数理解析研究所講究録
第59巻 1968年 128-139

2階非線型楕円型方程式に対する外部境界値問題について

早大 理工　草野 尚

以前，或る種の非線型2階楕円型方程式に対する外部境界値問題の solvability に関する結果を発表した.（[3] 参照）ここでは，その結果をより精密にし，発展させることを目標にする.

Ω を或る単連結有界領域 $D \subset \mathbb{R}^n$ の open exterior, S を Ω の finite boundary ∂D とする. $\phi(x)$ を S 上で与えられた連続関数として，次の二つの外部 Dirichlet 問題を考える.

$$
(A)\quad \begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x,u), & x \in \Omega \\ u = \phi(x), & x \in S \end{cases}
$$

$$
(B)\quad \begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,u)u = f(x,u), & x \in \Omega \\ u = \phi(x), & x \in S \end{cases}
$$

外部境界値問題では，普通解 $u(x)$ の無限遠における行動を制限する. 例えば，無限遠において予め指定された値をと

ることを要求する問題，無限遠で単に有界であることを要求する問題，が典型的なものである．前者は data の間に強い compatibility が必要で取り扱いが難かしい（ Oskolkov [8] 参照）ので，我々は後者を考察することにする．

§1 では線型問題に関する結果を述べる． §2 では半線型問題（A）を逐次近似法で解く． §3 では準線型問題（B）を Leray－Schauder の定理を用いて解く．

§1. 線型問題

Theorem 1 （最大値原理）

$u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ は下に有界で，不等式

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u \geqq 0, & x \in \Omega \\ u \geqq 0, & x \in S \end{cases}$$

を満たすとする． $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$ は有界， $c(x) \geqq \gamma > 0$ ，かつ $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqq \alpha|\xi|^2$, $\alpha > 0$ ，とする．このとき $u(x) \geqq 0$, $x \in \bar{\Omega}$.

証明は Kusano [3] 参照．又 Oddson [7] もみよ．

Theorem 2 （線型 Dirichlet 問題の solvability）

下記の条件が満たされるならば，問題

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x), & x \in \Omega \\ u = \phi(x), & x \in S \end{cases}$$

I) $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqq \alpha|\xi|^2, \ \alpha>0$; $c(x) \geqq \gamma > 0$

II) $a_{ij}(x), b_i(x), c(x), f(x)$ は $\bar{\Omega}$ で有界連続かつ Ω で Hölder 連続

III) Ω は exterior cone property をもつ

IV) $\phi(x)$ は S 上で連続.

証明は Kusano [3] 参照. 要領は有界領域における Dirichlet 問題を取り扱う場合 (例えば Courant-Hilbert [2]) と同様で Miller [6] が作った S 上の各点における strong barrier function が重要な役割を果す.

§2. 半線型問題 (A)

(a) modified Picard iteration による解の構成

Theorem 3. 下記の条件が満たされるものとする.

I) $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqq \alpha|\xi|^2, \ \alpha>0$; $c(x) \geqq \gamma > 0$

II) $a_{ij}(x), \ \partial a_{ij}(x)/\partial x_i, \ b_i(x), \ c(x)$ は $\bar{\Omega}$ で有界連続かつ Ω で Hölder 連続

III) $f(x,u)$ は u を固定したとき $\bar{\Omega}$ で有界連続, Ω で Hölder 連続, x を固定したとき $-\infty<u<\infty$ で Hölder 連続

IV) 次の性質をもつ有界な関数 $v(x), V(x) \in C^2(\Omega)\cap C^0(\bar{\Omega})$ が存在する. $v(x) \leqq V(x), \ x\in\Omega$

$$Lv(x) \leqq f(x, v(x)), \ x\in\Omega ; \qquad v(x) \leqq \phi(x), \ x\in S$$

$$LV(x) \geqq f(x, V(x)), \ x\in\Omega ; \qquad V(x) \geqq \phi(x), \ x\in S$$

V) $\mathcal{D} = \{ (x,u) \mid x \in \bar{\Omega},\ v(x) \leqq u \leqq V(x) \}$ で

$$u \geqq v \Rightarrow f(x,u) - f(x,v) \geqq l(x)(u - v)$$

$l(x)$ は $\bar{\Omega}$ で有界連続，Ω で Hölder 連続，かつ $\sup_{\bar{\Omega}} l(x) < \gamma$

