数理解析研究所講究録
第61巻 1968年 1-24

Function algebras の理論から見た rational approximation

奈良高専　貴志 一男

A を compact Hausdorff space X 上の uniform algebra, $A^{\perp}$ を $\int_X f d\mu = 0,\ \forall f \in A$ となる X 上の有限複素数値 Baire measures の全体とする。このとき,

$$f \in A \Longleftrightarrow \int_X f d\mu = 0, \quad \forall \mu \in A^{\perp}$$

であり, また二つの uniform algebras A, B $(A \subseteq B)$ について

$$A = B \Longleftrightarrow A^{\perp} = B^{\perp}$$

となる。このような functional analysis の理論を rational approximation の問題に応用して, 例えば Mergelyan の定理の証明の簡単化など, いろいろ研究がなされている。ここでは, この方面の一つの話題として, Bishop の局所化定理について述べる。続いて $R(X)$ (定義は §1) の Gleason part について, [9, 21, 22] を中心として最近の話題を述べる。

§1 例

Xを複素平面$\mathbb{C}$上のcompactな部分集合とする。Xのtopological boundaryを∂Xとし、$X^\circ = X \setminus \partial X$とおく。

$C(X)$；X上の連続な複素数値関数の全体からなり、uniform topologyをもったalgebraとする。

$C^*(X)$；X上の有限複素数値Baire measuresの全体で、$C(X)$の共役空間と同一視する。

$P(X)$；多項式の全体P_0の$C(X)$によるclosure、すなわち$\overline{P_0|X} = P(X)$。関数fのXへの制限を$f|X$で表わす。

$R_0(X)$；X上に極をもたない有理関数の全体。

$R(X)$；$R_0(X)$の$C(X)$によるclosure、すなわち$\overline{R_0(X)|X}$。

$H(X^\circ)$；X°で一価正則な関数の全体。

$A(X) = C(X) \cap H(X^\circ)$

次のRungeの定理はよく知られている。

UをXのある近傍とする。

$f \in H(U) \Rightarrow f|_X \in R(X)$

さて、容易に分かるように、

$$P(X) \subseteq R(X) \subseteq A(X) \subseteq C(X)$$

となる。これらの間の関係を問題にする。

例1. $P(X)=C(X) \Leftrightarrow X^{\circ}=\phi$ でかつ $\mathbb{C}\setminus X$ は connected である。
これはWeierstrass の定理の拡張で、M. A. Lavrentieff [1936] によって証明された。functional analysis を使った証明としては、例えば [19]。

例2. $P(X)=A(X) \Leftrightarrow \mathbb{C}\setminus X$ は connected である。
これは Mergelyan の定理である。[17] functional analysis を使った証明は、[10], [16], [20] にある。

例3. $P(X)=R(X) \Leftrightarrow \mathbb{C}\setminus X$ は connected である。

例4. $A(X)=C(X) \Leftrightarrow X^{\circ}=\phi$.

問題1. $R(X)=A(X)$ であるための必要十分な X の幾何的性質は何か。

問題2. $R(X)=C(X)$ であるための必要十分な X の幾何的性質は何か。

これらはまだ完全に解けていないようである。

<u>問題1について。</u> Mergelyan は次の事を証明している。[17]

例4. $\mathbb{C}\setminus X$ は有限個の components からなるとき、$R(X)=A(X)$ となる。

Vitushkin によって、$R(X)=A(X)$ になるための必要十分

な条件は、analytic capacityの概念を用いて、得られている。これからR(X)=A(X)であるためのXの幾何的性質がかなりよく分ってきているようである。[18]

問題2について。　Bishopは次の事を証明した。[6]

$R(X)=C(X) \Leftrightarrow X$の各点は$R(X)$のpeak pointである。(定義は後述) $R(X)=C(X)$ならば$X^\circ=\phi$である。この逆は成り立たない例として、次のMergelyanのSwiss Cheeseは有名である。

例5. $D=\{z\in\mathbb{C}\ ;\ |z|\leqq 1\}$のclosure $\overline{D}$から次の条件を満足するopen discs Δ_nの列を取り去る。

1) $\overline{\Delta_n}\subset D$,

2) $\overline{\Delta_n}\cap\overline{\Delta_m}=\phi$ for $n\neq m$.

3) $X=\overline{D}-\bigcup_{n=1}^{\infty}\Delta_n$は内点を持たない。

4) Δ_nの半径をr_nとするとき、$\sum_{n=1}^{\infty} r_n<\infty$.

