数理解析研究所講究録
第 59 巻 1968 年 39-53

二階楕円型偏微分作用素に附随した Royden 位相構造

名大 理　　中 井 三 留

§1.　序

二階楕円型偏微分方程式の大局理論特にそのポテンシャル論的研究においては問題とする方程式に関する Green 函数が重要な役割を果す．従って Green 函数が何時存在するか，又 Green 函数の存在非存在は方程式のいかなる構造によって決定されるかと言う問題はきわめて基本的なものであると言える．2次元の調和函数論においては既に Riemann が彼の名を冠して呼ばれる写像定理の本質が調和 Green 函数の存在非存在にあることを指摘して以来幾多の詳しい研究があり又その一般化も枚挙にいとまない．ここでは形式的自己共役の場合に限定して，Green 函数の存在非存在が方程式に附随したある位相構造によって決っていることを論じたい．

m 次元可付号連結 C^1 多様体 M 上に次の形の二階楕円型偏微分作用素 A を考える：

$$(1)\qquad Au(x) = -\frac{1}{\sqrt{a(x)}}\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{a(x)}\,a^{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x^j}\right),$$

こゝに $(a^{ij}(x))$ は M 上の反変テンソルで M の各座標球 U 上 $a^{ij}(x)$ は有界可測で行列 $(a^{ij}(x))$ は対称かつ $x\in U$ によらぬ定数 λ が存在して $(a^{ij}(x))$ の固有値は U 上 $\lambda_k(x)\geq\lambda$ $(k=1,2,\cdots,m)$ となり，又

$$(a^{ij}(x))^{-1} = (a_{ij}(x)),\quad a(x) = \det(a_{ij}(x))$$

とする．Radon 測度 μ に対する $Au=\mu$ の解の意味，解の局所的性質，局所基本解の存在，Dirichlet 問題等については例えば Hervé [2] 参照．勿論 M 及び (a^{ij}) の充分な正則性を仮定しても以下の所論は形式実質共に変る所はない．

M 上 A に関する Green 函数 $G(x,y)$ とは $M\times M$ 上 $x\neq y$ で定義された連続函数で次の三性質を持つものとする：

(G.1) $G(x,y)>0$；

(G.2) 各 $\varphi\in C_0^1(M)$ に対し

$$(2)\qquad u(x) = \int_M G(x,y)\varphi(y)\sqrt{a(y)}\,dy^1\cdots dy^m$$

は $Au=\varphi$ を満足する；

(G.3) 以上の二性質を持つ任意の $G'(x,y)$ をとると常に $G(x,y)\leq G'(x,y)$ となる．

M 上の有界 C^1 函数 φ で Dirichlet 積分 $\mathcal{D}_M^A(\varphi)$ 有限となるものの全体の作る函数族を $R(M,A)$ と記すことにする．こゝで

Dirichlet 積分は

$$(3)\qquad \mathcal{D}_M^A(\varphi)=\int_M \sum_{i,j=1}^m a^{ij}(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^j}\sqrt{a(x)}\,dx^1\cdots dx^m$$

で定義する．函数族 $R(M,A)$ に対し次の三条件を満足する完閉 Hausdorff 空間 M_A^* が唯一つ存在する：

(R.1)　M は M_A^* の稠密開部分空間である；

(R.2)　各 $\varphi\in R(M,A)$ は M_A^* 迄連続的に延長できる；

(R.3)　$R(M,A)$ は M_A^* の点を分離する．

最後の条件では勿論 $R(M,A)$ を $C(M_A^*)$ の部分集合と考えている．この M_A^* の位相構造を (M,A) に附随した Royden 位相構造と呼ぶことにし $\rho(M,A)$ と記す．これらの言葉により目的の結果をのべる．

