数理解析研究所講究録
第 59 巻 1968 年 173-189

双曲型方程式に対する E. E. Leviの条件について

京大 理　溝畑　茂
京大 工　大矢　勇次郎

実，単純特性根をもつKowalewski型方程式（狭義の双曲型方程式）に対するCauchy問題の研究は既に数多く知られている（Petrowsky, Leray, Mizohata [8] etc.）が，更に双曲性を影響領域の存在を以て広義に解するならば，重複特性根をもつ場合も含めて考察すべきであることも分る（Ohya [11], Leray-Ohya [5]）。その立場での研究は，2変数の場合先ずE.E. Levi [6] によりなされ，それとは独立にA. Lax [4]，更にそれを多変数へ拡張したYamaguti [12]の仕事を挙げることが出来よう。他方，最近 Kano [2] によって双曲型方程式がL^2の意味で bien posé になる為の必要条件が得られた。斯様な事情の下に，我々は実，重複特性根をもつ Kowalewski型方程式の(C^∞)解が一意的に存在し且有限伝播速度をもつ（Petrowskyの意味で bien posé）為の必要，十分条件を求めること（実は Leviの結果を多変数へ拡張すること）を目的とする（[10]）。

帯状領域 $\Omega = \{(x, t);\ x \in \mathbb{R}^{\ell},\ \ t \in [0, T]\}$ で定義された m 階偏微分作用系

$$P(x, t;\ \frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial t}) = \frac{\partial^m}{\partial t^m} + \sum_{\substack{|\nu|+j \leq m \\ j < m}} a_{\nu j}(x, t;\ \frac{\partial}{\partial x})\frac{\partial^j}{\partial t^j}$$

但し $a_{\nu j}(x, t; \frac{\partial}{\partial x})$ は x に関して $(m-j)$ 階微分多項式に対して Cauchy問題

$$(1)\quad \begin{cases} P\,u(x, t) = f(x, t) \\ \quad 初期値\ (t = t_0) \qquad\qquad 0 \leq t_0 \leq T \end{cases}$$

を考える。$D = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}$, $D_t = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}$ として P の主要部を

$$(2)\quad P_m(x, t;\ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}) = i^m\{D_t^m + h_1(x, t;\ D)D_t^{m-1} + \cdots$$
$$\cdots + h_{m-1}(x, t;\ D)D_t + h_m(x, t; D)\}$$

と書く時

特性根は高々２重で、その重複度は $(x, t; \xi)$ に関して不変（一定）である；即ち

$$(3)\quad \tau^m + h_1(x, t; \xi)\tau^{m-1} + \cdots + h_m(x, t; \xi)$$
$$= \prod_{i=1}^{s}(\tau - \lambda_i(x, t; \xi))^2 \prod_{j=s+1}^{m-s}(\tau - \lambda_j(x, t; \xi))$$

に於て $\lambda_i(x, t; \xi)$　$1 \leq i \leq m-s$　は実で相異なる　　とする

ξ に関して１次同次函数 $\lambda_i(x, t; \xi)$ に対して op. p.d. (= opérateur pseudo-differentiel) を

$$\lambda_i(x, t;\ D)f(x) = (2\pi)^{-\ell}\int e^{ix\xi}\lambda_i(x, t; \xi)\hat{f}(\xi)d\xi$$

で定義し　$D_t - \lambda_i(x, t;\ D) = \partial_i$ として

(4) $\Pi_m(x,t;D,D_t)=(\partial_{m-s}\cdots\partial_s\cdots\partial_1)(\partial_s\cdots\partial_1)$

を考えれば $P_m-\Pi_m$ は高々 $(m-1)$ 階の op. p. d. である。

(5) $i^m\{P_m-\Pi_m\}+i^{m-1}P_{m-1}=i^{m-1}C_{m-1}(x,t;D,D_t)$

とまとめて、これを底：1, ∂_1, $\partial_2\partial_1$, $\dots$, $\partial_s\partial_{s-1}\cdots\partial_1$, $\partial_1\partial_s\cdots\partial_1$, $\dots\dots$, $\partial_{m-s-1}\cdots\partial_s\cdots\partial_1\partial_s\cdots\partial_1$ を用いて表わそう：即ち