このとき、XをMergelyanのSwiss cheeseという。

さて、$R(X)\neq C(X)$となること。

証明. X上のmeasure μをつぎのように定義する。

i) 内部に関して正の向きに方向づけた$\partial D: |z|=1$の上で $\mu=dz$.

ii) 各nについて外部に関して正の向きに方向づけた$\partial\Delta_n$の上で $\mu=dz$.

iii) ∂D, $\partial\Delta_n(\forall n)$以外のX上では$\mu=0$.

すると, μ は X 上の有限な measure であり, $\forall r \in R_0(X)$ のとき Cauchy の定理から

$$\int_X r\,d\mu = \int_{\partial D} r\,dz + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\partial \Delta_n} r\,dz = 0$$

$$\therefore \int_X f\,d\mu = 0, \quad \forall f \in R(X).$$

一方, $\mu \neq 0$ より $\exists g \in C(X)$, $\int_X g\,d\mu \neq 0$. $\quad \therefore R(X) \subsetneqq C(X)$ //

次のような例もある.

$X = \overline{X^\circ}$, X° は simply connected であるが, $R(X) \neq A(X)$ である. [18]

Bishop は始めて functional analysis の方法を rational approximation に応用した。[5, 6, 7] Glicksberg and Wermer は Bishop の議論で残っていた関数論を取り去り, Dirichlet algebra の一般論を使って, 例2を証明した。そのとき関数論で必要になった事は, "∂X の任意の実連続関数は, 調和多項式によって, ∂X 上で一様に近似出来る." (Walsh の定理) だけである. [15, 21] この考え方に添って, 例4も証明されている. [2, 11, 12, 15]

一方 Carleson は 例2を出来るだけ関数論を使わないで, また Dirichlet algebra の理論を使うことも避けて, 証明した.

この流れに添う Bishop の局所化定理を次に述べる[10,12,18]

§2 Bishop の局所化定理

X を複素平面 $\mathbb{C}$ 上の Compact 部分空間とする. $\mu \in C^*(X)$ に対して

$$\hat{\mu}(z) = \int_X \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z}, \quad \tilde{\mu}(z) = \int_X \frac{d|\mu|(\zeta)}{|\zeta - z|} \quad (|\mu| \text{ は } \mu \text{ の total variation})$$

とおくと, $|\hat{\mu}(z)| \leqq \tilde{\mu}(z)$. 次の補題は Bishop [6] にある.

> 補題 2.1　1) $\tilde{\mu}(z) < \infty$　a.e.-$d\lambda$
>
> 　　　　　2) $\hat{\mu}(z) = 0$ a.e.-$d\lambda \iff \mu = 0$
>
> λ は平面上の Lebesgue measure.

1) の証明. $X \subset \{\zeta \in \mathbb{C} \,;\, |\zeta| < R\}$ とする.

i) $|z| \leqq R$ のとき, $|\zeta| \leqq R$ ならば

$$\iint_{|z| \leqq R} \frac{dx\,dy}{|\zeta - z|} = \iint_{|z' - \zeta| \leqq R} \frac{dx'\,dy'}{|z'|} \leqq \iint_{|z'| \leqq 2R} \frac{dx'\,dy'}{|z'|} = 4\pi R$$

よって,

$$\iint_{|z| \leqq R} \left\{ \int_X \frac{d|\mu|(\zeta)}{|\zeta - z|} \right\} dx\,dy = \int_X d|\mu|(\zeta) \iint_{|z| \leqq R} \frac{dx\,dy}{|\zeta - z|} \leqq 4\pi R \int_X d|\mu| < \infty$$

$\therefore\ \tilde{\mu}(z) < \infty$　a.e.-$d\lambda$　for $z \in \{|z| \leqq R\}$

ii) $|z| > R$ のとき. $\zeta \in X$ に対して $|\zeta - z| \neq 0$.

$\therefore\ \tilde{\mu}(z) < \infty$.