主定理：M 上 A に関する Green 函数が存在するか否かは (M,A) に附随した Royden 位相構造で定る．

詳言すれば，(M,A) と同種の別の組 $(\tilde M,\tilde A)$ がある時 M_A^* と $\tilde M_{\tilde A}^*$ が位相同型なら，M 上 A に関する Green 函数と $\tilde M$ 上 $\tilde A$ に関する Green 函数は同時に存在するか又は同時に存在しない．以下このことの証明の概略を説明する．その途上 M_A^* と $\tilde M_{\tilde A}^*$ とが同相になること，M から $\tilde M$ 上へのある種の位相写像

の存在とが同等であることがわかる．これから又Green函数存在判定の一方針が得られる．

§2.　主境界

Mの各完閉集合Kに対して$R(M,A)$上に半ノルム

(4) $$p_K(\varphi) = \sup_{x\in K} |\varphi(x)|$$

を考え，半ノルム系$\{p_K, \mathcal{D}_M^A\}$で定まる$R(M,A)$の位相による$R(M,A)$内での$C_0^1(M)$の閉包を$R_0(M,A)$とする．

(5) $$\Gamma(M,A) \equiv \{x^* \in M_A^* \mid R_0(M,A)(x^*) = 0\}$$

を(M,A)の主境界と呼ぶ．$\Gamma(M,A)$はM_A^*-Mの空かも知れぬ完閉部分集合である．主境界の果す役割のうち最も重要なものは次の二つである：

1)正則性：Mの部分閉集合NのM_A^*に関する閉被をN^*と記すとき$(N^*-(\partial N)^*)\cap\Gamma(M,A)$の各点はDirichlet問題$\pi(N,A,N^*-N)$の正則点である；

2)最大値原理：$u(x)$をN上$Au=0$を満す上方有界，又は$\mathcal{D}_N^A(u)<\infty$となる函数で各$\xi\in(\partial N)\cup((N^*-(\partial N)^*)\cap\Gamma(M,A)$で

(6) $$\limsup_{x\in N,\, x\to\xi} u(x) \leq c$$

ならばN上いたる所$u\leq c$である．

定理 1：M上 A に関する Green 函数が存在する為の必要十分条件は $\Gamma(M, A) \neq \phi$ である．

略証：M の完閉集合 K が外正則であるとは・$\partial(M-K)$ の各点が $M-K$ に関する Dirichlet 問題の正則点であることゝする．$w(x;K)$ を $M-K$ 上 $Aw=0$ で $\partial(M-K)$ 及び $\Gamma(M, A)$ における境界値が夫々 1 及び 0 となる函数とする．更に K 上 $w(x;K)=1$ とおく．すると $\Gamma(M, A) \neq \phi$ は

(7) $$0 < w(x;K) | M-K < 1$$

と同等である．条件(7)は K の取り方に依存しない．もし M 上 A に関する Green 函数 $G(x, y)$ が存在したとすると，十分大な $c>0$ に対し $K=\{x \in M \mid G(x, y) > c\}$ は外正則完閉集合で $w(x;K) = \min(G(x, y), c)/c$ となり(7)を得る．

逆に(7)があると Green 函数があることは Itô [1] によりわかるが，直接に次の様にしてもよい．座標球 $B_i = \{|x| < 1/i\}$ をとり $\beta_i = \partial B_i$ とおく $(i=1, 2)$．各 $\varphi \in C(\beta_1)$ に対し $K_1\varphi$ を B_1 上 $A(K_1\varphi)=0$ で β_1 で境界値 φ をとるものを表す．又各 $\varphi \in C(\beta_2)$ に対し $K_2\varphi$ を $M-\overline{B}_2$ 上 $A(K_2\varphi)=0$ で β_2 及び $\Gamma(M, A)$ に於る境界値が夫々 φ 及び 0 となるものを表す．$C(\beta_2)$ から自身への作用素 T を $\varphi \in C(\beta_2)$ に対し

(8) $$T\varphi = K_1(K_2\varphi | \beta_1) | \beta_2$$

で定義すると

(9) $$\|T\| = \max_{x \in \beta_1} w(x;\ \bar{B}_2)$$

となり，従って (7) があると $\|T\| < 1$ となる．B_1上Aに関するGreen函数 $G_1(x, y)$ をとり，任意に $y \in B_2$ を固定して