(6) $$C_{m-1}(x,t;D,D_t)=c_{m-1}(x,t;D)+c_{m-2}(x,t;D)\partial_1$$
$$+\cdots+c_{m-s}(x,t;D)\partial_{s-1}\cdots\partial_1+c_{m-s-1}(x,t;D)\partial_s\cdots\partial_1$$
$$+\cdots+c_0(x,t;D)\partial_{m-s-1}\cdots\partial_s\cdots\partial_1\partial_s\cdots\partial_1$$
$$+Q_{m-2}(x,t;D,D_t)$$

但し $c_{m-i}(x,t;\xi)$ は ξ につき $(m-i)$ 次同次，Q_{m-2} は (D,D_t) につき高々 $(m-2)$ 階の op. p. d. とする。

<u>条件A</u>　<u>$c_{m-i}(x,t;\xi)\equiv 0\quad(1\leq i\leq s)\quad\forall(x,t;\xi)\in\Omega\times\mathbb{R}^l$</u>

ここで $c_{m-i}(x,t;D)$ は次の様に一意的に定まる。

実際，例えば C_{m-1} の *symbole principal* を $\sigma_{m-1}(C_{m-1})$ として

(7) $$c_{m-1}(x,t;\xi)=\sigma_{m-1}(C_{m-1})\Big|_{\tau=\lambda_1(x,t;\xi)}$$

が分る。そこで，

$$\Pi_m^{(1)}(x,t;D,D_t)=(\partial_{m-s}\cdots\partial_s\cdots\partial_2)(\partial_s\cdots\partial_2)\partial_1^2$$

と書くと

$$\Pi_m-\Pi_m^{(1)}=(\partial_{m-s}\cdots\partial_2)(\partial_1\partial_s\cdots\partial_2-\partial_s\cdots\partial_2\partial_1)\partial_1$$

だから $\sigma_{m-1}(\Pi_m - \Pi_m^{(1)})$ は $(\tau-\lambda_1)$ で割切れる。従って $(\tau-\lambda_1)$ を mod. として

(8) $\sigma_{m-1}(C_{m-1}(x, t; D, D_t))$

$$\equiv i\sigma_{m-1}(P_m - \Pi_m^{(1)}) + P_{m-1}(x, t; \xi, \tau)$$

更に

$$\Pi_{m-1}^{(1)} = (\partial_{m-s} \circ \cdots \circ \partial_s \circ \cdots \circ \partial_2) \circ (\partial_s \circ \cdots \circ \partial_2 \circ \partial_1)$$

とおくと 同じ理由から

(9) $\sigma_{m-1}(P_m - \Pi_m^{(1)})$

$$\equiv \sigma_{m-1}(\Pi_{m-1}^{(1)} \circ \partial_1 - \Pi_{m-1}^{(1)} \partial_1) \; (\mathrm{mod.}\ (\tau - \lambda_1))$$

所で Matsumura [7] により

$$(9)\text{の右辺} = i^{-1}\left(\frac{\partial \Pi_{m-1}^{(1)}}{\partial \tau}\frac{\partial \lambda_1}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{\ell}\frac{\partial \Pi_{m-1}^{(1)}}{\partial \xi_\alpha}\frac{\partial \lambda_1}{\partial x_\alpha}\right)$$

他方 $P_m(x, t; \xi, \tau) = (\tau-\lambda_1)^2 \Pi(\tau-\lambda_j)$ を用いると容易に

$$\left.\frac{\partial \Pi_{m-1}^{(1)}}{\partial \tau}\right|_{\tau=\lambda 1} = \frac{1}{2}\left.\frac{\partial P_m'}{\partial \tau}\right|_{\tau=\lambda 1}, \quad \left.\frac{\partial \Pi_{m-1}^{(1)}}{\partial \xi_\alpha}\right|_{\tau=\lambda 1} = \frac{1}{2}\left.\frac{\partial P_m'}{\partial \xi_\alpha}\right|_{\tau=\lambda 1}$$

