

因子分析における 問題点

東京理科大 津村善郎

§ 1. はしがき

因子分析で普通に用いられるモデル

$$x = \Lambda f + z \quad (1)$$

を考える, ただし test battery x は p 次の, common factor f は m ($< p$) 次のベクトルとし, f , z は独立,

$$\Sigma \equiv E(x x') \quad (E(z) = 0)$$

$$\Psi \equiv E(z z') \dots \text{diagonal}.$$

因子分析は(特= *exploratory*)相関行列(または共分散行列)から因子数 m , Ψ および loading Λ を推定することである. この方法として, セントロイド法, 最尤法, principal F.A., alpha F.A. などがある. 最後の3つの方法はよく似ており, 最尤法で述べることが多くは成立すると考えられる. そこで理論的考察が比較的多くされている最尤法に限定しよう(セントロイドについては麻生氏の項参照). *exploratory* F.A. は論理的には次の点よりなる.

(1) 因子数 m と *unic variance* Ψ の推定 --- これは幾

(1)

何学的には因子空間の決定である。

(2) 実態的に意味のある形で人の推定——幾何学的には因子空間内で座標軸の決定 = 座標軸の回転。

(2) は論理的には問題ないので(1)に限定して論ずる。座標軸はどのようにとっても空間そのものには変りないから、

$$E(\xi\xi') = I$$

と假定してよい。

因子分析はよく知られているように実験心理学における方法論として発達し多くの分野に広がっているが、心理学者の中から、しかも因子分析の創始者たち Thurston などの直系の弟子 Guttman [3], Guilford [X] などから批判の声が上っている。これは心理学の発達につれ、人間の *abilities* は多数の因子よりなることが知られてきたこと、因子分析の結果が互に矛盾することが多いことなどによるのである。

因子分析で扱う関数は非常に複雑で数学的に追求できない場合が多い。そこで、モデルの明確な場合にシミュレーションでやらねばならぬ。方法としては Lawley [X], Lawley-Jöreskog [4] の方法による。

§ 2 Uniqueness について

これは最も基本的なもので、uniqueness の保証なしには何

(2)

を計算しているのかわからない。uniqueness について 2 種のものがある。(i) 代数的 (sampling および解法を考へず) なものと (ii) 解法における iteration の収束の一貫性としてである。前者については, Albert の結果を改善した Anderson-Rubin [1] の定理と Tamura-Fukutomi [7] の定理がある。Anderson-Rubin の保証する uniqueness を 弱い意味の, Tamura-Fukutomi の保証するものを 強い意味の uniqueness とよぼう。後者については, これまで全く論じられていない。

uniqueness については福富氏の項をみられたい。次節から述べる各種の問題は uniqueness との関連が深いので, その理解の上で読んで頂きたい。

§ 3 Factor invariance について

同一のデータで test の数を増減して因子抽出を行ったり, 各様の実験を繰返したとき, 著しく違った因子がえられることがある。これでは因子分析を信用し難いので, その原因を明らかにする必要がある。factor invariance には次の各種のものが考えられる。

(a) test の数を増減する場合

$$\text{モデル (1) で } \underline{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{12}' & \Sigma_{22} \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow p_1 \\ \downarrow p_2 \end{matrix}$$

(3)

に分割しよう。いま Σ と Σ_{11} より因子抽出を行い, (m, Λ, Ψ) , (m^*, Λ^*, Ψ^*) とする。

もし Σ , Σ_{11} とともに *uniqueness* の条件を満足しているならば $m \geq m^*$ であり,

$$\Lambda_1 T = (\Lambda^*, \Lambda^{**}) \quad (2)$$

となる直交行列 T が存在する, すなわち

$$\text{diag } \Psi_{11} \geq \text{diag } \Psi^* \quad (3)$$

でなければならぬ。(2) の場合に, *factor invariant* であるといい, しかるがれば *invariant* でないといふ。

上記のことは *uniqueness* の実験 (福富氏参照) より明らかであろうが, 実験してきている (畧す)。しかし, *uniqueness* のなりたため場合, 特に因子数が多い場合は崩れてくる。