(10) $$H(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} T_x^n G_1(x, y)$$

が定義でき，更に

(11) $$G(x, y) = \begin{cases} (K_2 H(\cdot, y))(x) & (x \in M - B_2); \\ (K_1(K_2 H(\cdot, y)))(x) + G_1(x, y) & (x \in B_1) \end{cases}$$

が定義できてM上Aに関するGreen函数となる．

§3. Royden写像

Mの空でない開集合H_i $(i=1,2)$ で $\bar{H}_1 \subset H_2$ かつ $M - \bar{H}_2 \neq \phi$ となるもの，組 $\mathcal{H} = [H_1, H_2]$ を一般化球環と呼ぶことにする．$\mathcal{F}$を $\bar{H}_2 - H_1$ 上の有界連続函数φで $H_2 - \bar{H}_1$ 上C^1級且つ $\varphi | \partial H_i = i$ $(i=1, 2)$ となるもの，族とする．(M, A)に関する一般化球環 $\mathcal{H}$ の mdulus を

(12) $$\mathrm{mod}_M^A\, \mathcal{H} = \left(\inf_{\varphi \in \mathcal{F}} \mathcal{D}^A_{H_2 - \bar{H}_1}(\varphi) \right)^{-1}$$

で定義する．一般には $0 \leq \mathrm{mod}_M^A\, \mathcal{H} < \infty$ となる．

Mから別の$\tilde{M}$上への位相写像Tがあるとき $T\mathcal{H} = [TH_1, TH_2]$ とかく．Tが (M, A) から $(\tilde{M}, \tilde{A})$ への<u>Royden写像</u>であると

は次の二条件が満されることゝする；

(T. 1)　T は M から $\widetilde{M}$ 上への位相写像である；

(T. 2)　M 上の各一般化球環 $\mathcal{H}$ に対し $\mathcal{H}$ に依存してよい有限常数 $k(\mathcal{H}) \geq 1$ があって

$$(13) \quad k(\mathcal{H})^{-1} \operatorname{mod}_M^A \mathcal{H} \leq \operatorname{mod}_{\widetilde{M}}^{\widetilde{A}} T\mathcal{H} \leq k(\mathcal{H}) \operatorname{mod}_M^A \mathcal{H}$$

が成立する．

$\overline{H}_2$ が M で完閉ならば $\operatorname{mod}_M^A \mathcal{H} > 0$ だから (13) は任意の位相写像 T が M と $\widetilde{M}$ の間に与えられたとき成立する．故に Royden 写像 T は M の相対完閉集合上任意の位相的改変を施してもやはり Royden 写像である．

典型的な Royden 写像の例をのべる．M と $\widetilde{M}$ を夫々 (a_{ij}) と $(\widetilde{a}_{ij})$ を基本計量テンソルとする Riemann 多様体と考えるとき M から $\widetilde{M}$ 上への位相写像 T が M と $\widetilde{M}$ の対応する任意の点からの対応する微小距離の比を有界とするならば，T は (M, A) から $(\widetilde{M}, \widetilde{A})$ への Royden 写像である．特に T, T^{-1} 共連続的に可微分の場合にはこのことは次の如く解析的条件で与えられる：　$\widetilde{x} = T(x)$ とするとき各点 $x \in M$ で x によらぬ有限常数 $k \geq 1$ が存在して

$$(14) \quad k^{-1}(a^{ij}(x)) \leq \left(\frac{\partial x^i}{\partial \widetilde{x}^j}\right)(\widetilde{a}^{ij}(x))\left(\frac{\partial x^j}{\partial \widetilde{x}^i}\right) \leq k(a^{ij}(x))$$