VI) Ω は exterior cone property をもつ．$\phi(x)$ は S 上で連続．

このとき，問題

$$\begin{cases} Lu \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x,u), & x \in \Omega \\ u = \phi(x), & x \in S \end{cases}$$

の有界な解が次の iteration scheme によって作られる．

$$\begin{cases} Lu_m - l(x)u_m = f(x, u_{m-1}) - l(x)u_{m-1}, & x \in \Omega \\ u_m = \phi(x), \ x \in S; \quad m = 1, 2, 3, \cdots; & u_0 = v \text{ or } V \end{cases}$$

$u_0 = V$ ならば，$\{u_m(x)\}$ は単調減少で最大解 $\bar{u}(x)$ に，$u_0 = v$ ならば $\{u_m(x)\}$ は単調増加で最小解 $\underline{u}(x)$ に収束する．

（証明）$u_0 = V$ とする．

$L(V - u_1) - l(V - u_1) \geqq 0,\ x \in \Omega,\quad V - u_1 \geqq 0,\ x \in S$ であるから Theorem 1 によって $V \geqq u_1,\ x \in \bar{\Omega}$．

$L(u_1 - v) - l(u_1 - v) \geqq 0,\ x \in \Omega,\quad u_1 - v \geqq 0,\ x \in S$ であるから Theorem 1 によって $u_1 \geqq v,\ x \in \bar{\Omega}$．

一般に，$V(x) \geqq u_{m-2}(x) \geqq u_{m-1}(x) \geqq v(x),\ x \in \bar{\Omega}$ と仮定すれば

$$L(u_{m-1} - u_m) - l(u_{m-1} - u_m) = f(x, u_{m-2}) - f(x, u_{m-1}) - l(u_{m-2} - u_{m-1}) \geqq 0$$

$$L(u_m - v) - l(u_m - v) \geqq f(x, u_{m-1}) - f(x, v) - l(u_{m-1} - v) \geqq 0$$

が Ω で成り立つから，再び Theorem 1 によって，すべての m に

対して $\overline{v}(x) \geqq u_{m-1}(x) \geqq u_m(x) \geqq v(x),\ x\in\overline{\Omega}$ が得られる.

$\overline{u}(x)=\lim_{m\to\infty} u_m(x)$ が一つの解であることを示す. 近年発展した'不連続係数をもつ楕円型方程式の理論'における解のHölder連続性の評価に関する研究から([5, 10, 11, 12] 参照)

Lemma. $u(x)$ を方程式

$$-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u=f(x),\quad x\in G\subset R^n$$

の有界な解(weak solution)とする. 係数及び右辺は有界で, $\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqq \alpha|\xi|^2,\ \alpha>0$, ならば, $u(x)$ は G の各 compact subset F 上で Hölder 連続になる. その exponent 及び coefficients は, 係数右辺, 解の上界, α, dist$(F, \partial G)$ だけで評価される

という事実が成立つことに注意する. そうすれば, 上記の近似 scheme によって得られた $\{u_m(x)\}$ は Ω の各 compact subdomain において, m に無関係な exponent と coefficient をもつ Hölder 条件を満足することが分る. この事実を考慮して Schauder の内部評価を適用すると, $u_m(x)$, $\partial u_m(x)/\partial x_i$, $\partial^2 u_m(x)/\partial x_i\partial x_j$ が Ω の各 compact subdomain において一様有界かつ同程度連続になることが従う. よって $\overline{u}(x)$ は問題の解になる.

