数理解析研究所講究録
第 59 巻 1968 年 23-38

正型対称ポテンシャル作用素のResolventsについて

名大 理 岸 正倫

§1. 序

X を locally compact, σ-compact Hausdorff space, C_K を X 上の compact support の連続函数全体, C_0 をその uniform norm による completion とする.
HUNT [4] によれば C_K を C_0 に写すポテンシャル作用素 V が positive で complete maximum principle をみたせば次の性質をもつ C_0 上の resolvent $\{R_\lambda\}_{\lambda>0}$ が存在する.

i) $R_\lambda \geq 0, \quad \|\lambda R_\lambda\| \leq 1$

ii) $R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda) R_\mu R_\lambda$

iii) $Vf - R_\lambda f = \lambda R_\lambda V f = \lambda V R_\lambda f \qquad \forall f \in C_K$

iv) $Vf = \lim_{\lambda \downarrow 0} R_\lambda f \qquad \forall f \in C_K$

V が domination principle をみたす場合には次の条件を仮定すれば同じ結論をうる. complete maximum principle が導れるからである.

$$0 \leq \exists h_n \in C_K \ni Vh_n \uparrow 1$$

このHUNTの定理には少くとも二つの問題点がある。その一つはVがC_KをC_0へ写すこと。多くの場合 $f \in C_K$ でも Vf は必らずしも無限遠点で0とならない。次に domination principle と complete maximum principle の隔りが明確には定理に反影していない。これらの問題点をふまえてVが特にpositive正型対称ポテンシャル作用素である場合についてresolventの特徴づけとそれに関連した問題を考察する。

§2. ポテンシャル作用素とresolvents

Xを locally compact, σ-compact Hausdorff space, ξをX上の稠密な正Radon測度, $\mathcal{B}$をX上の有界可測かつ台が compact な函数全体とする. $\mathcal{B}$の各元fを可測函数Vfに写す linear operator Vをポテンシャル作用素という. 次の4条件を仮定する.

(1) $f \geq 0 \Rightarrow Vf \geq 0$

(2) $\int Vf \cdot g \, d\xi = \int Vg \cdot f \, d\xi$ 有限

(3) $\int Vf \cdot f \, d\xi \geq 0$

(4) $\forall K$ compact $\subset X$ に対して定数 A_K が存在して

$$\int_K |Vf| \, d\xi \leq A_K \|Vf\|$$

ただし $\|Vf\|^2 = \int Vf \, f \, d\xi$

このとき $\{\nabla f ; f \in \mathcal{B}\}$ は内積 $(\nabla f, \nabla g) = \int \nabla f \cdot g \, d\xi$ で前ヒルベルト空間を作る．その完備化を $\mathcal{H}$ とする．

命題 1. $\mathcal{H}$ の元 u は局所可積分函数で

$$\int_K |u| \, d\xi \leq A_K \|u\| \qquad {}^\forall K \text{ compact}$$

$$(u, \nabla f) = \int u f \, d\xi \qquad {}^\forall f \in \mathcal{B}$$

∇ は自然に拡張され局所可積分函数に作用される：すなわち $f \geq 0$ に対して $f_n \in \mathcal{B}^+$ $f_n \uparrow f$ を選べば $\nabla f_n \uparrow$．$\int \lim \nabla f_n \cdot f \, d\xi < \infty$ のとき $\nabla f = \lim \nabla f_n$ と定義すると ∇f は（ξ-測度 0 を除いて）一意に定まる．

$$\mathcal{E}^+ = \{ f \geq 0 ; \int \nabla f \, f \, d\xi < \infty \}$$

$$\mathcal{E} = \{ f - g : f, g \in \mathcal{E}^+ \}$$

$$\nabla(f-g) = \nabla f - \nabla g, \quad f - g \in \mathcal{E}$$

とおく．勿論 $f \in \mathcal{E}$ ならば $\nabla f \in \mathcal{H}$．特に $f \in \mathcal{E}^+$ ならば $\nabla f \geq 0$ であって上の f_n をとれば $\nabla f_n \to \nabla f$（強）である．

命題 1′ $u \in \mathcal{H}$，$f \in \mathcal{E}$ ならば

$$(u, \nabla f) = \int u \cdot f \, d\xi$$

$f \in \mathcal{E}^+$，$u \geq 0$ の場合には ∇f の定め方と命題 1 とから

直ぐわかる. u が一般の場合には次の補題を使う.