但し $P_m' = \dfrac{\partial P_m}{\partial \tau}$ が分って

(10) $\sigma_{m-1}(C_{m-1}(x, t; D, D_t))\Big|_{\tau=\lambda 1}$

$$= P_{m-1}(x, t; \xi, \lambda_1) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial P_m'}{\partial \tau}\frac{\partial \lambda_1}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{\ell}\frac{\partial P_m'}{\partial \xi_\alpha}\frac{\partial \lambda_1}{\partial x_\alpha}\right]_{\tau=\lambda 1}$$

一般に

$$(11)\quad L_j(x,t;\xi)=\left[P_{m-1}(x,t;\xi,\tau)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial P'_m}{\partial\tau}\frac{\partial\lambda_j}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{\ell}\frac{\partial P'_m}{\partial\xi_\alpha}\frac{\partial\lambda_j}{\partial x_\alpha}\right)\right]_{\tau=\lambda_j}$$

$$(1\leq j\leq S)$$

と定義すると

$$\sigma_{m-1}(C_{m-1})\Big|_{\tau=\lambda_j}=L_j(x,t;\xi)$$

$$=C_{m-1}+C_{m-2}(\lambda_j-\lambda_1)+\cdots\cdots+C_{m-j}(\lambda_j-\lambda_{j-1})\cdots(\lambda_j-\lambda_1)$$

を示し得て次の２条件は同値となる。

(I)　$(P_m,\ P_{m-1})$ が条件Aを満たす。

(II)　$L_j(x,t;\xi)\equiv 0\quad(1\leq j\leq S)\quad\forall(x,t;\xi)\in\Omega\times\mathbb{R}^\ell$

定理1.（十分性）

(I) が成り立てば (1) は uniformément bien posé である。

定理2.（必要性）

(1) が uniformément bien posé ならば (II) が成り立つ。

定理3.（影響領域の存在）

条件Aの下に (1) の解の support は各 t に対して

$$\left\{x;\ \bigcup_{\xi}|x-\xi|\leq\lambda_{max}(t-t_0)\quad t\geq t_0\right\}$$

但し　$\xi\in\bigcup_{j=1}^{m}\text{supp.}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{j-1}u(x,t_0)\right]$

$$\lambda_{max}=\sup_{\substack{1\leq i\leq m-S\\(x,t)\in\Omega,\ |\xi|=1}}|\lambda_i(x,t;\xi)|$$

に含まれる。

§1 十分性

(1) は (5) により

(1.1) $\left[i^m \Pi_m + i^{m-1} C_{m-1}\right] u + R_{m-2}\, u = f$

但し R_{m-2} は op. p. d. (高々 $(m-2)$ 階) である。先ず

(1.2) $\left[\Pi_m - i C_{m-1}\right] u = i^{-m} f$ を考えよう.

(1.3) $U = {}^t(u_0, u_1, \cdots, u_{m-1})$

$\equiv {}^t(u, \partial_1 u, \partial_2\partial_1 u, \cdots, \partial_{m-s-1} \cdots \partial_1 u)$

とおくと (I) が成立していることを考慮して

(1.4) $D_t U = H(x, t; D)\, U + F$

$$H(x,t;\xi) = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_s \end{matrix} & \begin{matrix} & & \\ 1 & & \end{matrix} \\ \hline 0 & \begin{matrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_2 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ iC_{m-s-1} & \cdots & & iC_0 + \lambda_{m-s} \end{matrix} \end{array}\right]$$

但し $\lambda_i = \lambda_i(x, t; \xi)$: ξ につき 1 次同次

$C_{m-i} = C_{m-i}(x, t; \xi)$: ξ につき $(m-i)$ 次同次

$F = {}^t(0, \cdots, 0, i^{-m} f)$

更に $V = {}^t((\Lambda+1)^{m-2} u_0, \cdots, (\Lambda+1)^{m-s-1} u_{s-1}, (\Lambda+1)^{m-s-1} u_s, \cdots$

