数理解析研究所講究録
第 59 巻 1968 年 96-108

非線形半群について

お茶の水大 理　高村幸男

Hilbert 空間 H 上の（必ずしも線形でない）縮小作用素の作る半群（以下単に半群という）：

1）　$T_0 = I,\quad T_{t+s} = T_t \cdot T_s \qquad t, s \geq 0$

2）　$T_t x \longrightarrow T_{t_0} x$ (強),　$t \to t_0,\ t, t_0 \geq 0$

3）　$\| T_t x - T_t y \| \leq \| x - y \|$

を論ずること，特に Hille-Yosida の定理を得ることが目的である。（条件 3) は

3′）　$\| T_t x - T_t y \| \leq e^{\kappa t} \| x - y \|$

でおきかえることができるが、簡単のため 3) の下で論ずることにする。）

Hilbert 空間 H における（多価）写像 A が dissipative であるとは，$x, y \in D(A)$ のとき

$$\mathrm{Re}\langle x - y,\ x' - y' \rangle \leq 0,\quad x' \in Ax,\ y' \in Ay$$

を意味する。このような A について $(I-\lambda A)^{-1}$ は $\lambda>0$ のとき Lipschitz 連続：$\|(I-\lambda A)^{-1}x-(I-\lambda A)^{-1}y\| \leq \|x-y\|$ ，である。

Dissipative な A が極大であれば，任意の $\lambda>0$ に対し $(I-\lambda A)^{-1}$ は H 全体で定義され，逆にある $\lambda>0$ に対し $(I-\lambda A)^{-1}$ が H 全体で定義されるような dissipative な A は極大である。

A が極大 dissipative であれば，任意の $x\in D(A)$ について Ax は H の閉かつ凸な部分集合である。従って

$$x_0' \in Ax \ , \quad \|x_0'\| = \inf\{\|x'\| \ ; \ x'\in Ax\}$$

なる x_0' が唯一つ存在する。よって A の canonical restriction A° を

$$A^\circ x = x_0'$$

によって定める。明らかに $D(A)=D(A^\circ)$ である。

半群 $\{T_t\}$ の生成作用素は右微分 D^+ を用いて次のように定義される：

$$A_0 x = D^+T_t x\Big|_{t=0} \ \left(= \lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}(T_h x - x)\right).$$

我々は線形の場合と同様に

条件 1), 2) を満たす $\{T_t\}$ の生成作用素 A_0 が $D(T_t)$ で dense に定義されているとする。そのとき A_0 が dissipative であることと，$\{T_t\}$ が縮小条件 3) を満

たすこととは同等である,

を示すことができる。また Hilbert 空間において (reflexive Banach 空間においても) 絶対連続な函数は不定積分で表されること, 条件 3) から $\| T_{t+h}x - T_t x \| \leq \| T_h x - x \|$ なること, を用いて

$x \in D(A_0)$ ならば $T_t x$ は殆んどいたる所微分可能で、 $\frac{d}{dt} T_t x = A_0 x$ (a. e. t), $T_t x = x + \int_0^t A_0 T_s x \, ds$

を得る。

我々の問題は 1) いかなる作用素 A が半群を生成するか, 即ち, 適当な条件の下で

$$D^+ u(t) = A u(t)$$

を解くことと 2) 半群はその定義域で dense に定義された生成作用素をもつか、というものである。 1) については定理 1, 2 において, 2) については定理 3, 4 において考察する。

定理 1. A が極大 dissipative ならば

$$4) \begin{cases} \frac{d}{dt} u(t) \in A u(t) & \text{a. e. } t \\ u(0) = x_0 \in D(A) \end{cases}$$

の (絶対連続な) 解 $u(t)$ が一意に存在する。

補題1. A を極大 dissipative とする. $x_n \in D(A)$, $x_n' \in Ax_n$ であって

$$x_n \longrightarrow x \ (\text{強}) \qquad x_n' \longrightarrow x' \ (\text{弱})$$