となることである．M と $\tilde{M}$ の次元 m が2の時には更にゆるく T が M と $\tilde{M}$ の対応する任意の点における対応する角の比を有界とする時 Royden 写像となる．特に (a_{ij}), $(\tilde{a}_{ij})$ 共に Hölder 連続の時は Korn-Lichtenstein の定理で M と $\tilde{M}$ を夫々二つの Riemann 面と考えることが出来て T がいわゆる擬等角写像になることであると言うも同じである．

<u>定理2：M_A^* から $\tilde{M}_{\tilde{A}}^*$ 上への位相写像 T^* による M の像は常に $\tilde{M}$ であって，$T=T^*|M$ は (M, A) から $(\tilde{M}, \tilde{A})$ への Royden 写像である．逆に (M, A) から $(\tilde{M}, \tilde{A})$ への Royden 写像 T があると M_A^* から $\tilde{M}_{\tilde{A}}^*$ 上への位相写像 T^* で $T^*|M=T$ となるものが存在する</u>．

故に (M, A) と $(\tilde{M}, \tilde{A})$ が同一の Royden 位相構造をもつ条件は両者間に Royden 写像が存在することである．このことの証明には次の二事実に注意する：

1) $x^* \in M_A^*$ が $x^* \in M$ となる必要十分条件は M_A^* 内 x^* で第一可算公理が満される事である；

2) 一般化球環 $\mathcal{H}=[H_1, H_2]$ に対し $\mathrm{mod}_M^A \mathcal{H} > 0$ となる為の必要十分条件は

$$H_1^* \cap (M - \bar{H}_2)^* = \emptyset \tag{15}$$

となることである.

定理2の略証：定理の前半は1)と2)からわかる. 後半を見る為任意に $x^* \in M_A^* - M$ をとり x^* に於ける T の集積値集合 $S(T, x^*) = \bigcap (T(U \cap M))^*$ を考える. こゝに共通部分は x^* における基本近傍系 $\{U\}$ についてとる. 明かにこれは $\tilde{M}_{\tilde{A}}^* - \tilde{M}$ の部分集合である. 仮に $S(T, x^*)$ が異る二点 y_1^* と y_2^* を含むとする. y_i^* の閉近傍 V_i を $V_1^* \cap V_2^* = \phi$ なる様にとり

$$H_1 = T^{-1}(V_1 \cap \tilde{M}), \qquad H_2 = T^{-1}(\tilde{M} - V_2^*)$$

とおく. $x^* \in (T^{-1}(V_1 \cap \tilde{M}))^* \cap (T^{-1}(V_2 \cap \tilde{M}))^*$ だから, 一般化球環 $\mathcal{H} = [H_1, H_2]$ は2)より $mod_M^A \mathcal{H} = 0$ となる. 他方再び2)により $mod_{\tilde{M}}^{\tilde{A}} T\mathcal{H} > 0$ がわかり (13) に反することになる. 故に $S(T, x^*)$ は一点 $y^* \in \tilde{M}_{\tilde{A}}^* - \tilde{M}$ からなる. $T^*|M = T$, $T^* x^* = y^*$ と定めた T^* が求めるものである.

§4. 境界挙動

最後に主定理の証明に最も基本的な役割を果す次の事実を述べる：

<u>定理3</u>：(M, A) <u>に附随した Royden 位相構造は</u> (M, A) <u>の主境界の位相構造を決定する</u>.

即ちT^*をM_A^*から$\tilde{M}_{\tilde{A}}^*$上への位相写像とすると

(16) $$T^*\Gamma(M,A)=\Gamma(\tilde{M},\tilde{A})$$

となる．これと定理1を合せると直ちに主定理が導かれる．主定理は一つの例であって，$\Gamma(M,A)$の位相構造で定る性質はすべてRoyden位相構造だけで決まると言う更に一般の命題が得られるわけである．