$\cdots, u_{m-1})$ とおくと

(1.5) $D_t V = H_0(x, t; D)\Lambda V + B(x, t; D)\, V + F$

$$H_0(x,t;\xi) = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda_1 & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & \lambda_s \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} \lambda_1 & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & \lambda_{m-s} \end{matrix} \end{array}\right]$$

但し　$\lambda_i = \lambda_i(x, t; \xi/|\xi|)$

　　　B は $(L^2(\mathbb{R}^\ell))^m$ の有界作用素

即ち $H_0(x, t; D)\Lambda$ は2つの正規双曲型行列の直和になる。

従って $V(x, t_0) \in \mathcal{D}^k_{L^2}$, $F(x, t) \in \mathcal{E}^0_t(\mathcal{D}^k_{L^2})$ に対して $\mathcal{E}^0_t(\mathcal{D}^k_{L^2}) \cap \mathcal{E}^1_t(\mathcal{D}^{k-1}_{L^2})$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ で (1.5) の一意的解が存在し

$$(1.6)\quad \|V(t)\|_k \le C(T)\left[\|V(t_0)\|_k + \int_{t_0}^t \|F(s)\|_k ds\right]$$

を満たす

特に $k = 1$ ととると

$$(u_0, u_1, \ldots, u_{s-1}, u_s, \ldots, u_{m-1})$$
$$\in \mathcal{E}^0_t(\mathcal{D}^{m-1}_{L^2} \times \cdots \times \mathcal{D}^{m-s}_{L^2} \times \mathcal{D}^{m-s}_{L^2} \times \cdots \times \mathcal{D}^1_{L^2})$$

且 $\in \mathcal{E}^1_t(\mathcal{D}^{m-2}_{L^2} \times \cdots \times \mathcal{D}^{m-s-1}_{L^2} \times \mathcal{D}^{m-s-1}_{L^2} \times \cdots \times L^2)$

だから　勿論

$$\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}}\right) \in \mathcal{E}^0_t(\mathcal{D}^{m-1}_{L^2} \times \cdots \times L^2)$$

が分る．

$$(1.7)\quad |||u(x, t)|||^2 = \sum_{j=1}^m \left\|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{j-1} u(x, t)\right\|^2_{m-j}$$

と定義すれば (1.6) から

$$(1.8)\quad |||u(x, t)||| \le \hat{C}(T)\left[|||(\Lambda+1)u(x, t_0)||| + \int_{t_0}^t \|f(x, s)\|_1 ds\right]$$

が成立する。以下

(1.9) $\|R_{m-2}\, u(x,t)\|_1 \leq C' \;|||\, u(x,t)\, |||$

を用いて逐次近似によればよい。

§2 影響領域

space-like な変数変換

(2.1) $t' = \varphi(x, t),\ x'_\alpha = x_\alpha \quad (1 \leq \alpha \leq \ell)$

を行うと

(2.2) $\dfrac{\partial}{\partial t} = \varphi_t \dfrac{\partial}{\partial t'},\ \dfrac{\partial}{\partial x_\alpha} = \varphi_{x_\alpha} \dfrac{\partial}{\partial t'} + \dfrac{\partial}{\partial x'_\alpha}$ だから

(ξ, τ) は $(\varphi_x \tau' + \xi', \varphi_t \tau')$ に移ると云ってよい。

([1], [3])

補題 2.1

変換 (2.1) により ∂_i は

(2.3) $[\varphi_t - \lambda_i(x, t; \varphi_x)]\, \psi_i(x, t; D, D_t)(D_t - \mu_i(x, t; D))$

$\quad + e_i(x, t; D, D_t)$

但し $\psi_i(x, t; \xi, \tau)$ は (ξ, τ) につき 0 次同次

且 $\prod_{i=1}^{m} \psi_i(x, t; \xi, \tau) \equiv 1 \quad \in C^\infty(\mathbb{R}^\ell_\xi - \{0\})$

又 $e_i(x, t; D, D_t)$ は 0 階の op. p. d. に移る。

この補題は条件 A が変数変換 (2.1) によって保存されることを意味する: 実際 $\tilde{P}$ (= P を (2.1) で変換したもの) の m 次, (m−1) 次の symboles は夫々