補題 1 [1] $\forall u \in \mathcal{H}$ に対して $\exists \hat{u} \in \mathcal{H}$ ∋

$$|u| \leq \hat{u}, \qquad \|\hat{u}\| \leq \|u\|.$$

実際、P を $\{Uf\ ;\ f \in \mathcal{B}^+\}$ の閉包とし、u の P への射影を u', $-u$ の P への射影を u'' とすれば $\hat{u} = u' + u''$ が求めるものである.

この P の元は純ポテンシャルと呼ばれ、$u \in \mathcal{H}$ が P の元であるための必要充分条件は $\forall v \in \mathcal{H}$ $v \geq 0$ に対して $(u, v) \geq 0$ であること. P の各元が実際に正測度のポテンシャルとして表わされるか否かは問題である. ここではそれにふれない. §3 補題 2 にポテンシャルとして表わされる例がある.

さて、BEURLING-DENY [2] にならって resolvent $\{R_\lambda\}_{\lambda>0}$ を作る. $\lambda > 0$ と $f \in \mathcal{H} \cup L^2(\xi)$ が与えられたとき $v \in \mathcal{H}$ かつ $\lambda v - f \in L^2(\xi)$ である v に対して

$$F(v) = \|v\|_H^2 + \lambda^{-1} \|\lambda v - f\|_{L^2}^2$$

とおく.

命題2. $\exists^1 u \in \mathcal{H}$ ∋ $\lambda u - f \in L^2(\xi)$ かつ

$$F(u) = \inf\{F(v)\ ;\ v \in \mathcal{H},\ \lambda v - f \in L^2(\xi)\}$$

$R_\lambda f = u$ と定義する.

$R_\lambda f$ の基本的性質を書きならべると：

命題3.

(i) R_λ は $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $L^2 \to \mathcal{H} \cap L^2$ の linear operator で

$R_\lambda f$ は $(R_\lambda f, v)_H = (f - \lambda R_\lambda f, v)_{L^2}$ for $\forall v \in \mathcal{H} \cap L^2$

によって特徴づけられる。

(ii) $\|\lambda R_\lambda f\|_H \leq \|f\|_H$, $\|\lambda R_\lambda f\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}$

(iii) $(R_\lambda f, g)_{L^2} = (f, R_\lambda g)_{L^2}$ $\quad f, g \in L^2$

(iv) $(R_\lambda f, f)_{L^2} \geq 0$ $\quad f \in L^2$

(v) $R_\lambda f - R_\mu f = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu f$ $\quad f \in L^2$

(vi) $\lambda \downarrow 0$ のとき $\lambda R_\lambda f \to f$ (強) in L^2 $\quad f \in L^2$

(5) $\mathcal{H} \cap L^2$ dense in $\mathcal{H}$ ならば

(iii)′ $(R_\lambda f, g)_H = (f, R_\lambda g)_H$ $\quad f, g \in \mathcal{H}$

(iv)′ $(R_\lambda f, f)_H \geq 0$ $\quad f \in \mathcal{H}$

(v)′ $R_\lambda f - R_\mu f = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu f$ $\quad f \in \mathcal{H}$

(vi)′ $\lambda \downarrow 0$ のとき $\lambda R_\lambda f \to 0$ (強) in $\mathcal{H}$ $\quad f \in \mathcal{H}$

(vii)′ $\lambda \uparrow \infty$ のとき $\lambda R_\lambda f \to f$ (強) in $\mathcal{H}$ $\quad f \in \mathcal{H}$

(6) $\mathcal{H} \cap L^2$ dense in L^2 ならば

(vii) $\lambda \uparrow \infty$ のとき $\lambda R_\lambda f \to f$ (強) in L^2 $\quad f \in L^2$

命題 4. 上の条件(5) は次の条件 (7) と同値である.