ならば、$x' \in Ax$, $x \in D(A)$ である。特に, $x_n \longrightarrow x$ (強), $\{x_n'\}$ 有界, ならば $x \in D(A)$ である。

証)

A のグラフ $\{(y, y') : y \in D(A), y' \in Ay\}$ に (x, x') をつけ加えたものをグラフとする写像を $\overline{A}$ とする。

$$\mathrm{Re}\langle x - y, x' - y'\rangle = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}\langle x_n - y, x_n' - y'\rangle \leq 0$$
$$y \in D(A), \quad y' \in Ay$$

であるから $\overline{A}$ は dissipative な A の拡張である. A は極大であるから $\overline{A} = A$. $\{x_n'\}$ が有界な場合は弱収束部分列 $\{x_{n_k}'\}$ をとればよい.

定理1の証明の概略)

I) 写像 $A_n : x - \frac{1}{n}x' \longrightarrow x' \quad x \in D(A), x' \in Ax$ を作ると, $D(A_n) = H$ であって, さらに A_n は Lipschitz 連続 (従って一価):

$$\| A_n v - A_n w \| \leq n \| v - w \| .$$

よって $x_0' \in Ax_0$ を一つ固定して

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u_n(t) = A_n u_n(t) \\ u_n(0) = x_0 - \frac{1}{n}x_0' \end{cases}$$

の解 $u_n(t)$ は一意に存在する。また A_n は dissipative であり

$$\| A_n u_n(t) \| \leq \| A_n u_n(s) \| \qquad t \geq s \geq 0$$

が成立する。

II) $\{u_n(t)\}$ は（ノルムに関して）広義一様にある連続函数 $u(t)$ に收束する。$v_n(t) = (I - \frac{1}{n} A)^{-1} u_n(t)$ とおけば

$$\| v_n(t) - u(t) \| \longrightarrow 0 \qquad \text{広義一様}$$

$$A_n u_n(t) \in A v_n(t)$$

III) $t_0 > 0$ を固定する。H の値をとる可測函数 f で、

$$\| f \|^2 = \int_0^{t_0} \| f(t) \|^2 dt < \infty$$

なるもの全体のなす Hilbert 空間を $L^2_H[0, t_0]$ と記す。A を $L^2_H[0, t_0]$ に自然に拡大したものを $\tilde{A}$ とすれば、$\tilde{A}$ はやはり極大 dissipative になる。$A_n u_n$ は有界であるから、$L^2_H[0, t_0]$ において弱收束するような部分列 $A_{n_k} u_{n_k}$ をとれば

$$v_{n_k} \longrightarrow u \quad (\text{強}) \quad \text{in } L^2_H[0, t_0]$$

$$A_{n_k} u_{n_k} \longrightarrow {}^{\exists} w \quad (\text{弱}) \quad \text{in } L^2_H[0, t_0]$$

であるから、補題1により

$$w \in \tilde{A} u \quad \text{即ち} \quad w(t) \in A u(t) \quad \text{a.e. } t.$$

IV) $u_n(t) = u_n(0) + \int_0^t A_n u_n(s) ds$ であって

$$u_n(t) \longrightarrow u(t) \ (\text{強}) \qquad u_n(0) \longrightarrow x_0 \ (\text{強})$$

$$A_{n_k} u_{n_k} \longrightarrow w \quad (\text{弱}) \quad \text{in } L^2_H[0, t_0]$$

より

$$u(t) = x_0 + \int_0^t w(s)\,ds .$$

よって $u(t)$ は絶対連続で

$$\frac{d}{dt}u(t) = w(t) \in Au(t) \qquad \text{a.e. } t.$$

V) 解の一意性は，u^1，u^2 を解とすると

$$\frac{d}{ds}\|u^1(s) - u^2(s)\|^2 = 2\,\mathrm{Re}\left\langle u^1(s) - u^2(s), \frac{d}{ds}u^1(s) - \frac{d}{ds}u^2(s)\right\rangle$$
$$\leq 0$$