次の実験は $p=20$, $m=8$ の *factor loading* を与えて Σ を作り, この最初の $p=6, 8, 10, 12, \dots$ に対応する行列 Σ_{11} から, $m=2, 3, 4, 5, \dots$ で因子抽出を行った場合の *communalities* を掲げてある。

test	1	2	3	4	5	6	7	8	---
$p=6, m=2$.51717	.51685	.26839	<u>.70524</u>	.64606	.06193			
$p=8, m=3$.58851	.55245	.29290	.59356	<u>.68850</u>	<u>.46728</u>	.24319	<u>.57780</u>	
$p=10, m=4$.88731	.69728	.63037	.66150	.48308	.12006	.43899	.54828	---

~~~~ のある部分は (3) に反し, 明らかに *factor invariant* が

なりたないことを示している。

### (b) 抽出する因子数について

因子分析では、因子数  $m=k$  で因子を抽出して有意性検定を行い、有意でなければ止め、有意の場合には  $m=k+1$  として全様のことを繰り返す。この場合に後述のように有意性検定の役割についても疑問があるし、有意水準を5%にするか10%にするかも問題である。これに対し Tukey [1] は、有意でなくなつてからなお若干個増加すればとっている。これに対して今まで経験上反論がある。第1は、抽出する因子数を変えれば結果が相当に変わるのが普通である。第2に、極端な場合  $m=k$  で抽出して有意でなかったのに、 $m=k+1$  で抽出すると有意であるという矛盾した結果がえられることがある（特に *initial* のとり方により）。

これらの事実が起るのは殆んど *uniqueness* の成立しないときである。強い意味の *uniqueness* のなりたっている場合には、標本においても殆んどの場合に、真の因子数がえられた後、因子数を1, 2増加して抽出しても、*specific* に近い因子がえられるだけである。

### (c) 多数の標本について

Bechtoldt [2] は Thurston-Thurston のデータをランダムに2分し、標本1, 2を作り、別個に解析した。両者の平

均値および共分散行列の有意性検定を行ったが、当然のこととして有意ではなかった。しかるに因子抽出を行った結果では下表のように著しく異っていた(ただし下表の数字は Becktoldt の計算したものでなく, Mattsson et al. [ ] の結果を掲げてある。

| test no. | 1           | 2           | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | --- |
|----------|-------------|-------------|------|------|------|------|------|------|------|-----|
| 標本 1.    | .674        | <u>.005</u> | .170 | .135 | .228 | .385 | .316 | .567 | .365 | --- |
| 標本 2.    | <u>.005</u> | .697        | .178 | .160 | .256 | .262 | .358 | .499 | .412 | --- |

すなわち、共に improper を解であるが、標本1では才2 test が、標本2では才1 test が communality 1 となっている。ランダムに2分割した2組の標本がこのように異なる結果を示すのでは全く解釈に苦しむ。

このようなことは実際に再々起っている。あるいは全標の測定を繰返したとき、似合った test を行ったときなどである。

ところが、これも収束の uniqueness と関連のあることがわかる。上記は Jöreskog-Lawley の法により Jöreskog の initial で行ったものである。しかるに、上記標本2の結果に近い initial を与えて、標本1で抽出すれば、下記のように標本2の結果に近い結果がえられる

| test no. | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | --- |
|----------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-----|
| 標本 1     | .005 | .746 | .160 | .131 | .230 | .380 | .330 | .561 | .370 | --- |

福富氏の所で述べられたように、このように *aper*,  
*non unic* な解がえられるのは、*structure* も *unic* でな  
く、したがって因子分析に向かない場合である。

#### §4 有意性検定について

因子数  $m$  と *unic variance*  $\Psi$  を同時に推定することはでき  
ないので、 $m=k$  と仮定して  $\Psi$  (および  $\Lambda$ ) を推定し、有意  
性検定により仮説  $m=k$  を認めるか  $m>k$  とするかを決定し  
ようとするものである。すなわち、因子分析(特に最尤法)  
はいわゆる *minimal rank* の思想と仮説検定の機械的適用  
とよりなっている。*minimal rank* の概念で正しく結果が  