2) の証明　X を含む compact 集合 X' に台 (support) をもつ，連続的微分可能な関数を g とする。Green の定理から

$$g(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<\infty} \frac{\bar{\partial} g(\zeta)}{\zeta - z}\,dx\,dy\,, \qquad \zeta = x+iy$$

$$\bar{\partial} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

となる.

$$\int_X g(z)\,d\mu = \frac{1}{\pi}\iint \bar{\partial} g(\zeta)\cdot\hat{\mu}(\zeta)\,dx\,dy = 0$$

$$\left((\because)\quad \int_X \left\{ \iint |\bar{\partial} g(\zeta)|\cdot\frac{1}{|\zeta - z|}\,dx\,dy \right\} d|\mu|(z) < \infty \right)$$

X 上の任意の連続関数は上のような関数 g によって，X 上で一様に近似出来るから

$$\int_X g\,d\mu = 0, \quad {}^\forall g \in C(X)$$

$$\therefore \quad \mu = 0. \qquad //$$

補題 2.2　$\mu \in C^*(X)$ とする.

$$\mu \perp R(X) \Longleftrightarrow \hat{\mu}(z) = 0 \quad \text{on} \quad \mathbb{C} - X$$

証明 ($\Longleftarrow$)　$\mu \perp (\zeta - z)^{-1}$ for ${}^\forall z \in \mathbb{C} - X$. 従って，$r(\zeta) = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{\zeta - z_k}$, $z_k \in \mathbb{C} - X$ ならば $\mu \perp r(\zeta)$. $R(X)$ の任意の関数 f は上のような関数 $r(\zeta)$ によって一様に近似出来るから $\mu \perp R(X)$.

補題 2.3 $\mu \in C^*(X)$, φ を compact な台 K をもつ C^∞ 級関数とすると

$$\varphi\hat{\mu} = \widehat{\varphi\mu} + \hat{\sigma}, \quad \text{ただし}\quad \sigma = -\frac{1}{\pi}\bar{\partial}\varphi(\zeta)\hat{\mu}(\zeta)\,dx\,dy,\ \zeta = x+iy.$$

証略. [18]

定理 2.4 (Bishop の局所化定理)

$f \in C(X)$ とする. X の各点 z に, (X における) 周近傍 U_z が存在して, $f|_{U_z} \in R(U_z)$ ならば, $f \in R(X)$.

証明. $\forall\mu \in R^\perp(X)$ に対して, $f \perp \mu$ を云う. $X \ni z$ に対して, $K_z = \{\zeta;\ |\zeta - z| \leqq \varepsilon_z\}$, $K_z \cap X \subseteqq U_z$ となる K_z が存在する. X は compact 集合であるから, 有限個の $K_{z_1}, \cdots K_{z_n}$ を選び

$$\bigcup_{j=1}^{n} K_{z_j} \supset X$$

とすることが出来る. $K_{z_j} = K_j$, $U_{z_j} = U_j$ とおく. 次のような関数を取る.

$$\varphi_j \in C^\infty(\mathbb{C}), \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

$$0 \leqq \varphi_j \leqq 1, \quad \varphi_j = 0 \ \text{on}\ \mathbb{C} - K_j$$

$$\varphi(z) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(z) = 1 \quad \text{on}\ X.$$

さて,

$$\nu_j = \varphi_j\mu - \frac{1}{\pi}\bar{\partial}\varphi_j(\zeta)\,\hat{\mu}(\zeta)\,dx\,dy \qquad (\zeta = x+iy)$$

とおく. 補題 2.2 より ν_j の台は U_j に含まれる. 補題 3 より $\hat{\nu}_j = \widehat{\varphi_j\mu} + (\varphi_j\hat{\mu} - \widehat{\varphi_j\mu}) = \varphi_j\hat{\mu}$.

$\therefore \hat{\nu}_j = 0$ on $\mathbb{C} - U_j$.

よって，$\nu_j \perp R(U_j)$．仮定より $\nu_j \perp f$ (ν_j)．一方

$\mu = \sum \nu_j$ であるから，$\mu \perp f$.

定理 2.5 $\mathbb{C} \setminus X$ のすべての components の直径がある正数 ε_0 より大きいときは $R(X) = A(X)$

証明．X の各点 x に対して，（X における）閉近傍を，U_x の直径が ε_0 より小になるようにとると，$\mathbb{C} - U_x$ は connected になる．よって，Mergelyan の定理（§1．例2）より $R(U_x) = A(U_x)$．

${}^\forall f \in A(X)$ とすると $f|_{U_x} \in A(U_x) = R(U_x)$．定理 2.4 より $f \in R(X)$．　$\therefore R(X) = A(X)$．//

定理 2.6 $\mathbb{C} \setminus X$ は有限個の components からなるとき $R(X) = A(X)$．（Mergelyan の定理）

同じ方法を用いて，Garnett は次の事を証明している．

定理 2.7.

