価が可能のことが分る．

残余の項については，Criticalではないが，長い厄介な計算を必要とする．

定理2の証明は省略する。定理3は補間空間の一般論と定理1からの帰結．定理4は筆者の論文[6]を参照されたい．なお以上の結果は東京大学理学部紀要に投稿中である。

文献表

[1] J.L. Lions, Espaces d'interpolations et domaines de puissances fractionnaires d'opérateurs, J. Math. Soc. Japan, 14 (1962) 233-241.

[2] H. Komatsu, Fractional powers of operaters II, Interpolation spaces, Pacific Jour. Math. 21(1967) 89-111.

[3] P. Grisvard, Caracterisation de quelques espaces d'interpolations, Arch. rat. mech. anal. 25 No.1 1967.

[4] __________, Commutativité de deux foncteurs d'interpolations et applications. J. Math. Pures et Appl., 45 (1966) 143-290.

[5] D. Fujiwara, Concrete characterisation of the domains of fractional powers of some elliptic differential operators of the second order, Proc. Japan Acad. 43 1967.

[6] D. Fujiwara, L^p theory for characterizing the domain of the fractional powers of $-\Delta$ in the half space. To appear in J. Fac. Sc. Univ. of Tokyo.

[7] N. Shimakura, Sur les domaines des puissances fractionnaires d'opérateurs, Seminaire de Schwartz et Lions.