

ピストン問題の差分解法

京大工 野木達夫

ここでは, Gun tunnel^{2),3)} の一次元モデルを考える。
(図-1). 気体の運動と状態を支配する方程式として通常の
圧縮性流体の方程式を用いる。¹⁾

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0$$

$$(\rho u)_t + (p + \rho u^2)_x = 0$$

(1)

$$\left\{ \rho \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right) \right\}_t + \left\{ \rho u \left(e + \frac{1}{2} u^2 + \frac{p}{\rho} \right) \right\}_x = 0$$

$$p = (\gamma - 1) \rho e$$

ここで ρ が密度, u が速度, p が圧力, e が単位質量あたりの内部エネルギー, γ が比熱比である。Gun tunnel の中に押入されるピストンの運動方程式は $x = \xi(t)$ をピストン径路とするとき

$$(2) \quad \frac{d^2 \xi(t)}{dt^2} = p(t, \xi(t)-0) - p(t, \xi(t)+0), \quad \xi(0) = 0$$

で与えられる。しかもピストンのところを満たすべき境界条件は

$$(3) \quad u(t, \xi(t)-0) = u(t, \xi(t)+0) = \frac{d\xi(t)}{dt}$$

である。さらに右端 ($x = x_E$) における境界条件は

$$(4) \quad u(t, x_E) = 0.$$

初期条件としてはピストンの両側でそれぞれ静止した一様な状態を考える。

Gun tunnel の通常の稼働過程を上モデルで扱ったときのピストンの運動と波の伝搬の様子は図-2 のようになる。

この問題を差分法で解くためには、ピストンの近く、右端の壁の近く、そして内部の領域とそれぞれに違、たアルゴリズムを工夫する必要がある。

i) 内部領域における差分法 とくに不連続解としての衝撃波をうまくとらえる差分法が必要である。このための差分法としては大別して 2 種類ある。一つは Artificial viscosity を用いるもの、もう一つは不連続の分解によるもので代表的なものは前者では Lax-Wendroff の差分法^{5), 7)}、後者では Godunov の差分法^{4), 6), 7)} である。いずれも与えられたものだが Riemann 問題⁷⁾ に対する我々の実験では Godunov の方法の方がいくぶん良好とみたので以下では主としてこの方法を