より

$$\|u^1(t) - u^2(t)\|^2 = \|u^1(0) - u^2(0)\|^2 + \int_0^t \frac{d}{ds}\|u^1(s) - u^2(s)\|^2 ds$$
$$\leq \|u^1(0) - u^2(0)\|^2 ,$$

であるから明らか。

定理2．前定理の u は次式を満たす：

$$D^+u(t) = A^0 u(t),$$

かつ $D^+u(t)$ は右連続である。

証明の概略）

$t = 0$ のとき．前定理の証明において，$x_0' = Ax_0$ とおけば，$u_n(0) = x_0 - \frac{1}{n}x_0'$ であるから

$$\|A_n u_n(t)\| \leq \|A_n u_n(0)\| = \|A^0 x_0\| ,$$
$$u_n(h) - u_n(0) = \int_0^h \frac{d}{dt}u_n(t)\,dt = \int_0^h A_n u_n(t)\,dt$$

より

$$\frac{1}{h}\|u_n(h) - u_n(0)\| \leq \|A^0 x_0\| .$$

よって

$$\frac{1}{h}\|u(h)-u(0)\| \le \|A^\circ x_0\| .$$

一方 $u(t) \in D(A)$, $\frac{d}{dt}u(t) \in Au(t)$ なる t は dense に存在するから

$$u(t_n) \in D(A), \quad \frac{d}{dt}u(t_n) \text{ は弱収束}$$

なる $t_n \downarrow 0$ をとれば

$$u(t_n) \longrightarrow u(0) \ (\text{強}) \quad \frac{d}{dt}u(t_n) \longrightarrow {}^{\exists}y \quad (\text{弱})$$

より補題1を用いて

$$y \in Au(0), \qquad \|y\| \le \|A^\circ u(0)\| .$$

A° の定義より $y = A^\circ u(0)$. また

$$\left\|\frac{d}{dt}u(t_n)\right\| \longrightarrow \|y\|, \quad \frac{d}{dt}u(t_n) \longrightarrow y \ (\text{弱})$$

より

$$\frac{d}{dt}u(t_n) \longrightarrow A^\circ u(0) \quad (\text{強}) .$$

この関係は、測度0を除いた集合から任意に選んだ $t_n \downarrow 0$ について成立する。よって

$$\frac{1}{h}\int_0^h \frac{d}{dt}u(t)\,dt \longrightarrow A^\circ u(0), \qquad h \downarrow 0 .$$

$t > 0$ のとき。 $t_n \to t$, $u(t_n) \in D(A)$ とすれば、

$u(t_n) \longrightarrow u(t)$ (強) かつ $\left\{\frac{d}{dt}u(t_n)\right\}$ は有界, $\subset D(A)$.

よって補題1より $u(t) \in D(A)$. 解の一意性より $u(t)$ を初期値とする解を考えれば $t=0$ の場合に帰着される。

さて我々は半群が dense な点で微分可能かどうかを論ずるわけであるが、その為には半群の定義域についての条件が必要である。線形の場合には，半群の定義域が閉部分空間になるように拡張出来るから，半群の定義域は全空間として一般性を失わない。しかるに，非線形の場合には，$D(T_t) \neq H$ でありながら，縮小条件 3) の下ではそれ以上拡張出来ないような半群 $\{T_t\}$ が存在する。従って我々は，それ以上拡張出来ない半群（極大半群と呼ぶことにする）を考察の対象とする。任意の半群は極大な拡張をもつ。

定理 3. 極大半群 $\{T_t\}$ の定義域は凸かつ閉である。

閉であることの証明)

$x \in \overline{D(T_t)}$ に対し $x_n \in D(T_t)$, $x_n \longrightarrow x$ (強)

なる x_n をとれば

$$\| T_t x_n - T_t x_m \| \leq \| x_n - x_m \|$$

より $\{T_t x_n\}$ は Cauchy 列で，その極限 $u(t)$ は $u(0) = x$ であって $\{x_n\}$ の選び方によらない。

$$\tilde{T}_t y = \begin{cases} T_t y & y \in D(T_t) \\ u(t+s) & y = u(s) \end{cases}$$

とおけば $\{\tilde{T}_t\}$ は $\{T_t\}$ の拡張であるから $\{T_t\}$ の極大性から $\tilde{T}_t = T_t$. 即ち $x \in D(T_t)$.