$\Gamma_0 = \{x \in X$; x の任意の近傍は $\mathbb{C} \setminus X$ の無限個の Components と交わる$\}$．若し Γ_0 は可附番個の集合であるならば，$R(X) = A(X)$ である．

§3 Maximal ideal space と peak points

I) X を compact Hausdorff space．A を X 上の uniform algebra，すなわち A は $C(X)$ の closed subalgebra で constants を含み，X の点を separates する．§1 の $A(X)$，$P(X)$，$R(X)$ 等は uniform algebras である．$\mathfrak{M}(A)$ を A の零でない complex homomorphisms の全体に Gelfand topology を入れた space，すなわち A の maximal ideal space とする．X の点 x は，$\varphi_x(f) = f(x)$（x における evaluation）によって，$X \subset \mathfrak{M}(A)$ と考えられ，更に map：$x \to \varphi_x$ は X から $\mathfrak{M}(A)$ の中への homeomorphism である事も分るので，X を $\mathfrak{M}(A)$ の compact subset と看做す．$\varphi \in \mathfrak{M}(A)$ のとき

$$(*) \qquad \varphi(f) = \int_X f\,dm \;, \quad {}^{\forall} f \in A$$

となる乗法的確率 measure m が存在する．このような m を φ の表現 measure と呼び，φ の表現 measures の全体を $M_\varphi(A)$ または M_φ と書くことにする．また，$(*)$ を満足する有限複素 Baire measure を複素表現 measure という．以下 $\varphi(f)$ の事を $f(\varphi)$ と書く．

例えば，$R(X)$ の maximal ideal space は X である．（∵）$X \subseteqq \mathfrak{M}(R(X))$ であり，${}^{\forall}\varphi \in \mathfrak{M}(R(X))$ とすると $\varphi(z) = a \in X$ となる事は背理法から容易に分る）．よって，X は複素平面 $\mathbb{C}$ の compact 部分空間と考えても，$R(X)$ の

maximal ideal space と考えても同じ事である。$\mathbb{C}-X$ が connected のとき（§1, 例2）, $\mathfrak{M}(P(X))=X$. 一般の $P(X)$ のとき $\mathfrak{M}(P(X))=\{\zeta\in\mathbb{C};\ |p(\zeta)|\leq \max_{z\in X}|p(z)|,\ \forall p\in P_0\}$. [19] それから, $\mathfrak{M}(A(X))=X$ である事も知られている。[3]

$\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{M}(A)$ に対して,

$$\|\varphi_1-\varphi_2\| = \sup\{|f(\varphi_1)-f(\varphi_2)|;\ f\in A,\ \|f\|\leqq 1\},\quad \|f\|=\sup_{x\in X}|f(x)|$$

とおき, $\|\varphi_1-\varphi_2\|<2$ のとき $\varphi_1\sim\varphi_2$ と書く。$\sim$ は同値関係を満足する。(Gleason)

$$\Sigma(\varphi)=\{\varphi'\in\mathfrak{M}(A);\ \varphi\sim\varphi'\}$$

を φ を通る (Gleason) part と呼ぶ。若し, $\Sigma(\varphi)=\{\varphi\}$ のときは, $\Sigma(\varphi)$ は trivial part であると云い, $\Sigma(\varphi)\neq\{\varphi\}$ のときは nontrivial part であるという。

同じ part に属する条件はいろいろあるが, あとで必要となるものを述べる。[8]

定理 3.1 次の事は同値である。

(1) $\varphi_1\sim\varphi_2$

(2) φ_1, φ_2 は互いに絶対連続な表現 measure を持つ。

(3) φ_1, φ_2 は互いに singular でない表現 measure を持つ。

II) X を compact metrizable space とする。[4, 6, 18]
x が X 上の uniform algebra A の peak point であるとは

$$|f(y)| < |f(x)| = \|f\| \quad \text{for } {}^{\forall}y \in X - \{x\},$$

を満足する $f \in A$ が存在する事である。A の peak points の全体を $P(A)$ または P で表わす。

定理 3.2　次の事は同値である。

(1) x は A の peak point である。

(2) $x \in \mathfrak{M}(A)$ の表現 measure は一意的である。すなわち $M_x(A) = \{\delta_x\}$, δ_x は Dirac measure.