(7) $\lambda \downarrow 0$ のとき $R_\lambda f \to \nabla f$ (強) in $\mathcal{H}$ for $\forall f \in L^2 \cap \Xi$

このとき次の (8) が導かれる

(8) $\nabla f - R_\lambda f = \lambda R_\lambda \nabla f$ $\qquad f \in L^2 \cap \Xi$

証明. (7) ⇒ (5): $R_\lambda f \in \mathcal{H} \cap L^2$ 故明らか.

(5) ⇒ (7):

$$\|\nabla f - R_\lambda f\|_H^2 = (\nabla f, f)_{L^2} - 2(R_\lambda f, f)_{L^2} + (f - \lambda R_\lambda f, R_\lambda f)_{L^2}$$
$$\leq (\nabla f - R_\lambda f, f)_{L^2} = (\nabla f - R_\lambda f, \nabla f)_H$$
$$\leq \|\nabla f\|_H^2$$

$v \in \mathcal{H} \cap L^2$ とすると

$$(\nabla f - R_\lambda f, v)_H = (f, v)_{L^2} - (f - \lambda R_\lambda f, v)_{L^2}$$
$$= (\lambda R_\lambda f, v)_{L^2} \to 0 \quad (\lambda \downarrow 0)$$

従って $R_\lambda f \to \nabla f$ (強) in $\mathcal{H}$

(5) ⇒ (8): $f \in L^2 \cap \Xi$, $v \in \mathcal{H} \cap L^2$ とすると

$$(R_\lambda f, v)_H = (f - \lambda R_\lambda f, v)_{L^2} = (f, v)_{L^2} - (f, \lambda R_\lambda v)_{L^2}$$
$$= (\nabla f, v)_H - (\nabla f, \lambda R_\lambda v)_H$$
$$= (\nabla f - \lambda R_\lambda \nabla f, v)_H$$

§3. domination principle

定義. ∇ が domination principle をみたすとは

$f, g \in \mathcal{B}^+$, $\nabla f(x) \leq \nabla g(x)$ on $\{x; f(x) > 0\}$ ⇒ $\nabla f \leq \nabla g$

この§ではこの原理と resolvent $\{R_\lambda\}_{\lambda>0}$ との関係を条件 (5) をみたす V について調べる.

<u>命題5.</u> V が条件 (5) をみたせば次は同値である.

(9) $\quad R_\lambda \geq 0 \quad \text{on } L^2 \qquad \forall \lambda>0$

(10) $\quad u \in \mathcal{H} \Rightarrow |u| \in \mathcal{H}, \quad \| |u| \|_H \leq \|u\|_H$

(9)' $\quad R_\lambda \geq 0 \quad \text{on } L^2 \cup \mathcal{H} \qquad \forall \lambda>0$

証明 (9) ⇒ (10) : $v \in L^2$ に対して

$$H^\lambda(v) = \lambda(v - \lambda R_\lambda v, v)_{L^2}$$

とおく. $H^\lambda(v) = \lambda^2 \|R_\lambda v\|_H^2 + \lambda \|v - \lambda R_\lambda v\|_{L^2}^2$ に注意すれば $H^\lambda(v) \leq M^2$ ($\forall \lambda>0$) ならば $v \in \mathcal{H}$, $\|v\|_H \leq M$ であることがわかる. そこで特に $u \in \mathcal{H} \cap L^2$ $v = |u|$ とすると

$$\begin{aligned} H^\lambda(|u|) &= \lambda(|u| - \lambda R_\lambda |u|, |u|)_{L^2} \\ &\leq \lambda(u, u)_{L^2} - \lambda^2 (R_\lambda u, u)_{L^2} \\ &= H^\lambda(u) = \lambda(R_\lambda u, u)_H \leq \|u\|_H^2 \end{aligned}$$

従って $|u| \in \mathcal{H}$, $\| |u| \|_H \leq \|u\|_H$. 一般の u については $\mathcal{H} \cap L^2$ の元で近似すればいい.

