数理解析研究所講究録
第62巻 1968年 47-54

Eventual Stability and Control Systems

東北大理　吉沢太郎

多くの実際問題においては、平衡点でない点の安定性を考える必要がある。 これはもはやLiapunovの安定性ではない。 種々のよい例はadaptive control systemの安定性の研究に現われる。 すなわち、われわれの考える位置は平衡点ではないが、時間がたてば、だんだん平衡点のような性質を持つようになってくれることが望ましい。 このような安定性がeventual stabilityとよばれるものである。 例えば、自励系または考えている位置が平衡点であれば、eventual stabilityはLiapunov-stabilityと同じで、これらに対する定理はLiapunovの定理の一般化として考えられる。 しかし非自励系で考える位置が平衡点でない場合は、ある種の新しい安定性の概念である。

制御理論における安定問題に対する普通の数学的モデルは微分方程式の系

(1) $$\dot{x} = X(t, x, u)$$

で与えられる。 ここで x, X は n－vector で、u は r－vector である。 一般の目的はこの系が希望する位置の近くにとどまっているようにコントロール u を選ぶことである。一般に行われるように望まれる位置は x 空間の原点であるとしておく。 コントロール u は一般に t と x との函数で、特別なコントロール u を選ぶと方程式 (1) は

$$\dot{x} = X(t, x, u(t, x)) = F(t, x)$$

となる。 満足すべきコントロールであるためには、系がある意味で原点の近くにとどまっていることが必要である。云いかえれば、原点がある意味で安定であることが必要である。

そこで、ここで取り扱う安定性は、平衡点ではないが、時間がたてば、安定な平衡点または漸近安定な平衡点のような性質をもつ安定性である。 もし制御される系がかくらんや変化する周囲の事情に影響をうけるならば、adaptive control に、望まれる位置がだんだん安定した平衡点または、さらに好ましいのは、漸近安定な平衡点のように行動するようにさせることが一番よいことである。

いま、微分方程式

(2) $$\dot{x} = F(t, x)$$

を考え、$F(t, x)$は$t \geqq 0$, $\|x\| < K$ で連続であると仮定する。(2) の(t_0, x_0)を通る解を$x(t; x_0, t_0)$ で表わしておく。いまの場合は$F(t, 0) \equiv 0$である必要はない。例として

(3) $$\dot{x} = -x + 2e^{-t}x^2$$

をみてみると、この方程式は$x(t) = e^t$という解をもっている。したがって$x(t) \equiv 0$が大域的に漸近安定でないことは明かである。しかし、任意の$\alpha > 0$に対して$\|x_0\| \leqq \alpha$なる解は初期の時間t_0を適当に大きくとれば、いつでも$t \to \infty$のとき$x(t; x_0, t_0) \longrightarrow 0$である。また初期の時間$t_0$を適当に大きくとれば、$x(t; x_0, t_0)$は$t \geqq t_0$に対して有界な範囲にとどまっている。

eventual stability および eventual boundedness に対して、数学的にいろいろ定義があるが、ここでは簡単のためつぎの定義を述べる。

<u>定義 1.</u> 与えられた$\varepsilon > 0$に対して$\delta(\varepsilon)$と$T(\varepsilon)$が存在して、$\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$, $t_0 \geqq T(\varepsilon)$ならば、すべての$t \geqq t_0$に対して$\|x(t; x_0, t_0)\| < \varepsilon$なるとき、原点は eventually stable

であるといわれる。

もし(2)が自励系か、あるいは原点が平衡点すなわち$F(t, 0) \equiv 0$ならば、原点を通る解が唯一つの場合は、原点の*eventual stability*は*Liapunov*の*uniform stability*と同値である。

<u>定義2.</u> 原点が*eventually stable*で、さらにδ_0, T_0が存在して$\|x_0\| < \delta_0$, $t_0 \geqq T_0$ならば$t \longrightarrow \infty$のとき$x(t; x_0, t_0) \rightarrow 0$ ならば原点は*eventually asymptotically stable*であるといわれる。

*eventual stability*に対する*Liapunov function*を用いる定理としてつぎのものがある。

<u>定理1.</u> $V(t, x)$を連続な偏導函数をもつ実数値函数とし、$V(t, x) \geqq u(\|x\|)$なる連続正定値函数$u(r)$が存在するとする。さらに$\|x\| \longrightarrow 0$のとき一様に$V(t, x) \rightarrow 0$で、$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot F \leqq \phi(t)$であるとする。ここで$\phi(t)$は連続で$\phi(t) \geqq 0$かつ

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \left\{ \sup_{a \geqq 0} \int_t^{t+a} \phi(s) ds \right\} = 0 \quad (4)$$