境界 S の附近での $\{u_m(x)\}$ の収束も一様である. 実際, x^0 を S 上の任意の点とする. 仮定 VII によって, x^0 のある相対近傍 N と

$$Lw-lw\geqq 1,\ x\in N;\quad w(x^0)=0;\quad w(x)>0,\ x\in\overline{N}-\{x^0\}$$

をみたす関数 $w = w_{x^0}(x)$ が存在する．（strong barrier function at x^0）

標準的方法により，m に無関係な正の定数 k, δ があって

$$|u_m(x) - u_m(x^0)| \leqq k\,w(x) + \sup_{S\cap(|x-x^0|\leqq\delta)} |\phi(x) - \phi(x^0)|, \quad x\in\overline{\Omega}\cap(|x-x^0|\leqq\delta)$$

がえられる．これから S の附近における $\{u_m(x)\}$ の同程度連続性が結果する．

$\overline{u}(x)$ が maximal であること．$u(x)$ を $v(x) \leqq u(x) \leqq V(x)$ なる任意の解とする．$\{u_m(x)\}$ の単調性を証明したときに $v(x)$ の果した役割をこの $u(x)$ が果せることに気を付けると，$u(x) \leqq u_m(x)$ 従って $u(x) \leqq \overline{u}(x)$ が得られる．（証明終）

Corollary 1. $f(x,u)$ がすべての (x,u) に対して有界，かつ u について Lipschitz 條件をみたす

$$|f(x,u)| \leqq M, \qquad |f(x,u) - f(x,v)| \leqq l\,|u-v|$$

ならば，問題（A）は少くとも一つ有界な解をもつ．問題（A）のすべての解 $u(x)$ は不等式 $|u(x)| \leqq V(x)$, $x\in\overline{\Omega}$ を満たす．但し $V(x)$ は $LV(x) = M$, $x\in\Omega$; $V(x) = \sup_S|\phi|$, $x\in S$ の有界な解．

Corollary 2. $f_1(x,u)$ は Corollary 1 の $f(x,u)$ と同じ條件を満たす関数，$f_2(x,u)$ は $\partial f_2(x,u)/\partial u$ と共に x の有界な関数で，$\partial f_2(x,u)/\partial u \leqq 0$ とする．$f(x,u) = f_1(x,u) + f_2(x,u)$ ならば，問題（A）は少くとも一つ有界な解をもつ．

Corollary 3. $f(x,u)$ は x の有界な関数で $f(x,0) \geqq 0$, $\neq 0$ とする．$x\in\Omega$, $u \geqq 0$ で Theorem 3 の條件 V をみたすと仮定する．

$\phi(x)\equiv 0$ とする．$u_0(x)\equiv 0$ から出発して Theorem 3 の scheme で関数列 $\{u_m(x)\}$ を作る．これが non-negative な解に収束するための条件は，これが一様有界であることである．

Corollary 4. $f(x,u)$, $\phi(x)$ は Corollary 3 の条件をみたすとする．このとき，境界値問題

$$Lu=\lambda f(x,u),\quad x\in\Omega\ ;\qquad u=0,\quad x\in S$$

は (i) $f(x,u)$ が任意のとき，十分小さい $\lambda>0$ に対して少くとも一つの有界な解をもち，(ii) $\lim_{u\to\infty}\dfrac{f(x,u)}{u}=0$ (x について一様) のとき，任意の $\lambda>0$ に対して少くとも一つ有界な解をもつ．

(b) Quasilinearization による解法

$f(x,u)$ は $x\in\overline{\Omega}$, $u\geqq 0$ で定義された関数で，$f(x,0)\geqq 0$, $\not\equiv 0$ かつ $u>0$ に対して $f_u(x,u)>0$, $f_{uu}(x,u)>0$ 又は $f_u(x,u)>0$, $f_{uu}(x,u)<0$ を満たすものと仮定する．有界領域の場合 (Cohen [1], Kusano [4]) と同様に，我々の外部境界値問題

$$Lu=\lambda f(x,u),\quad x\in\Omega;\qquad u=0,\ x\in S$$

も quasilinearization によって解かれることを示す．

Theorem 4. 十分小さい $\lambda>0$ に対して関数列 $\{u_m(x;\lambda)\}$ を

$$Lu_1=\lambda[f(x,0)+f_u(x,0)u_1],\ x\in\Omega;\qquad u_1=0,\ x\in S$$

$$Lu_m=\lambda[f(x,u_{m-1})+f_u(x,u_{m-1})(u_m-u_{m-1})],\ x\in\Omega;\quad u_m=0,\ x\in S$$

$$m=2,3,4,\cdots$$

の有界な解として定める．$f_{uu}>0$ のとき，$\{u_m(x;\lambda)\}$ は単調に増加しながら，$f_{uu}<0$ のとき，$\{u_m(x;\lambda)\}$ は単調に減少しながら，問題の唯一つの有界な解に収束する．