(10) ⇒ (9)' : $u \in \mathcal{H} \cup L^2$, $u \geq 0$ とすると $R_\lambda u \in \mathcal{H}$ だから $|R_\lambda u| \in \mathcal{H}$, $\| |R_\lambda u| \|_H \leq \|R_\lambda u\|_H$. 従って

$$F(|R_\lambda u|) = \| |R_\lambda u| \|_H^2 + \lambda^{-1} \| \lambda |R_\lambda u| - u \|_{L^2}^2$$

$$\leq \|R_\lambda u\|_H^2 + \lambda^{-1}\|\lambda R_\lambda u - u\|_{L^2}^2 = F(R_\lambda u)$$

命題2によって $|R_\lambda u| = R_\lambda u$、すなわち $R_\lambda u \geq 0$.

<u>注意</u> (9) は $R_\lambda \geq 0$ on $\mathcal{B}$ としていい.

次の命題6は CARTAN-DENY のよく知られた論法（例えば[3]参照）で証明される. 条件(5)は使わない.

<u>命題6</u>. (10)が成立すれば ∇ は domination principle をみたす.

この逆

<u>命題6'</u>. ∇ が domination principle をみたせば (10) が成立する.

は次の命題から導れる.

<u>命題7.</u> ∇ が domination principle と (5) をみたせば

(11) $\quad u \in \mathcal{H}_a \Rightarrow |u| \in \mathcal{H}_a, \quad \| |u| \|_a \leq \|u\|_a$

ただし a は正の定数, $\mathcal{H}_a$ は $\{\nabla_a f = \nabla f + af\,;\, f \in \mathcal{B}\}$ のノルム $\|\nabla_a f\|_a^2 = \int \nabla_a f\, f\, d\xi$ による完備化である. 勿論ポテンシャル作用素 ∇_a は§2の4条件をみたしている.

命題7から命題6'が導れることを見るために $f \in \mathcal{B}$ として

$$L(\nabla g) = \int |\nabla f|\, g\, d\xi \qquad {}^\forall g \in \mathcal{B}$$

とおくと

$$L(\nabla g) = \lim_{a \downarrow 0} \int |\nabla_a f|\, g\, d\xi$$

$$= \lim_{a \downarrow 0} (|\nabla_a f|, \nabla_a g)_a$$

だから　$|L(\nabla g)| \leq \lim_{a\downarrow 0} \| |\nabla_a f| \|_a \|\nabla_a g\|_a$

$\leq \lim_{a\downarrow 0} \|\nabla_a f\|_a \|\nabla_a g\|_a = \|\nabla f\|_H \|\nabla g\|_H$

これから $|\nabla f| \in \mathcal{H}$, $\| |\nabla f| \|_H \leq \|\nabla f\|_H$ が得られる。一般の $u \in \mathcal{H}$ については $\{\nabla f_n\}$ $f_n \in \mathcal{B}$ で u を近似すればいい。

以下 domination principle と (5) を仮定して命題7の証明の概要をのべる。これは Itô [5] を修正したものである。

補題2. P_a を $\mathcal{H}_a$ の純ポテンシャルの集合、すなわち $\{\nabla_a f\ ;\ f \in \mathcal{B}^+\}$ のノルム $\|\ \|_a$ による閉包とすると

$$u \in P_a \Rightarrow {}^{\exists} f \in L^2 \cap \mathcal{E}_a^+ \ni u = \nabla_a f$$

補題3. ∇_a は次の domination principle をみたす：

$$f \in L^2 \cap \mathcal{E}_a^+,\quad g \in \mathcal{B}^+,\quad \nabla_a f(x) \leq \nabla_a g(x) \text{ on } \{x\ ;\ f(x) > 0\}$$

$$\Longrightarrow \nabla_a f \leq \nabla_a g$$

補題4. $f_1, f_2 \in \mathcal{B}^+$ とすると ${}^{\exists} f \in L^2 \cap \mathcal{E}_a^+ \ni$

$$\nabla_a f = \inf\{\nabla_a f_1, \nabla_a f_2\}$$

実際、右辺の函数を w とし、$u = \nabla_a f$ が P_a を動くときの $I(u) = \|u\|_a^2 - 2\int w f\, d\xi$ の inf を与えるポテンシャルを $u = \nabla_a f$ とすると

$$\nabla_a f \geq w,\quad \nabla_a f(x) = w(x) \text{ on } \{x\ ;\ f(x) > 0\}.$$

従って補題3の domination principle によって $\nabla_a f = w$ を得る。u の存在は $u_n = \nabla_a f_n \in P_a$, $I(u_n) \downarrow \inf I(u)$