$\prod_{i=1}^{s} \{(\varphi_t - \lambda_i(x, t; \varphi_x))(\tau - \mu_i)\}^2 \prod_{j=s+1}^{m-s} (\varphi_t - \lambda_j(x, t; \varphi_x))(\tau - \mu_j)$

及び

$$\sum_{i=1}^{m} e_i(x,t;\xi,\tau)\frac{\tilde{P}_m}{\psi_i(\varphi_t-\lambda_i)(\tau-\mu_i)}$$

$$+\sum_{i=0}^{m-s-1}\tilde{C}_{m-s-1-i}\prod_{j=1}^{i}\psi_j(\varphi_t-\lambda_j)(\tau-\mu_j)\prod_{i=1}^{s}\psi_i(\varphi_t-\lambda_i)(\tau-\mu_i)$$

が分って夫々因子として $\prod_{j=1}^{s}(\tau-\mu_j)^2$ 及び $\prod_{j=1}^{s}(\tau-\mu_j)$ を含むから…

故に定理1は(2.1)で変換されたCauchy問題に適用され従って局所的な一意性定理が証明されて，結局，定理3を得る。

§3. 必要性

話を簡単にする為に $P_{m-1}(x,t;\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t})$ は実係数と仮定する。(1)が(E)で *bien posé* であって，$L_j(x,t;\xi)$ $(1\leq j\leq s)$ の少なくとも1つが恒等的に零でない，とするとMizohata [9]の方法によって矛盾が生ずることを示せばよい。

先ず $L_j(0,0;\xi)$ の内，少なくとも1つが恒等的に零でないとすれば，(x_0,t_0) 及びその適当な近傍 V があって次の何れかが起こる。

(i) ある ξ_0 $(|\xi_0|=1)$ が存在して $L_i(x_0,t_0;\xi_0)\neq 0$

(ii) $L_i(x,t;\xi)=0$ $\quad\forall(x,t)\in V\quad\forall\xi\in\mathbb{R}^l$

所が実は(ii)が起こらない場合のみを考えれば十分であることが分る。即ち

(3.1) $|L_j(x,t;\xi)| \geq \delta > 0 \quad {}^\forall(x,t) \in V$ (原点の近傍) ${}^\forall\xi \in W$ (単位球面上ξ_0の近傍)

と仮定してよい。2つの局所化を行う。先ず $\beta(x) \in \mathcal{D}_V$ ($\beta(0) \neq 0$) を $Pu=0$ に作用させて

(3.2) $P(\beta u) - \sum_{|\sigma|\geq 1} P^{(\sigma)}(\beta^{(\sigma)}u) = 0$

但し $P^{(\sigma)} = i^m\left(\frac{\partial}{\partial\xi}, \frac{\partial}{\partial\tau}\right)^\sigma P(x,t;\xi,\tau)$

ここでVの外部ではPの係数を修正してよいことに注意しよう。

次に $\hat{\alpha}(\xi) \in \mathcal{D}_W$ $(0 \leq \hat{\alpha}(\xi) \leq 1)$ 且 $\hat{\alpha}(\xi) \equiv 1$ (ξ_0の近傍)を用いて $\hat{\alpha}_n(\xi) = \hat{\alpha}(\xi/n)$ と定め、作用素 $\alpha_n(D)$ を $\mathcal{F}(\alpha_n(D)f) = \hat{\alpha}_n(\xi)\hat{f}(\xi)$ で定義する。

$\alpha_n(D)$ を (3.2)に左から作用させて

$$P[\alpha_n\beta u] = -[\alpha_n, P][\beta u] + \sum_{|\sigma|\geq 1}\left([\alpha_n, P^{(\sigma)}][\beta^{(\sigma)}u] + P^{(\sigma)}[\alpha_n\beta^{(\sigma)}u]\right)$$

を得るが、これを

(3.3) $P[\alpha_n\beta u] = \sum_{\substack{1\leq|\rho+\sigma|\leq k \\ |\rho|\leq k}} Q_{\rho\sigma}[\alpha_n^{(\rho)}\beta^{(\sigma)}u] + R_k^{(n)}[u]$