定理3の略記：$\Lambda(M,A)=(M_A^*-M)-\Gamma(M,A)$と記すことにする．$x^*\in\Lambda(M,A)$とし$y^*=T^*(x^*)$とおくとき(16)を証明するには$y^*\in\Lambda(\tilde{M},\tilde{A})$を示せばよい．その為に$y^*\in\Gamma(\tilde{M},\tilde{A})$と仮定して矛盾を導く．$L$を$\Lambda(M,A)$の開部分集合で

$$x^*\in L\subset L^*\subset\Lambda(M,A)$$

となるものとする．M_A^*の開集合列$\{W_n\}_1^\infty$で

$$W_n\supset W_{n+1}^*\supset W_{n+1}\supset L^*,\ \bigcap_{n=1}^{\infty}W_n\subset M_A^*-M,\ W_n^*\cap\Gamma(M,A)=\phi$$

となるものをとる．又$T^*|M=T$と置く．

第一段．$u_{n,p}$を$(W_n-W_{n+p}^*)\cap M$上$Au_{n,p}=0$を満足し，$\partial(W_n\cap M)$及び$\partial(W_{n+p}\cap M)$で夫々"境界値"2と1となる函数とする．第2節の2)によればこの様な函数は唯一つであるばかりでなく

$$\lim_{p\to\infty} \mathcal{D}^{A}_{(W_n - W^*_{n+p})\cap M}(u_{n,p}) = 0$$

となることが示される．故に必要なら部分列をとることにして初めから

$$(17) \qquad a_n \equiv \mathcal{D}^{A}_{(W_n - W^*_{n+p})\cap M}(u_{n,1}) < 2^{-n}$$

となっていると仮定することが出来る．$\mathcal{H}_n = [W_{n+1}\cap M, W_n \cap M]$ を考えて

$$(18) \qquad \mathrm{mod}^{A}_{M}\, \mathcal{H}_n = \frac{1}{a_n}$$

となることが証明できる．

$$H_1 = \bigcup_{n=0}^{\infty} (W_{4n+2} - W^*_{4n+3})\cap M, \quad H_2 = \bigcup_{n=0}^{\infty} (W_{4n+1} - W^*_{4n+4})\cap M$$

に対する一般化球環 $\mathcal{H} = [H_1, H_2]$ を考えると

$$(19) \qquad 1/\mathrm{mod}^{A}_{M}\, \mathcal{H} = \sum_{n=0}^{\infty} 1/\mathrm{mod}^{A}_{M}\, \mathcal{H}_{2n+1}$$

なる等式を得る．以上 (17)−(19) を合せることにより

$$(20) \qquad \mathrm{mod}^{A}_{M}\, \mathcal{H} > 0$$

が得られる．

第二段．$\widetilde{W}_n = T^* W_n$ とおく．$T\mathcal{H}$ に対する $\mathcal{F}$ の任意の函数 φ をとり $\varphi_n = \varphi \,|\, (\widetilde{W}_{2n-1} - \widetilde{W}^*_{2n})\cap \widetilde{M}$ とおくと

(21) $$\mathcal{D}^{\tilde{A}}_{TH_2-\overline{TH_1}}(\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{D}^{\tilde{A}}_{(\tilde{W}_{2n-1}-\tilde{W}^*_{2n})\cap M}(\varphi_n)$$

となる．$\tilde{W}_1\cap\tilde{M}$ 上 $\tilde{A}v=0$ を満足し $\partial(\tilde{W}_1\cap\tilde{M})$ における"境界値" 0，$L'=\bigcap_{n=1}^{\infty}\tilde{W}_n$ における"境界値" 1，残りの $\tilde{W}_1\cap\tilde{M}$ の境界における"法線微分" 0 となる函数 v をとると，L' が $\Gamma(\tilde{M},\tilde{A})$ 内の空でない閉集合 $TL\cap\Gamma(\tilde{M},\tilde{A})$ を含んでいる事に注意して

(22) $$0<\mathcal{D}^{\tilde{A}}_{\tilde{W}_1\cap\tilde{M}}(v)\leq\mathcal{D}^{\tilde{A}}_{(\tilde{W}_{2n-1}-\tilde{W}^*_{2n})\cap\tilde{M}}(\varphi_n)$$