えられるのは、真の構造が *uniqueness* の条件を満足している  
ときであることを知った。しかも心理学の発達は人間の *abilities*  
は多くの因子よりなり、したがってこの条件を一般に満足し  
ていないことを示している。それでは仮説検定の因子分析に  
おける役割について考えよう。

有意性検定により決定を行う場合、その場によって態度は  
変わるべきである。2つの極端な場合をあげよう。商行島に  
おいて保留が許されず"即時に決定を要求される。この場合に  
は1回の取引でなしに多数回の繰返しにおいて全符として判  
断があがればよいのである。これに対して科学研究の場合に

は、それぞれの問題で誤りは許されない。しかし保留は許され、気のすむまで追試し研究を進めてゆかなければならない。Fisherの強く主張するのはこの立場である。この立場に立てば、有意でないとは、有効な情報が殆んどえられなかったことを意味し、実験方法を変えたり一層の努力を要するのであって、即座に假説を受諾するなどとんでもないことである。因子分析は、特に心理学で用いるのは、この科学研究の場においてである。

たとえば農事試験で、新品種が在来品種に對し有意に収量が高いとの結果を1年えただけで決定はしない。さらに追試し、条件を変えても行い、その上で農家段階の実験も繰返して決定するのである。この慎重さが望ましい。

また、單純假説  $\theta = \theta_0$  , または  $\mu_1 = \mu_2$  の検定においては、追試を繰返して有意でなければ、たとえ假説が正しくなくても（独立その他の假定が正しいとして）、当らずとも遠からずの程度には大體保証されるのである。ところが、因子分析で  $m=k$ （これによって  $\Lambda, \Psi$  が推定されるが）をとった場合と  $m=k+1$  をとった場合とで、必要な  $\Psi, \Lambda$  の推定が著しく異ってくるのである。このように重大な相違を来すのでは、余程慎重を要する。

## § 5 Improper solution について

Mattsson et al. [5] は 12 例中 3 例を除いて *improper sol.* (Heywood's case) をえた。これは 2 例を除き、心理その他でえられた実際上のデータである。これは驚くべき結果であって、もしこれが事実とすれば因子分析は使用しうるかの疑問がもたれよう。

因子分析の解法は、これまでのものは収束が遅く、特に *communality* が 1 に近付けば極端に遅く、*improper solution* は気がつかなかった。Jöreskog-Lawley の方法は非常に収束が早く優秀な方法であるため、この矛盾が表に出てきたのである。

もっとも、Jöreskog [4] はこれに対し、*conditional* の方法を取り、解を求めている。Jöreskog 自身は *improper* とよんではいるが、母集団では *proper* な構造をもち、ただ *communality* が 1 に近いものの推定と考えているのではなからうか。

われわれの実験では、標本で *improper sol.* が推定される場合は 3 通りの場合であった。

- (1) 上記の *comm.* 1 に近い構造のとき
- (2) 因子数  $m$  の大きな場合 ( $m > p/2$ )
- (3) 抽出する因子数が真の因子数より大きい場合 (*specific* とし入り)

しかも、(1) の場合は *initial* によらず収束は *unique* (もちろん

構造は *unique* の条件を満足する) である。3 の場合は抽出する因子数を漸増増加していったちに判定しうる。

しかるに Mattsson et al. の実例で, *improper solution* がえられたものは, 収束が *unique* ではなく, すべて別の解に収束する *initial* が存在する。これは恐らく (2) の場合であろう。これは心理学で因子数が多いという事実にも合致する。この場合に因子分析が適用不能なることは既に論じてきた通りである。

### References

1. Anderson-Rubin (1956) *Statistical inference in factor analysis*  
Proc. 3<sup>rd</sup> Berkeley Symp.
2. Bechtoldt, H.P. (1961) *An empirical study of the factor analysis stability hypothesis.* *Psychometrika* 26.
3. Guttman, L (1958) *What lies ahead for factor analysis.*  
*Educ. and Psychol. Measurement* 18.
4. Jöreskog, K.G. (1967) *Some contribution to maximum likelihood factor analysis.* *Psychometrika* 32.
5. Mattsson, Olsson and Rosen (1966) *The maximum likelihood method in factor analysis* --- . Research Report, Univ. of Uppsala.
6. Tukey, J.W. ( ) *The future of Data analysis*
7. Tsumura and Fukutomi in press (Rep. Stat. Appl. Res. JUSE. and TRU Math.)