注) (2) を満足するような点の全体を、A の Choquet boundary という。

定理 3.3

(1) P は G_δ 集合である

(2) $\varphi \in \mathfrak{M}(A)$ のとき、$m(X - P) = 0$ となる $m \in M_\varphi(A)$ が存在する。

$S(f) = \{x \in X \ ; \ |f(x)| = \|f\|\}$ とおく。X の部分集合 N が、$N \cap S(f) \neq \phi$, ${}^{\forall}f \in A$ を満足するとき、N を A の boundary という。上のような N の中で最小の M (必ずしも閉ではない) が存在するとき、M を A の minimal boundary と云う。A の closed な最小の boundary を A の Šilov boundary と云って、∂A で表わす。

定理 3.4　A の minimal boundary は存在して、それは A の peak points の全体 P に等しい。したがって、A の Šilov boundary は P の closure である。

$A_R = \{\mathrm{Re} f : f \in A\}$, $C_R(X) = \{\mathrm{Re} f : f \in C(X)\}$ とおく。A_R が $C_R(X)$ で (uniform topology で) dense であるとき、uniform algebra A は Dirichlet algebra であるという。

定理 3.5　A が Dirichlet algebra のとき、$P = X = \partial A$ である。

例えば、$R(X)$ を考える。∂X を X の topological boundary とする。$R(X)$ の peak points の全体は、∂X 上で dense であって、∂X は $R(X)$ の Šilov boundary である。よって restriction map

$$f \longrightarrow f|_{\partial X}, \quad \forall f \in R(X)$$

を考えると、これによって $R(X)$ を $C(\partial X)$ の subalgebra に isomorphic, isometric に埋め込む事が出来る。

$\mathbb{C} - X$ が connected のとき、$P(X) = A(X)$ (§1, 例2) であるが、∂X 上で考えるとき、$P(X)$ は Dirichlet algebra である。よって、$\partial X = P = \partial(P(X))$.
(勿論、X 上の $P(X)$ と考えても $\partial X = P = \partial(P(X))$)。

また、∂X は丁度 $\mathbb{C} - X$ の components の boundaries の和になるとき、∂X の各点は $R(X)$ の peak points である。

§4 $R(X)$ の parts.

$R(X)$ の peak point は trivial part であることは容易に分かる.

例 1. $\mathbb{C}\setminus X$ は connected のとき (§1. 例 2), $P(X)$ の parts は次のようになっている.

1) ∂X の各点は trivial part である.

2) $X^\circ (= X - \partial X)$ の各 component は一つの nontrivial part である. [20]

例 2. $\mathbb{C}\setminus X$ は有限個の components からなるとき, $R(X)$ の part は例 1 と同じである. すなわち

1) ∂X の各点は trivial part である.

2) X° の各 component は一つの nontrivial part である. [1].

上の例では,

a) peak point = trivial part.

b) nontrivial part の平面上の Lebesgue measure は positive である.

c) nontrivial part は connected である.

d) G を一つの nontrivial part とすると, $\overline{G}\setminus G$ は peak points からなる.

上記の事は, 任意の $R(X)$ の part について成り立つが,

a), b) は Wilken によって肯定的に解決され以下述べる) c) は未解決 (cf. 系 4.8), d) については, nontrivial part Σ は dense conneted open set を部分集合として含んでいるならば, 成り立つ事が分っている. [22]

定理 4.1　$\mu (\in C^*(X))$ を $z_0 \in X = \mathfrak{m}(R(X))$ の複素表現 measure とする. このとき, $\lvert\mu\rvert$ に関して絶対連続な z_0 の表現 measure m が存在する. (Hoffman - Rossi の定理)

証明 (Sarason. [22]) 空間 $L^2(\lvert\mu\rvert)$ における algebra $R(X)$ の closure を H^2 とする. また $I = \{ f \in R(X) ; f(z_0) = 0 \}$ の $L^2(\lvert\mu\rvert)$ による closure を H_0^2 とおくと, $H_0^2 = \{ f \in H^2 : \int f d\mu = 0 \}$ となる. いま, $h \in H^2$ を

$$\|h\|_2 = 1 , \quad h \perp H_0^2$$

となるようにとり, $dm = \lvert h\rvert^2 d\lvert\mu\rvert$ とおくと, $m \ll \lvert\mu\rvert$ で, $m \in M_{z_0}$. (注. $m \ll \lvert\mu\rvert$ は m が $\lvert\mu\rvert$ に関して絶対連続であることを表わす) 上記の定理は, 次の論文による.

K. Hoffman and H. Rossi; On the extension of positive weak* continuous functionals. T. A. M. S. 116 (1965).

補題 4.2　$\mu \perp R(X)$ とする. $\tilde{\mu}(z_0) < \infty$, $\hat{\mu}(z_0) \neq 0$ ならば, $\nu_{z_0} = \dfrac{1}{\hat{\mu}(z_0)} \cdot \dfrac{\mu}{\zeta - z_0}$ は z_0 の複素表現 measure である.