（証明） $f_{uu}>0$ の場合を考える．このとき次式が成立つ．

$$f_u(x,u) > f_u(x,v) \qquad (\ u>v\geqq 0\ )$$

$$f(x,u) \geqq f(x,v) + f_u(x,v)(u-v) \qquad (\ u, v \geqq 0\ )$$

$\lambda>0$ が十分小さいと

$$L\bar{v}(x) \geqq \lambda f(x,\bar{v}(x)),\ x\in\Omega; \qquad \bar{v}(x)=0,\ x\in S$$

を満たす有界な関数 $\bar{v}(x)\geqq 0$ が存在する．

$Lu_1 - \lambda f_u(x,0)u_1 = \lambda f(x,0)$ から $u_1(x;\lambda)\geqq 0$

$L(\bar{v}-u_1)-\lambda f_u(x,0)(\bar{v}-u_1)\geqq 0$ から $\bar{v}(x)\geqq u_1(x;\lambda)$

一般に $0\leqq u_{m-2}(x;\lambda)\leqq u_{m-1}(x;\lambda)\leqq \bar{v}(x)$ を仮定する．

$$\begin{cases} Lu_{m-1} = \lambda[f(x,u_{m-2}) + f_u(x,u_{m-2})(u_{m-1}-u_{m-2})] \leqq \lambda f(x,u_{m-1}) \\ Lu_m = \lambda[f(x,u_{m-1}) + f_u(x,u_{m-1})(u_m - u_{m-1})] \end{cases}$$

から，$L(u_m-u_{m-1}) - \lambda f_u(x,u_{m-1})(u_m-u_{m-1})\geqq 0$．

また $L(\bar{v}-u_m)-\lambda f_u(x,u_{m-1})(\bar{v}-u_m)\geqq 0$．

従って $u_{m-1}(x;\lambda)\leqq u_m(x;\lambda)\leqq \bar{v}(x)$．$\{u_m(x;\lambda)\}$ は単調増加で一様有界である．$u(x;\lambda)=\lim_{m\to\infty} u_m(x;\lambda)$ が求める解であることは Theorem 3 と同様に証明される．

一意性は Theorem 1 から直ぐに出る．（証明終）

§3. 準線型問題 (B)

形式上より一般な非線型問題

$$
(\mathrm{B})\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+\sum_{i=1}^{n}b_i(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x,u)u=f(x,u), & x\in\Omega \\ u=\phi(x), & x\in S \end{cases}
$$

を考える. この問題の solvability を Leray-Schauder の不動点定理の special case である次の Schaefer の定理を用いて示す.

Lemma (Schaefer [9]) E を complete な locally convex Hausdorff space, T を E から E への compact mapping とする. そのとき, すべての $\lambda\in[0,1]$ に対して $y=\lambda Ty$ なる $y\in E$ が存在するか, そうでなければ集合 $\{y;\ y=\lambda Ty,\ 0\leqq\lambda\leqq 1\}$ は E において有界でない.

$E=E(\alpha,\Omega)$ は $\overline{\Omega}$ で連続かつ Ω で Hölder 連続 (exponent α) な関数のつくる空間を表わす. E は seminorms

$$q_{\Omega'}(u)=\sup_{\overline{\Omega}'}|u(x)| \quad (\Omega' \text{ は } \overline{\Omega} \text{ の compact subsets})$$

$$q_{K,\alpha}(u)=\sup_{x,x'\in K}\frac{|u(x)-u(x')|}{|x-x'|^{\alpha}} \quad (K \text{ は } \Omega \text{ の compact subsets})$$

によって生成される topology で complete な locally convex topological space になる.