凸である証明は大変複雑である。次の補題を必要とする。

補題2. Hilbert空間 H において，2組の球の族

$$S(y_\alpha, r_\alpha) = \{x : \|x - y_\alpha\| \le r_\alpha\} \qquad \alpha \in \Gamma$$

$$S(y'_\alpha, r_\alpha) = \{x : \|x - y'_\alpha\| \le r_\alpha\} \qquad \alpha \in \Gamma$$

があるとする。もし

$$\|y'_\alpha - y'_\beta\| \le \|y_\alpha - y_\beta\|, \quad \bigcap_{\alpha\in\Gamma} S(y_\alpha, r_\alpha) \neq \phi$$

ならば

$$\bigcap_{\alpha\in\Gamma} S(y'_\alpha, r_\alpha) \neq \phi .$$

（証明は Minty [10] 参照）

凸であることの証明の方針）

I) $D(T_t)$ の凸閉包を Ω とする．補題2を用いて，$T_{2^{-k}}$ の Ω への（縮小作用素である）拡張が少くとも一つ存在することがわかる．但し k は任意に固定された自然数とする．その拡張の集合を $\{U_k^\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ とする：

$$U_k^\alpha = T_{2^{-k}} \text{ on } D(T_t), \quad \|U_k^\alpha x - U_k^\alpha y\| \le \|x - y\|, \ x, y \in \Omega.$$

U_k^α から Ω における discrete parameter $t = 0, 2^{-k}, 2\cdot 2^{-k}, \cdots$ をもつ半群 $\{T_t^\alpha\}$ が

$$T_{j2^{-k}}^\alpha = (U_k^\alpha)^j \qquad j = 0, 1, 2, \cdots.$$

によって定められる。明らかに $T_t^\alpha = T_t$ on $D(T_t)$, $t = j2^{-k}$.

この半群の集合 $\{\{T_t^\alpha\}\}$ を τ_k と記す。

II). $z \in \Omega$ を固定すると $\{T_t^\alpha z : \alpha \in T\}$ は同等連続,

即ち $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$:

$$\| T_{2^{-k}}^\alpha z - z \| < \varepsilon \qquad \{T_t^\alpha\} \in \tau_k,\ 2^{-k} < \delta .$$

III). $x \in \Omega$ を固定すると, 任意の $\lambda > 0$, $T^\alpha \in \tau_k$ に対し

$$y_k^\alpha(\lambda) = (I - \lambda A_k^\alpha)^{-1} x, \quad A_k^\alpha = 2^k (T_{2^{-k}}^\alpha - I),$$

となる $y_k^\alpha(\lambda) \in \Omega$ が存在する。λ を固定したとき $y_k^\alpha(\lambda)$ は有界, 従って $\varphi = (\alpha, k)$ を要素とする集合の ultrafilter Φ で $\lim_\Phi k = \infty$ なるものをとると

$$y(\lambda) = w\text{-}\lim_\Phi (I - \lambda A_k^\alpha)^{-1} x$$

が存在する。

IV). 任意に $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \Omega$, $\varepsilon > 0$ をとる。適当に α, k $(> k_0)$ をとると