証明　$r \in R_0(X)$ とすると, $\dfrac{r(\zeta) - r(z_0)}{\zeta - z_0} = F(\zeta) \in R_0(X)$.

$\tilde{\mu}(z_0) < \infty$ より

$$0 = \int \frac{r(\zeta) - r(z_0)}{\zeta - z_0} d\mu(\zeta) = \int \frac{r(\zeta)}{\zeta - z_0} d\mu(\zeta) - r(z_0)\,\hat{\mu}(z_0).$$

一様極限をとることによって,

$$f(z_0) = \int f(\zeta)\, d\nu_{z_0}(\zeta), \quad \forall f \in R(X). \quad //$$

定理 4.3 $\mu \perp R(X)$ とする. もし μ はすべての表現 measure に関して singular (このような μ を completely singular measure という) ならば, $\mu = 0$. (Wilken)

証明. $\mu \neq 0$ とする. 補題 2.1 より, ある $z_0 \in X$ が存在して,

$$\tilde{\mu}(z_0) < \infty, \quad \hat{\mu}(z_0) \neq 0.$$

補題 4.2 より,

$$\nu_{z_0} = \frac{1}{\hat{\mu}(z_0)} \cdot \frac{\mu}{\zeta - z_0}$$

は z_0 の複素表現 measure である. よって,

$$\exists m \in M_{z_0}, \quad m \ll |\mu|.$$ 仮定に反する. //

定理 4.4 z_0 が $R(X)$ の peak point でないならば, z_0 を通る part を $\Sigma(z_0)$ とすると, $\lambda(\Sigma(z_0)) > 0$. ここに, λ は平面上の Lebesgue measure を表わす. (Wilken)

証明. 定理 3.2 より, $\exists m \in M_{z_0}, \ m \neq \delta_{z_0}$.

$\mu = (\zeta - z_0)m$ とおくと, $\mu \neq 0, \ \mu \perp R(X)$.

$$\Omega = \{\zeta \in \mathbb{C} : \tilde{\mu}(\zeta) < \infty \text{ and } \hat{\mu}(\zeta) \neq 0\}$$

とおくと、補題 2.2 より

$$Q \subset X.$$

補題 2.1 より

$$\lambda(Q) > 0.$$

$\forall \zeta \in Q$ とするとき、

$$\nu_\zeta = \frac{1}{\hat{\mu}(\zeta)} \cdot \frac{\mu}{z-\zeta}$$

は ζ の複素表現 measure であるから、定理 4.1 より

$$\exists m_\zeta \in M_\zeta, \quad m_\zeta \ll |\mu|.$$

一方、$|\mu| \ll m$ であるから、$m_\zeta \ll m$. 定理 3.1 より

$\zeta \sim z_0$. $\therefore\ Q \subset \sum(z_0)$ $\therefore\ \lambda(\sum(z_0)) > 0$. //

系 4.5. $z \in P(R(X)) \Leftrightarrow \sum(z) = \{z\}$

系 4.6 $\sum(z) = \{z\}$ for $\forall z \in X \Leftrightarrow R(X) = C(X)$

これは、次の Bishop の定理 [6] から従う.

$$\underline{\lambda(X - P) = 0 \Rightarrow R(X) = C(X)}$$

証明 $\mu \perp R(X)$ から $\mu = 0$ を証明すればよい.

$\mu \neq 0$ とする. 補題 2.2 より $\hat{\mu} = 0$ on $\mathbb{C} \setminus X$. よって、

$$\hat{\mu} \neq 0 \text{ on } \exists S \subset X, \quad \lambda(S) > 0.$$

補題 2.1 と仮定から、$\exists z_0 \in P$, $\hat{\mu}(z_0) \neq 0$, $\tilde{\mu}(z_0) < \infty$.