さて, 問題 (B) について次の仮定をおく.

I) $\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geqq\alpha|\xi|^2,\ \alpha>0;\qquad c(x,u)\geqq\gamma>0.$

II) $a_{ij}(x),\ \partial a_{ij}(x)/\partial x_i$ は $\overline{\Omega}$ で有界連続かつ Ω で Hölder 連続

(exponent μ)

III) $b_i(x,u)$, $c(x,u)$, $f(x,u)$ は 有界かつ Hölder 連続 (exponent ν)

IV) Ωは exterior cone property をもち, $\phi(x)$ は S 上で連続.

$v(x)\in E$ に線型問題

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial w}{\partial x_j}\right)+\sum_{i=1}^{n}b_i(x,v)\frac{\partial w}{\partial x_i}+c(x,v)w=f(x,v), & x\in\Omega \\ w=\phi(x), & x\in S \end{cases}$$

の唯一つの有界な解 $w(x)\in C^2(\Omega)\cap C^0(\bar{\Omega})$ を対応させると, E 上で operator T: $w=Tv$ が定義される. このとき

(i) T は E を E の中にうつす.

(ii) T は compact である. これは Schauder の内部評価と, (Theorem 3 の証明の途中で指摘したような) strong barrier function を用いて得られる所の境界 S 附近における解の modulus of continuity の評価とを組み合わせることによって容易に証明される.

(iii) 集合 $U=\{u;\ u=\sigma Tu,\ \sigma\in[0,1]\}$ は E で bounded である.

operator equation $u=\sigma Tu$ は外部 Dirichlet 問題

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+\sum_{i=1}^{n}b_i(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x,u)u=\sigma f(x,u), & x\in\Omega \\ u=\sigma\phi(x), & x\in S \end{cases}$$

のことである.

Theorem 1 により, $\forall u\in U$ に対して

$$|u(x)|\leqq \max\{|\phi|,\ \sup|f|/\gamma\},\quad x\in\cdots$$

が成り立つゆえ，任意の compact $\Omega' \subset \overline{\Omega}$ に対して $\{q_{\Omega'}(u); u \in \mathfrak{U}\}$ は bounded である．次に Theorem 3 の証明の途中で引用した補題を用いると，任意の compact $K \subset \Omega$ に対して $\{q_{K,\alpha}(u); u \in \mathfrak{U}\}$ は bounded であるような $\alpha > 0$ が存在することが分る．従ってこのような $\alpha > 0$ に対して $\mathfrak{U}$ は E において bounded になる．

Schaefer の補題を適用すると，次の定理がえられる．

Theorem 5. 上記の仮定 I)－IV) が満足されるならば，外部 Dirichlet 問題（B）は少くとも一つの有界な解 $u(x) \in C^{2,\eta}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ をもつ． $\eta \leqq \min(\mu, \nu)$

Corollary. $f_1(x,u)$ は有界，$\partial f_2(x,u)/\partial u \leqq 0$ とする．問題（B）の $f(x,u)$ が $f_1(x,u) + f_2(x,u)$ と表わされるとき，問題（B）は少くとも一つの有界な解をもつ．

参考文献

[1] D. S. Cohen, J. Math. Mech. 17 (1967)

[2] Courant-Hilbert, Methods of Mathematical Physics, Vol. II.

[3] T. Kusano, Jap. J. Math. 35 (1965)

[4] T. Kusano, 近刊

[5] O. A. Ladyzhenskaya - N. N. Ural'tseva, Linear and Quasilinear Elliptic Equations, Izd. Nauka, Moscow (1964)

[6] K. Miller, Ann. Mat. Pura Appl. 76 (1967)

[7] J. K. Oddson, Arch. Rat. Mech. Anal. 26 (1967)

[8] A. P. Oskolkov, Trudy Mat. Inst. Steklova 102 (1967)

[9] H. Schaefer, Math. Ann. 129 (1955)

[10] J. Serrin, Acta Math. 111 (1964)

[11] G. Stampacchia, Ann. Inst. Fourier 15 (1965)

[12] N. S. Trudinger, Comm. Pure Appl. Math. 20 (1967)