と整理すると

$$(3.4)\qquad \| R_k^{(n)}[u] \| \le \frac{Const.}{n^{k-l}} ||| u(x,t) |||$$

が成立する。

上記2局所化によって以下では $(x,t;\xi)\in V\times W$ のみで成立する op.p.d. の性質が，$(x,t;\xi)\in\Omega\times S$（単位球面）で維持されると解してよい。

さて (3.3)に応じて

$P[\alpha_n(D)u]=f$ を考えよう。(5)より

$$(3.5)\qquad [\Pi_m - i C_{m-1}][\alpha_n(D)u] + i^{-m}R_{m-2}[\alpha_n(D)u] = i^{-m}f$$

更に系で書けば

$$(3.6)\qquad D_t U_n = H(x,t;D)U_n + BU_n + F$$

$$H(x,t;D)=\left[\begin{array}{ccc|ccc} \lambda_1\Lambda & & & & & \\ & \ddots & \Lambda & & & \\ & & \lambda_s & \Lambda & & \\ \hline & & & \lambda_1\Lambda & & \\ & & & & \ddots & \Lambda \\ iC_{m-1} & \cdots & iC_{m-s} & 0 & \cdots 0 & \lambda_{m-s} \end{array}\right]$$

但し　1) $U_n = {}^t\left((\Lambda+1)^{m-1}[\alpha_n u], (\Lambda+1)^{m-2}\partial_1[\alpha_n u], \dots\right.$

$\left.\dots, \partial_{m-s-1}\cdots\partial_s\cdots\partial_1\partial_s\cdots\partial_1[\alpha_n u]\right)$

2) $\lambda_i=\lambda_i(x,t;D)$

$\sigma(C_{m-j}(x,t;D)) = C_{m-j}(x,t;\xi/|\xi|)$

3) $$B=\begin{bmatrix} * & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & * & 1 \\ b_1 & \cdots b_s & b_{s+1} \cdots & b_m \end{bmatrix}$$

$*$: 0階
$b_1,\dots,b_s$: (-1)階
$b_{s+1},\dots,b_m$: 0階
の op.p.d.

(4) $F = {}^t(0, \cdots, 0, i^{-m} f)$

従って (3.6) の特性根 (即ち (3.1) より起こる摂動根) は

$$\det(\lambda I - H(x,t;\xi)) = \prod_{i=1}^{s} (\lambda - \lambda_i)^2 \prod_{j=s+1}^{m-s} (\lambda - \lambda_j)$$

$$-i\{C_{m-1} + C_{m-2}(\lambda - \lambda_1) + \cdots + C_{m-s}(\lambda - \lambda_{s-1}) \cdots (\lambda - \lambda_1)\}$$

$$= 0$$

故に

$$\lambda_j^{\pm}(x,t;\xi) = \lambda_j(x,t;\xi) \pm \left[iL_j(x,t;\xi) \Big/ \prod_{k \neq j} (\lambda_j - \lambda_k)^2 \prod (\lambda_j - \lambda_i) \right]^{1/2}$$

$$+ \cdots$$

但し

(3.7) $-I_m \lambda_j^{+}(x,t;\xi) \geqq \delta' |\xi|^{1/2}$ $(\delta' > 0)$

$-I_m \lambda_j^{-}(x,t;\xi) \leqq -\delta' |\xi|^{1/2}$ と指定しよう。

これを用いて $H(x,t;\xi)$ の正規化行列 $N(x,t;\xi)$ を作る:

(3.8) $N(x,t;\xi) H(x,t;\xi) = D_1(x,t;\xi) N(x,t;\xi)$

但し

$$D_1(x,t;\xi) = \begin{bmatrix} \lambda_1^+ & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_s^+ & & & \\ & & & \lambda_1^- & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_s^- \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

$N(x,t;D)$ を (3.6) に作用させ

(3.9) $NU_n = {}^t(w_1^{(n)}, \cdots, w_s^{(n)}, w_{s+1}^{(n)}, \cdots, w_m^{(n)})$