補題 4.2 より $\displaystyle\int \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\mu = f(z_0)\hat{\mu}(z_0), \quad \forall f \in R(X).$

z_0 で peak する $R(X)$ の関数を $g(z)$ として

$$|g(z)| < g(z_0) = \|g\| = 1 \quad , \forall z \in X - \{z_0\}$$

とする。そうすると，

$$\int \frac{g^k(\zeta)}{\zeta - z_0} d\mu(\zeta) = \hat{\mu}(z_0)$$

一方 $\hat{\mu}(z_0) < \infty$ であるから $|\mu|(z_0) = 0$

$$\therefore \quad \frac{g^k(\zeta)}{\zeta - z_0} \to 0 \quad \text{a.e.-}d|\mu|$$

また
$$\left|\frac{g^k(\zeta)}{\zeta - z_0}\right| \leqq \frac{1}{|\zeta - z_0|} \in L^1(d|\mu|)$$
$$\therefore \quad 0 = \hat{\mu}(z_0) \qquad \text{矛盾.} \quad //$$

maximal ideal space $\mathfrak{M}$ をもった uniform algebra に対して，$\mathfrak{M}$ の各点が trivial part ならば，$A = C(\mathfrak{M})$ が，上記の系が，この事の成り立つ一つの例である。

Bishop の定理の系として，Hartogs–Rosenthal の定理が従う。すなわち

$$\lambda(X) = 0 \implies R(X) = C(X)$$

定理 4.7 $\forall z_0 \in X$，$\forall m \in M_{z_0}(R(X))$，$m$ の台を S，z_0 を通る part を Σ とすると

1) $m \in M_{z_0}(R(\overline{\Sigma}))$

2) $S \subset \overline{\Sigma}$ (Wilken)

証明 $\mu = (\zeta - z_0)m$ とおくと $\mu \perp R(X)$. 定理 4.4 の証明のときと同様に

$$Q = \{ \zeta \in \mathbb{C} ; \tilde{\mu}(\zeta) < \infty \text{ and } \hat{\mu}(\zeta) \neq 0 \} \subset \Sigma .$$

よって、 $\zeta \in U = \mathbb{C} - \overline{\Sigma}$ で、 $\tilde{\mu}(\zeta) < \infty$ ならば $\hat{\mu}(\zeta) = 0$.

ところが、補題 2.1 より $\tilde{\mu}(\zeta) < \infty$, a.e.-$d\lambda$.

$$\therefore \hat{\mu}(\zeta) = 0 \quad \text{a.e.} - d\lambda \quad \text{on } U$$

このとき、補題2.2 — 2) の証明と同様にして、

$$|\mu|(U) = 0 \qquad \therefore \mu \text{ の support} \subset X \setminus U .$$

一方、 $\mu \perp R(X)$ より $\hat{\mu} = 0$ on $\mathbb{C} \setminus X$.

$$\therefore \hat{\mu} = 0 \quad \text{a.e.} - d\lambda \quad \text{on } \mathbb{C} \setminus (X \setminus U)$$

$$\therefore \mu \perp R(X \setminus U) \qquad \therefore \mu \perp R(\overline{\Sigma}).$$

$r \in R_0(\overline{\Sigma})$ とすると、

$$\frac{r(\zeta) - r(z_0)}{\zeta - z_0} = f(\zeta) \in R_0(\overline{\Sigma})$$

$$\therefore \quad 0 = \int \frac{r(\zeta) - r(z_0)}{\zeta - z_0} d\mu = \int [r(\zeta) - r(z_0)] \, dm(\zeta)$$

$$\therefore r(z_0) = \int r(\zeta) \, dm(\zeta)$$

$$\therefore f(z_0) = \int f(\zeta) \, dm(\zeta) , \quad \forall f \in R(\overline{\Sigma})$$

従って、 $m(\overline{\Sigma}) = 1 \qquad \therefore S \subset \overline{\Sigma}$.

系 4.8 $R(X)$ の一つの part を Σ とすると、$\overline{\Sigma}$ は connected である。

証明. $\overline{\Sigma} = A \cup B$, $A \cap B = \phi$, A, B を閉集合とする。

いま、A の特性関数を χ_A とすると、 $\chi_A \in R(\overline{\Sigma})$. $\forall z_0 \in \Sigma \cap A$, $\forall m \in M_{z_0}(R(X))$ とすると、定理から $m \in M_{z_0}(R(\overline{\Sigma}))$ と

なって，m の台は A 上にある．同様に，$\forall z_1 \in \Sigma \cap B$，$\forall m_1 \in M_{z_1}(R(X))$ としても，m_1 の台は B 上にある．ゆえに，m と m' とは互いに singular になるから，z_0 と z_1 とは異なる part に属する．//

定理 4.4（Wilken の定理）から

$$z_0 \notin P(R(X)),\quad \Sigma_2(z_0) = \{\zeta \in X : \|\zeta - z_0\| < 2\}$$

ならば，$\lambda(\Sigma_2(z_0)) > 0$．いま

$$z_0 \notin P,\ \Sigma_\varepsilon(z_0) = \{\zeta \in X : \|\zeta - z_0\| < \varepsilon\},\quad 0 < \forall\varepsilon \leqq 2$$