$$\| y^i(\lambda) - y_k^{\alpha, i}(\lambda) \| < \varepsilon ,$$

ただし

$$y_k^{\alpha, i}(\lambda) = (I - \lambda A_k^\alpha)^{-1} x_i ,$$

$$y^i(\lambda) = w\text{-}\lim_\Phi (I - \lambda A_k^\alpha)^{-1} x_i .$$

このことから, 適当な filter Ψ をとれば, 任意の $x \in \Omega$ に対し

$$y(\lambda) = \lim_\Psi (I - \lambda A_k^\alpha)^{-1} x$$

が存在する。この Ψ を用いて (多価) dissipative 写像 $A^{(\lambda)}$

を定める。即ち上の関係式を用いて

$$y(\lambda) = (I - \lambda A^{(\lambda)})^{-1} x \ .$$

Ⅳ に関する収束が強収束であることから

$$A^{(\lambda)} \subset A^{(\mu)} \qquad \lambda > \mu > 0$$

が得られるので $A = \bigcup_{\lambda>0} A^{(\lambda)}$ として（多価）*dissipative*，

$D(A)$ は Ω の中で *dense*，かつ

$$D((I-\lambda A)^{-1}) \supset \Omega \qquad \lambda > 0$$

なる A が得られる。

Ⅴ) 上の A を用いて定理1と同様に

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} u(t) \in A u(t) \\ u(0) = x_0 \in D(A) \end{cases}$$

の解を Ω の中に作ることが出来る。$x_0 \in D(T_t)$ ならば

$u(t) = T_t x_0$ となる。$x_0 \notin D(T_t)$ ならば

$$\tilde{T}_t x_0 = \begin{cases} T_t x, & x \in D(T_t) \\ u(t+s), & x = u(s), \end{cases}$$

とおけば $\{\tilde{T}_t\}$ は $\{T_t\}$ の真の拡張であるから $\{T_t\}$ が

極大であることに矛盾する。$D(T_t) \neq \Omega$ ならば $D(A) \subset \Omega$

にならないことに注意する。

上に得られた A は $D(T_t) = \Omega$ ならば一意（Ⅳによらない）であって，$x \in D(A)$ ならば $T_t x$ は右微分可能.

$D(A)$ は Ω で dense であるから次の定理を得る．

定理4．半群 $\{T_t\}$ の定義域が凸かつ閉，特に $\{T_t\}$ が極大，ならば $\{T_t\}$ の生成作用素 A_0 の定義域 $D(A_0)$ は $D(T_t)$ で dense である．

以上をまとめて

非線形の Hille-Yosida の定理．

1) 極大な半群 $\{T_t\}$ の生成作用素 A_0 は $\{T_t\}$ の定義域で dense に定義されている。またクラス $\{B^\circ : B$ は極大 dissipative$\}$ の中で極大である。

2) $\{B^\circ : B$ は極大 dissipative$\}$ なるクラスの中で極大な任意の A° に対し A° を生成作用素とする半群 $\{T_t\}$ が唯一つ存在する．その半群は

$$D^+ T_t x = A^\circ T_t x \quad , \qquad x \in D(A^\circ)$$

を満たす。

References

[1] M. Crandall & A. Pazy, Nonlinear semigroups of contractions and dissipative sets, J. Funct. Anal., to appear.

[2] M. Crandall & A. Pazy, On the generation of nonlinear semigroups of contractions in Hilbert space, to appear.

[3] M. Crandall, On accretive and dissipative sets in Banach spaces, to appear.

[4] J. Dorroh, A nonlinear Hille-Yosida-Phillips Theorem, to appear.

[5] T. Kato, Nonlinear semigroups and evolution equations, J. Math. Soc. Japan, 19 (1967), 508-520.

[6] T. Kato, Accretive operators and nonlinear evolution equations in Banach spaces, to appear.

[7] T. Kato, On the generators of nonlinear semigroups, to appear.

[8] Y. Kōmura, Nonlinear semigroups in Hilbert space, J. Math. Soc. Japan, 19 (1967), 493-507.

[9] Y. Kōmura, Differentiability of nonlinear semigroups, J. Math. Soc. Japan, to appear.

[10] G. Minty, Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space. Duke Math. J., 29 (1962), 341-346.

[11] I. Miyadera, On the convergence of nonlinear semigroups, to appear.

[12] I. Miyadera, On the convergence of nonlinear semigroups II, to appear.

[13] S. Oharu, Nonlinear semigroups in Banach space, to appear.