(3.10) $$S(t; NU_n) = m\sum_{i=1}^{s} \| e^{-\varepsilon\sqrt{\Lambda}t} w_i^{(n)} \|^2 - \sum_{j=s+1}^{m} \| e^{-\varepsilon\sqrt{\Lambda}t} w_j^{(n)} \|^2$$

但し $\mathcal{F}(e^{-\varepsilon\sqrt{\Lambda}t}f) = e^{-\varepsilon\sqrt{|\xi|}t}\hat{f}(\xi)$, $\varepsilon < \delta'/3$

更に

$$(3.11)\quad U_{n,\rho} = {}^t(\,(\Lambda+1)^{m-1}[\alpha_n^{(\rho)}u],\ (\Lambda+1)^{m-2}\partial_1[\alpha_n^{(\rho)}u],\ \cdots$$
$$\cdots,\ \partial_{m-s-1}\cdots\partial_s\cdots\partial_1\partial_s\cdots\partial_1[\alpha_n^{(\rho)}u]\,)$$

とおくと

<u>命題 3.1</u>

$$\frac{d}{dt}S(t;NU_n) \geqq \delta''\sqrt{n}\,\|e^{-\varepsilon\sqrt{\Lambda}t}NU_n\|^2 - C_1\sqrt{n}\sum_{1\leq|\rho|\leq k}\|e^{-\varepsilon\sqrt{\Lambda}t}U_{n,\rho}\|^2$$
$$-\frac{C_2}{\sqrt{n}}\|e^{-\varepsilon\sqrt{\Lambda}t}f\|^2 - \frac{C_3}{n^{2(k-\ell)}}|||u|||^2$$

(3.3) にもどって

$$(3.12)\quad \|e^{-\varepsilon\sqrt{\Lambda}t}Q_{\rho\sigma}[\alpha_n^{(\rho)}\beta^{(\sigma)}u]\|^2$$
$$\leqq Cn\sum_{|\rho+\rho'|\leq k} n^{|\rho'|}\|e^{-\varepsilon\sqrt{\Lambda}t}NU_{n,\rho+\rho'\sigma}\|^2 + \frac{C'}{n^{2(k-\ell-2)}}|||u|||^2$$

但し $U_{n,\rho\sigma} = {}^t(\,(\Lambda+1)^{m-1}[\alpha_n^{(\rho)}\beta^{(\sigma)}u],\ (\Lambda+1)^{m-2}\partial_1[\alpha_n^{(\rho)}\beta^{(\sigma)}u],$

$$\cdots,\ \partial_{m-s-1}\cdots\partial_s\cdots\partial_1\partial_s\cdots\partial_1[\alpha_n^{(\rho)}\beta^{(\sigma)}u]\,)$$

を証明しておけば

<u>命題 3.2</u>

$$\frac{d}{dt}S(t;NU_n) \geqq \delta''\sqrt{n}\,\|e^{-\varepsilon\sqrt{\Lambda}t}NU_n\|^2$$
$$-C_1\sqrt{n}\sum_{\substack{1\leq|\rho+\sigma|\\ |\rho|\leq k,\,|\sigma|\leq m}} n^{|\rho|-|\sigma|}\|e^{-\varepsilon\sqrt{\Lambda}t}NU_{n,\rho\sigma}\|^2 - \frac{C_2}{n^{2(k-\ell-2)}}|||u|||^2$$

(3.3)に於て $\alpha_n \beta u$ の代りに $\alpha_n^{(\rho)}\beta^{(\sigma)}u$ とした方程式

$$P[\alpha_n^{(\rho)}\beta^{(\sigma)}u] = \sum_{\substack{1\le|\rho'+\sigma'|\le k\\ |\sigma'|\le m}} Q_{\rho'\sigma'}[\alpha_n^{(\rho+\rho')}\beta^{(\sigma+\sigma')}u] + R^{(n)}_{k,\rho\sigma}[u]$$

に命題 3.2 を用いれば

<u>命題 3.3</u>

$$\frac{d}{dt}S(t;\Theta_n(\rho,\sigma)u) \geqq \delta''\sqrt{n}\,\|\Theta_n(\rho,\sigma)u\|^2 - c_1\sqrt{n}\sum_{\substack{\rho\le\rho',\,\sigma\le\sigma'\\ |\rho+\sigma|+1\le|\rho'+\sigma'|\le k}} \|\Theta_n(\rho',\sigma')u\|^2 - \frac{c_2}{n^{k-2l-4}}|||u|||^2$$