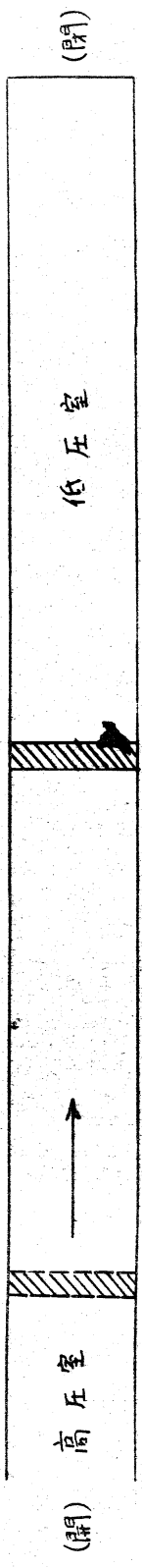


図-1

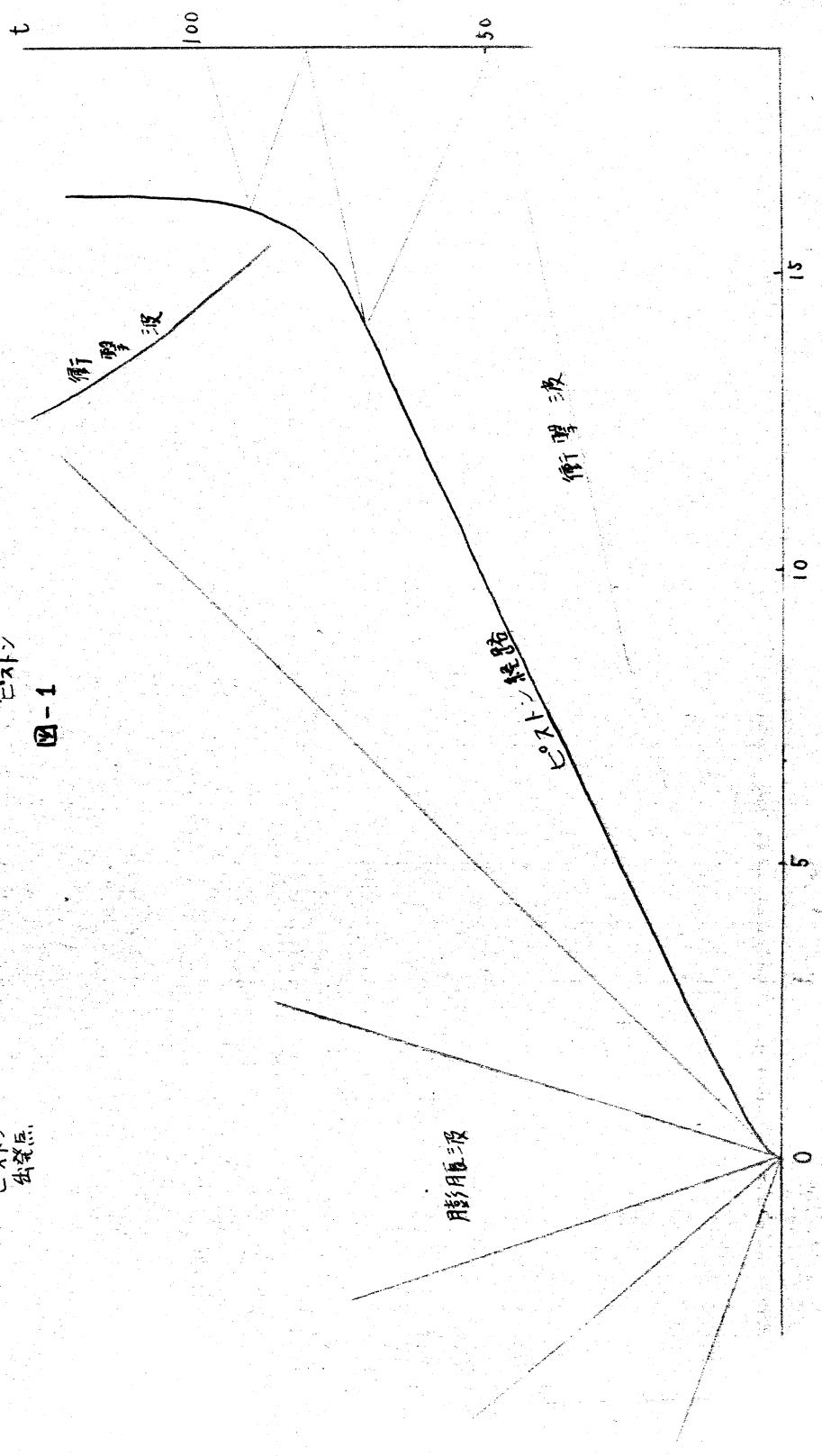


図-2

採用することにした。この方法を簡単に説明すると、ある時刻における格子点関数を階段関数とみなし、跳躍点での不連続の分証と計算して次のステップにおける各格子点まわりの平均値を算出し、それを与える階段関数から、再び計算をすめるといったものである。

ii) 右端の壁の近くでのアレイの波、壁における波の反射の問題の差分近似法について理論研究もやると始、たはかりに実際的な問題を解くときの依、てたつべき基礎にはなっていない。一般に双曲系の混合問題を差分近似すると余分な境界条件が必要になってくる。その条件のとり方がまた問題になる。その事状を簡単な例で説明しよう。流体力学方程式の線形近似の方程式についての混合問題

$$(5) \quad \begin{aligned} u_t &= v_x \\ v_t &= u_x \end{aligned} \quad t > 0, x > 0$$

$$u(0, x) = u(t, 0) = 0, \quad v(0, x) \text{ given}$$

に対し Godunov の差分法 ($\lambda = \Delta t / \Delta x$)

$$(6) \quad \begin{aligned} u^{j+\frac{1}{2}} &= u_{j+\frac{1}{2}} + \lambda (v_{j+1} - v_j), & v^{j+\frac{1}{2}} &= v_{j+\frac{1}{2}} + \lambda (u_{j+1} - u_j) \\ v_j &= \frac{v_{j+\frac{1}{2}} + v_{j-\frac{1}{2}} + u_{j+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}}}{2}, & u_j &= \frac{u_{j+\frac{1}{2}} + u_{j-\frac{1}{2}} + v_{j+\frac{1}{2}} - v_{j-\frac{1}{2}}}{2} \end{aligned}$$