ならば

$$\lambda(\Sigma_\varepsilon(z_0)) > 0$$

となるが，これについて，A. Browder は次の結果を得ている．

$$\Delta_n = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - z_0| \leqq \frac{1}{n}\}$$

とする．

定理 4.9 $z_0 \notin P(R(X))$ ならば，$0 < \forall\varepsilon \leqq 2$ のとき，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(\Sigma_\varepsilon(z_0) \cap \Delta_n)}{\lambda(\Delta_n)} = 1$$

よって

系 4.10 $z_0 \notin P \Rightarrow \lambda(\Sigma_\varepsilon(z_0)) > 0$，$0 < \forall\varepsilon \leqq 2$

$z_0 \in X$ における $R(X)$ の point derivation とは

$$D(fg) = f(z_0)\,Dg + g(z_0)\,Df \qquad \forall f, g \in R(X)$$

を満足する $R(X)$ の(必ずしも連続でない) linear functional と定義する。

$$I_{z_0}=\{f\in R(X)\ ;\ f(z_0)=0\}\ ,\quad I_{z_0}^2=\{\sum_{i=1}^{n} f_i g_i\ ;\ f_i, g_i\in I_{z_0}\ ,\ i=1,2,\dots,n\}$$

とおくと、z_0 において nonzero な point derivation が存在する事と、$I_{z_0}\neq I_{z_0}^2$ とは同値である。次の事が成り立つ (A. Browder)

定理 4.11　$z_0\in P(R(X))\iff I_{z_0}=I_{z_0}^2$

従って、

系 4.12　$R(X)=C(X)\iff I_z=I_z^2\quad \forall z\in X$

以上から次の事が従う。

次の命題は同値である。

1) z_0 は $R(X)$ の peak point である。

2) z_0 は $R(X)$ の Choquet boundary point である。

3) $\sum(z_0)=\{z_0\}$

4) $I_{z_0}=I_{z_0}^2$

文献

1. P. R. Ahern and D. Sarason ; On some hypodirichlet algebras of analytic functions. Amer. J. Math. 89 (1967)

2. P. R. Ahern and D. Sarason ; The H^p spaces of a class of function algebras. Acta Math. 117 (1967)

3. R. Arens ; The maximal ideals of certain function algebras. Pac. J. Math. 8 (1958)

4. E. Bishop and K. de Leeuw ; The representation of linear functionals by measures on sets of extreme points. Ann. Inst. Fourier. 9 (1959)

5. E. Bishop ; The structure of certain measures. Duke Math. J. 25 (1958)

6. E. Bishop ; A minimal boundary for function algebras. Pac. J. Math. 9 (1959)

7. E. Bishop ; Boundary measures of analytic differentials, Duke Math. J. 27 (1960)

8. E. Bishop ; Representing measures for points in a uniform algebras. Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964)

9. A. Browder ; Point derivations on function algebras. J. Funct. Anal. 1 (1967)

10. L. Carleson ; Mergelyan's theorem on uniform polynomial approximation. Math. Scand. 15 (1965)

11. T. Gamelin and G. Lumer ; The universal Hardy class. (to appear)

12. J. Garnett ; On a theorem of Mergelyan. Pac. J. Math. 26 (1968)

13. J. Garnett and I. Glicksberg ; Algebras with the same multiplicative measures. J. Funct. Anal. 1 (1967)

14. I. Glicksberg ; The abstract F. and M. Riesz theorem. J. Funct. analy 1 (1967)

15. I. Glicksberg ; Dominant representing measures and rational approximation. Trans. Amer. Math. Soc. 130 (1968)

16. I. Glicksberg and J. Wermer; Measures orthogonal to a Dirichlet algebras. Duke Math. J. 30 (1963)

17. S. N. Mergelyan ; Uniform approximation to functions of a complex variable. A. M. S. Translation No. 101.

18. L. Zalcman ; Analytic Capacity and rational approximation. Lecture Note in Math. Springer Verlag. Berlin. 1968.

19. J. Wermer ; Banach algebras and analytic functions.
Advances in Math. I (1961)

20. J. Wermer ; Seminar über Funktionen - Algebren.
Lecture Note in Math. Springer Verlag, Berlin, 1964.

21. D. Wilken ; Lebesgue measure for parts of R(X).
Proc. Amer. Math. Soc. 18 (1967)

22. D. Wilken ; The support of representing measures
for R(X). Pac. J. Math. 26 (1968)