とすると $\{u_n\}$ が CAUCHY 列になるから $u_n \longrightarrow {}^{\exists}u$ (強) in $\mathcal{H}_a$
$u = V_a f \in \mathcal{P}_a$. $\mathcal{H} \cap L^2$ が $\mathcal{H}$ で dense, 従って $\mathcal{H}_a \cap L^2$ が $\mathcal{H}_a$ で dense だから f_n の可測集合 e への制限 $f_{n,e}$ のポテンシャル $V_a f_{n,e}$ は f の e への制限 f_e のポテンシャル $V_a f_e$ へ弱収束する. これから $\int w f_n d\xi \longrightarrow \int w f d\xi$ が導かれ $I(u_n) \downarrow I(u)$. すなわち u が $\inf I(u)$ を与える.

注意. 上の補題2および4では条件(5) $\mathcal{H} \cap L^2$ dense in $\mathcal{H}$ が本質的である. not dense なら反例がある.

補題5. $f \in L^2 \cap \mathcal{E}_a$, $V_a f \geq 0$ ならば $\{x ; V_a f(x) = 0\}$ 上 (ξ-測度 0 を除いて) $f \leq 0$.

実際, compact K が存在して $\xi(K) > 0$, K 上 $f > 0$ かつ $V_a f = 0$ として矛盾を導けばいい. $\mathcal{P}_a(CK)$ を $\{V_a h ;\ h \in \mathcal{B}^+$, support of $h \subset CK\}$ の閉包, $g = K$ の特性函数として, $V_a g$ の $\mathcal{P}_a(CK)$ への射影を u' とすると

$$\exists g' \in L^2 \cap \mathcal{E}_a^+ \ni \quad g' = 0 \quad \text{on } K$$

$$u' = V_a g', \quad V_a g(x) = V_a g'(x) \quad \text{on } \{x ; g'(x) > 0\}.$$

従って domination principle によって $V_a g' \leq V_a g$. 更に $g \neq g'$ だから $V_a g' \neq V_a g$ on K. 故に

$$0 < \int (V_a g - V_a g') f \, d\xi = (V_a f, V_a g - V_a g')_a$$

$$= \int V_a f \, (g - g') \, d\xi = - \int_{CK} V_a f \cdot g' \, d\xi \leq 0.$$

注意. 補題5は HUNT のポテンシャル論の positive maximum principle の弱い形とみることが出来る.

さて命題7を証明するために、$f_1, f_2 \in \mathcal{B}^+$, $\nabla_a f = \inf\{\nabla_a f_1, \nabla_a f_2\}$ $f \in L^2 \cap \Sigma_a^+$ とすると

$$|\nabla_a f_1 - \nabla_a f_2| = \nabla_a f_1 + \nabla_a f_2 - 2\nabla_a f \in \mathcal{H}_a$$

$$\||\nabla_a f_1 - \nabla_a f_2|\|_a^2 = \|\nabla_a f_1 - \nabla_a f_2\|_a^2 + 4(\nabla_a f_1 - \nabla_a f, \nabla_a f_2 - \nabla_a f)_a$$

ここで右辺第二項は補題9によって ≤ 0 だから

$$\||\nabla_a f_1 - \nabla_a f_2|\|_a^2 \leq \|\nabla_a f_1 - \nabla_a f_2\|_a^2 .$$

一般の $u \in \mathcal{H}_a$ については u を $\{\nabla_a f_1^{(n)} - \nabla_a f_2^{(n)}\}$ $f_1^{(n)}$, $f_2^{(n)} \in \mathcal{B}^+$ で近似すればいい.