が凡ての n に対し成立つことが計算出来る．(21)，(22) 及び modulus の定義から

(23) $$\mathrm{mod}^{\tilde{A}}_{\tilde{M}}\ T\mathcal{H}=0$$

が結論される．定理2によると T は Royden 写像だから (13) により上に得た (20) と (23) は互に矛盾する．

§5. 例

M 上作用素 A_1 に関する Green 函数が存在するか否かがわかっているとき M 上別の作用素 A_2 に関する Green 函数の存在非存在を判定するのには $M^*_{A_1}=M^*_{A_2}$ がわかればよい．そうなる十分条件としては M の恒等写像が (14) をみたせばよい：

$$(24) \qquad k^{-1}(a_1^{ij}(x)) \le (a_2^{ij}(x)) \le k(a_1^{ij}(x)).$$

この方法でGreen函数の存在非存在の直ちにわかる簡単な一例をあげる．m次元Euclid空間E^mでのLaplace作用素

$$\Delta u(x) = -\sum_{i=1}^{m} \partial^2 u(x)/\partial(x^i)^2$$

に対しては，E^2上Δに関するGreen函数は存在しないが，$m \ge 3$に対してはE^m上Δに関するGreen函数はNewton核$G(x,y)=|x-y|^{2-m}$として与えられる．故にAが有界一様楕円型，即ち$x \in E^m$に無関係な常数$k \ge 1$があって

$$(25) \qquad k^{-1}\sum_{i=1}^{m} \xi_i^2 \le \sum_{i,j=1}^{m} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \le k\sum_{i=1}^{m} \xi_i^2$$

が凡ての実ベクトル$(\xi_1, \cdots, \xi_m)$で成立するときには，E^2上Aに関するGreen函数は存在しないが，E^m $(m \ge 3)$上Aに関するGreen函数は存在する．$A_1 = \Delta$，$A_2 = A$として読めば(25)は(24)そのものだから$(E^m)^*_\Delta = (E^m)^*_A$となるからである．

§6. 附記

主定理は放物型リーマン面の族が擬等角写像で不変であると言うPflugerの定理或いはその一般化（[3]参照）及び放物型リーマン多様体の族が準等距離写像で不変である(Nakai-Sario [4]）と言う二事実の同時一般化になっている．詳細は別に発表予定でいる．

定理2で，M_A^* から $\tilde{M}_{\tilde{A}}^*$ への連続写像 T^* で $T^*|M = T$ が M から $\tilde{M}$ への位相写像となることを仮定すると，T は (13) の右半分の不等式をみたしていることがわかる．逆にこの様な T は M から $\tilde{M}$ への連続写像 T^* に延長できることもわかる．この時定理3の一般化として

$$T^*\Gamma(M, A) \subset \Gamma(\tilde{M}, \tilde{A})$$

が結論できる．

M_A^* から $\tilde{M}_{\tilde{A}}^*$ への M と $\tilde{M}$ を保存する連続写像が存在することで順序 $\rho(M, A) \geq \rho(\tilde{M}, \tilde{A})$ を定めることにすれば，主定理の一般化として，M 上 A に関する Green 函数が存在すれば，$\rho(M, A) \geq \rho(\tilde{M}, \tilde{A})$ となるすべての $\tilde{M}$ 上 $\tilde{A}$ に関するところの Green 函数が存在することが結論出来る．

引用文献

[1] S. Itô: On existence of Green function and positive superharmonic functions for linear elliptic operators of second order, J. Math. Soc. Japan, 16 (1964), 299–306.

[2] R. M. Hervé: Quelque propriétés des sursolutions et

sursolution locales d'une équation uniformément elliptique de la forme $Lu = -\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0$, Ann. Inst. Fourier, 16 (1966), 241-267.

[3] M. Nakai: Royden's map between Riemann surfaces, Bull. Amer. Math. Soc., 72 (1966), 1003-1005.

[4] M. Nakai and L. Sario: Classification and deformation of Riemannian spaces, Math. Scand., 20 (1967), 193-208.