このような*Liapunov function*が存在すれば、原点は*eventually stable*である。

<u>定理2</u> $V(t, x)$は定理1におけると同様とし、$\dot{V}$が

$\dot{V} \leqq -W(x) + h(t)$ をみたすならば、原点は *eventually asymptotically stable* である。 ここで $W(x)$ は正定値で

$$(5) \qquad e^{-t}\int_0^t e^s h(s)\,ds \longrightarrow 0 \quad \text{as } t \to \infty$$

(5)をみたすような函数 $h(t)$ としては、$t \to \infty$ のとき $h(t) \to 0$ となる函数や、$\int_0^\infty h(t)\,dt = c$ (c: 有限) となる函数がある。 また(5)は

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{a \geqq 0} \frac{1}{1+a} \left| \int_t^{t+a} h(s)\,ds \right| = 0$$

と同値である。

もし(2) における $F(t, x)$ が $F(t, 0) \equiv 0$ をみたし、かつ *Lipschitz* の条件（*Lipschitz constant* は t に無関係にとれる）をみたすときは、*Liapunov function* の存在に関する逆定理と定理2からつぎのことがいえる。

<u>定理3.</u> (2)の解 $x(t) \equiv 0$ が一様漸近安定であるとき、もし(5) をみたす $h(t)$ に対して、$\|x\| \leqq r_0$ ($r_0 > 0$) のとき $\|G(t, x)\| \leqq h(t)$ ならば、原点は方程式

$$(6) \qquad \dot{x} = F(t, x) + G(t, x)$$

に関して *eventually asymptotically stable* である。

adaptive control への応用に際しては、また non-compact な集合の安定性を考える必要があると思われる。たとえば、control parameter に関しては、それが有界な範囲にとどまっている限り、われわれはあまり注意をはらう必要はないが、control における error を零に近づけたいという場合、われわれは微分方程式として

(7) $$\dot{x} = F(t, x, y), \quad \dot{y} = G(t, x, y)$$

を考えて、x は control における error を、y は control parameter を表わすとする。そして $t \to \infty$ のとき $x(t) \to 0$、$y(t)$ は有界な範囲にとどまるということは、(x, y) 空間における集合 $S = \{(x, y) ; x = 0\}$ のある種の安定性を考えることになる。このとき集合 S は non-compact な集合である。

こうした方向に対しては、つぎの定理がある。

<u>定理4</u>　方程式 (7) に対してつぎの仮定をおく。

(a) F, G は $0 \leqq t < \infty$, $\|x\| < \infty$, $\|y\| < \infty$ で連続。

(b) $F(t, x, y)$ は x, y が有界のとき、すべての $t \geqq 0$ に対して有界、すなわち $\|x\|^2 + \|y\|^2 \leqq \alpha^2$ ならば $\|F(t, x, y)\| \leqq K(\alpha)$ となる $K(\alpha)$ が各 α に対して存在する。

(c) 連続な偏導函数をもつ実数値函数 $V(t, x, y)$ が存在し

てつぎの性質をもつ。

(i) $a(\|x\|^2+\|y\|^2) \leqq V(t,x,y) \leqq b(\|x\|^2+\|y\|^2)$,
ここで$a(r)$は連続な正定値函数で$r\to\infty$のとき$a(r)\to\infty$,
$b(r)$は連続函数で$r\to 0$のとき$b(r)\to 0$。

(ii) $\dot{V}(t,x,y) \leqq -W(x)+h(t)g(t,x,y)$, ここで$W(x)$は正定値で連続、$g(t,x,y)$は連続で, x, yが有界ならばすべての$t\geqq 0$に対して有界、そして$|h(t)|$は(5)をみたす。

このとき(x,y)空間の原点、すなわち$x=0$, $y=0$は *eventually stable* で、任意の$\alpha>0$に対して、$T(\alpha)>0$が存在し、$t_0\geqq T(\alpha)$なるあるt_0に対して$\|x(t_0)\|^2+\|y(t_0)\|^2<\alpha^2$ならば、$y(t)$は有界で、$t\to\infty$のとき$x(t)\to 0$。

さらに、ある$R_0>0$に対して、もし$\|x\|^2+\|y\|^2\geqq R_0^2$ならば$|g(t,x,y)|\leqq\varphi(V(t,x,y))$であると仮定すれば、すべての解$y(t)$は有界ですべての$x(t)$は$t\to\infty$のとき$x(t)\to 0$。ここで$\varphi(u)$は連続、$\varphi(u)>0$で、$\int^{\infty}\frac{du}{\varphi(u)}=\infty$をみたすような函数とする。

51