以上をまとめて

<u>定理1.</u> $\mathcal{H} \cap L^2$ dense in $\mathcal{H}$ ならば

domination principle $\rightleftarrows$ $R_\lambda \geq 0$ $\forall \lambda > 0$

<u>系[6]</u> $R_\lambda \geq 0$ かつ $\nabla f = \mathrm{s.}\lim_{\lambda \downarrow 0} R_\lambda f$ for $\forall f \in \mathcal{B}$ ならば ∇ は次の majoration principle をみたす

(12) $f, g \in \mathcal{B}^+$, $\nabla_a f(x) \leq \nabla g(x)$ on $\{x ; f(x) > 0\}$ $(a > 0)$

$$\Rightarrow \quad \nabla_a f \leq \nabla g$$

実際、命題4と定理1によって ∇ が domination principle をみたすからである.

注意. V が majoration principle と条件 (5) をみたせば, 実は V は domination principle をみたす. 補題 4 の証明でのべた純ポテンシャルの適当な集合への射影 — V_a に関する掃散ポテンシャル — を使えば証明される.

§4. complete maximum principle

定義 V が complete maximum principle をみたすとは

$f, g \in \mathcal{B}^+$, $\alpha \geq 0$, $Vf(x) \leq Vg(x) + \alpha$ on $\{x;\ f(x) > 0\}$

$$\Rightarrow \quad Vf \leq Vg + \alpha$$

定理 2 $\mathcal{H} \cap L^2$ dense in $\mathcal{H}$ ならば

complete maximum principle $\rightleftarrows$ λR_λ は positive submarkov for $\forall \lambda > 0$

ここで positive submarkov とは $0 \leq f \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \lambda R_\lambda f \leq 1$.

定理 2 は前 § (10) の代りに次の (10)′ を仲介にして定理 1 と同様にして証明される.

(10)′ $u \in \mathcal{H}$, $\alpha \geq 0 \Rightarrow u_\alpha = \sup\{\inf\{u, \alpha\}, 0\} \in \mathcal{H}$

$$\|u_\alpha\|_H \leq \|u\|_H$$

系. V が domination principle と条件 (5) をみたし更に

(13) $\exists h_n \in \mathcal{B}^+ \ni \quad Vh_n \uparrow 1$

ならば、∇は complete maximum principle をみたす。
実際、$f \in \mathcal{B}^+$ $0 \leq f \leq 1$ が与えられたとき

$$f_n = \inf \{ \nabla h_n , f \}$$

とおくと $R_\lambda f_n \uparrow R_\lambda f$ であるから

$$\lambda R_\lambda f = \lim \lambda R_\lambda f_n \leq \lim \lambda R_\lambda \nabla h_n$$
$$= \lim (\nabla h_n - R_\lambda h_n) \leq \lim \nabla h_n = 1$$

最後に条件 (5) $\mathcal{H} \cap L^2$ dense in $\mathcal{H}$ について：
次の 2 条件がみたされれば (5) が成立する。

(4)′ $\forall K$ compact に対して定数 B_K が存在して

$$\int_K |\nabla f|^2 d\xi \leq B_K \|\nabla f\|^2 \quad \text{for } \forall f \in \mathcal{B}$$

(14) $g_n \in \mathcal{B}$, $\|\nabla g_n\| \leq M < \infty$, g_n の support $\to$ 無限遠点

$$\Rightarrow \quad (\nabla f, \nabla g_n) \to 0 \quad \text{for } \forall f \in \mathcal{B}$$

§5. Poisson 方程式

この § では $\forall f \in \mathcal{B}$ について

(15) $A \nabla f = -f$

となる linear operator A の存在について考える。A が存在すれば $\nabla f = 0$ から $f = 0$、すなわち一意の原理が導かれる。そこでまず一意の原理を調べる。

命題 8.

i) 条件 (6)、$\mathcal{H} \cap L^2$ dense in L^2、がみたされれば R_λ は一意の原理: $f \in L^2$, $R_\lambda f = 0 \Rightarrow f = 0$ をみたす.

ii) $R_\lambda \geq 0$ ならば逆も正しい。

証明. i) $R_\lambda f = 0$ とすると命題 3 (i) によって $(f, v)_{L^2} = 0$ for $\forall v \in \mathcal{H} \cap L^2$ $\therefore f = 0$.

ii) $f \in (\mathcal{H} \cap L^2)^\perp$ とすると $(R_\lambda f, v)_H = 0$ for $\forall v \in \mathcal{H} \cap L^2$. これと次の補題 6 によって $(R_\lambda f, v)_\lambda = 0$ for $\forall v \in \mathcal{H}_\lambda$. 従って $v = R_\lambda h$, $h \in \mathcal{B}$ として $R_\lambda f = 0$ を得るから $f = 0$.