但し

$$\Theta_n(\rho,\sigma)u = \sqrt{n}^{\,|\rho|-|\sigma|}e^{-\varepsilon\sqrt{n}t}NU_{n,\rho\sigma}$$ を得る。

再び $$S_n(t;u(x,t)) = \sum_{0\le|\rho+\sigma|\le k} M^{|\rho+\sigma|}S(t;\Theta_n(\rho,\sigma)u)$$

M: 十分大

とおくと

<u>命題 3.4</u>

$$(3.13)\quad \frac{d}{dt}S_n(t;u(x,t)) \geqq \delta''\sqrt{n}\,S_n(t;u(x,t)) - \frac{c}{n^{k-2l-4}}|||u|||^2$$

が成り立つ。

さて (1) が (E) で *bien posé* と仮定しよう：

即ち Cauchy問題 $$\begin{cases} Pu_n = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^i u_n(x,0) = 0 & 0\le i\le m-2 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m-1} u_n(x,0) = e^{inx\xi_0}\,\psi(x) \end{cases}$$

但し $\hat{\varphi}(\xi)$：連続（$\neq 0$），　$supp.[\hat{\varphi}(\xi)] \subset \xi_0$ の近傍

且 $supp.[\hat{\varphi}]$ 上で $\hat{\alpha}(\xi) \equiv 1$ として $\varphi(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{\varphi}(\xi)]$

に対して

(＊)　$|||u_n(x,t)||| \leqq C\,|||u_n(x,0)|||_p \leqq C' n^p$

なる定数 c，p が存在したとする

(3.13) に於て $u(x,t) = u_n(x,t)$ とおき $k = 2l+5+2p$

ととれば

$$\frac{d}{dt} S_n(t; u_n(x,t)) \geqq \delta''' \sqrt{n}\, S_n(t; u_n(x,t)) - O\left(\frac{1}{n}\right)$$

が成り立ち，勿論 $S_n(0; u_n(x,0)) \geqq c > 0$ $(n > N)$ だから

(＊＊)　$S_n(t; u_n(x,t)) \geqq \frac{c}{2} \exp(\delta''' \sqrt{n}\, t)$

以下 (＊) (＊＊) は両立し得ないことより定理 2 は従う。

参考文献

[1]　L. Hörmander :　Pseudo-differential operators, Comm. Pure Appl. Math. 1965

[2]　T. Kano :　On the Cauchy problem for equations with multiple characteristics, J. Math. Soc. Japan（近刊）

[3]　J. J. Kohn and L. Nirenberg :　An algebra of pseudo-differential operators, Comm. Pure Appl. Math. 1965

[4] A. Lax : On Cauchy's problem for hyperbolic partial differential equations with multiple characteristics, Comm. Pure. Appl. Math. 1956

[5] J. Leray et Y. Ohya : Equations et systèmes non linéaires, hyperboliques non stricts, Math. Ann. 1967

[6] E. E. Levi : Caratteristiche multiple e problema di Cauchy, Ann. Math. 1909

[7] M. Matsumura : Existence locale de solutions pour quelques systèmes d'équations aux dérivées partielles, Jap. J. Math. 1962

[8] S. Mizohata : Lectures on the Cauchy problem, Institut de Tata, 1962

[9] S. Mizohata : Some remarks on the Cauchy problem, J. Math. Kyoto, Japan, 1961

[10] S. Mizohata et Y. Ohya : Sur la condition de E. E. Levi concernant des équations hyperboliques, Pbl. R. I. M. S. (近刊)

[11] Y. Ohya : Le problème de Cauchy pour les équations hyperboliques à caractéristique multiple, J. Math. Soc. Japan, 1964

[12] M. Yamaguti : Le problème de Cauchy et les opérateurs d'intégrale singulière, Mem. Coll. Sc. Kyoto, Japan, 1959