補題 6. $R_\lambda \geq 0$ とする. $\mathcal{H}_\lambda$ を $\{R_\lambda h \,;\, h \in \mathcal{B}\}$ のノルム $\|R_\lambda h\|_\lambda^2 = \int R_\lambda h \cdot h \, d\xi$ による完備化とすると

i) $\mathcal{H}_\lambda = \mathcal{H} \cap L^2$

ii) $(u, v)_\lambda = (u, v)_H + \lambda (u, v)_{L^2}$, $u, v \in \mathcal{H}_\lambda$

すなわち、ポテンシャル作用素として R_λ が §2 の 4 条件をみたし、従ってヒルベルト空間 $\mathcal{H}_\lambda$ が作られるが、その元は $\mathcal{H} \cap L^2$ と一致し、$\mathcal{H}_\lambda$ の内積は ii) で与えられるのである. $\mathcal{H}_\lambda \subset \mathcal{H} \cap L^2$ は容易にわかる. 逆の包含関係は次の補題を使って証明される.

補題 7. $f \in L^2$ に対して

$$H_\lambda^\mu(f) = \mu (f - \mu R_{\lambda+\mu} f, f)_{L^2}, \quad \mu > 0$$

とおくと

i) $H_\lambda^\mu(f)$ は μ の増加函数

ii) $f \in \mathcal{H}_\lambda \cap L^2 \Rightarrow H_\lambda^\mu(f) \nearrow \|f\|_\lambda^2$ as $\mu \uparrow \infty$

iii) $H_\lambda^\mu(f) \le M < \infty \quad \forall \mu > 0 \Rightarrow f \in \mathcal{H}_\lambda$

∇ の一意の原理については

命題 9. $\mathcal{H} \cap L^2$ dense in $\mathcal{H}$ ならば

(6) $\mathcal{H} \cap L^2$ dense in $L^2 \Rightarrow \nabla$ は一意の原理をみたす：

$$f \in \Sigma,\ \nabla f = 0 \Rightarrow f = 0$$

$R_\lambda \geq 0$ のとき、この逆、一意の原理から (6) が導かれる、はわからない。

定理 3. ∇ が条件 (5) (6) をみたせば $\mathcal{D}(A) \subset L^2$ から L^2 への closed linear operator A が存在して

$$A \nabla f = -f \quad \forall f \in \mathcal{B},\ \nabla f \in L^2$$

実際、命題 8 から R_λ^{-1} が存在し、resolvent equation によって $A = \lambda I - R_\lambda^{-1}$ が定まる。このとき

$$\begin{aligned} I(\lambda \nabla + I) &= (\lambda I - A) R_\lambda (\lambda \nabla + I) \\ &= (\lambda I - A) \nabla \end{aligned}$$

から A がもとめる closed linear operator であることを知る。

参考文献

[1] N. ARONSZAJN - K. T. SMITH : A characterization of positive reproducing kernel, Amer. J. Math., 79 (1957), 611- 622

[2] A. BEURLING - J. DENY : Dirichlet spaces, Proc. Nat. Acad. Sci., 45 (1959), 208 - 215.

[3] J. DENY : Principe complet du maximum et contractions, Ann. Inst. Fourier. 15 (1965), 259- 272.

[4] G. A. HUNT : Markoff process and potentials II, Ill. J. Math., 1 (1957), 316 - 369.

[5] M. ITÔ : Note sur contractions et principes du maximum, Osaka J. Math., 4 (1967), 217-226

[6] K. YOSIDA : Positive resolvents and potentials, Z. Wahrs. verw. Geb., 8 (1967), 210 - 218.