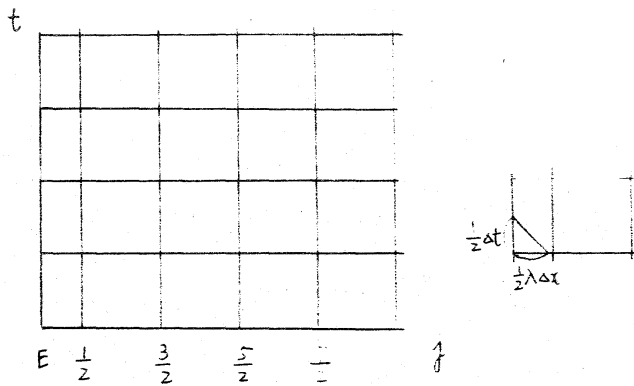


図-3

を適用する。この差分法を用いて計算を続行するには壁のところ
 ころに相当する値 U_0, V_0 を決める必要がある。 $U_0 = 0$ は
 与えられた境界条件からきまるが、 V_0 をうまく指定やらなけ
 ればならない。これが余分な境界条件とい、たものである。
 普通よく用いられるのは 特性曲線を使うもので、この場合
 成り立つ関係式

$$(7) \quad U_0 + V_0 = \lambda (u_{1/2} + v_{1/2}) + (1 - \lambda)(u_E + v_E)$$

を利用する。他の方法もいろいろ比較実験してみたが結局
 Godunov の方法には

$$(8) \quad U_0 + V_0 = u_{1/2} + v_{1/2}$$

を用いるのがよいという結果にた。先の特性曲線を用い
 る方法の方が精度はよいが、それはむしろ order 2 の Accu-
 racy をもつ Lax-Wendroff の差分法に整合したものな

のである。上の(8)式は波が壁にぶつかったときにできる反射波をまたいで成り立つ関係式である。この意味でなら非線形の流れ方程式にも拡張して用いることが可能になる。ちなみに壁で反射する衝撃波をまたいで成り立つ Rankine-Hugoniot の関係式から壁での状態を算出してやるものである。この方法の良さも実験によって確かめられた。

III) ピストンの近くでのアルゴリズム これが一番に問題になるところで、ピストンの位置が網目に対して動くためのアルゴリズムは複雑なものになる。いろいろな方法について定量的に優劣が判定できるように線形の問題(5)について考え、しかも一定加速でピストンを動かすときの問題について比較を試みた。その結果、厳密解との誤差がかなり小さくなる方法を選んだ。この方法を流体方程式の問題に対して拡張使用したものもやはり良好な結果を示したのでそれを紹介しよう。ピストン経路が網目に対して位置する仕方は Δt が小さいと次の2種類ある。

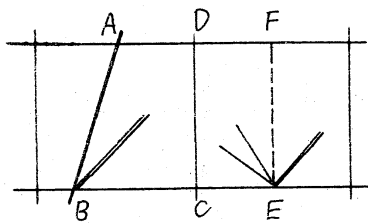


図-4a

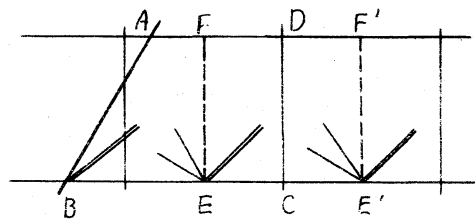


図-4b

図-4 a, b の B 点, C 点等の値がわかっているとき A 点 D 点等の値を求めることが問題になる。そのための微分方程式 (1) の積分表式を用いる。

$$\oint \rho dx - \rho u dt = 0$$

$$(9) \quad \oint \rho u dx - (p + \rho u^2) dt = 0$$

$$\oint \rho \left(e + \frac{u^2}{2} \right) dx - \rho u \left(e + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) dt = 0$$

1) 図-4a の積分路を AFEB ととることにすれば AF 上の積分値 (従って平均値) が AB, EF, BE 上の積分値から決定される。だから AB 上の平均値, EF 上の平均値を決定する必要がある。AB 上の平均値を求めるため, BE 間ではその平均値が一定に保たれ, ピストンが AB 間では一定速度で走るとみなすと点 B から発生する衝撃波をまたいで成り立つ Rankine-Hugoniot の関係式を利用してピストンの前面の状態が決定される。EF 上の値は BE 間の値と E 点より右の値との間の不連続の分解を解いて決まる。AF 上の平均値がわかると D 点の値が決まる。図-4b の場合には D 点の値を決めるには内部の点の取り扱い方をする。すなわち E 点 E' 点での不連続の分解から FF' 上の平均値を計算するものがある。以上の方法により, ピストンを一定加速 (途中から一定速度) で押し込んだ場合の計算例を図-5 に示す。

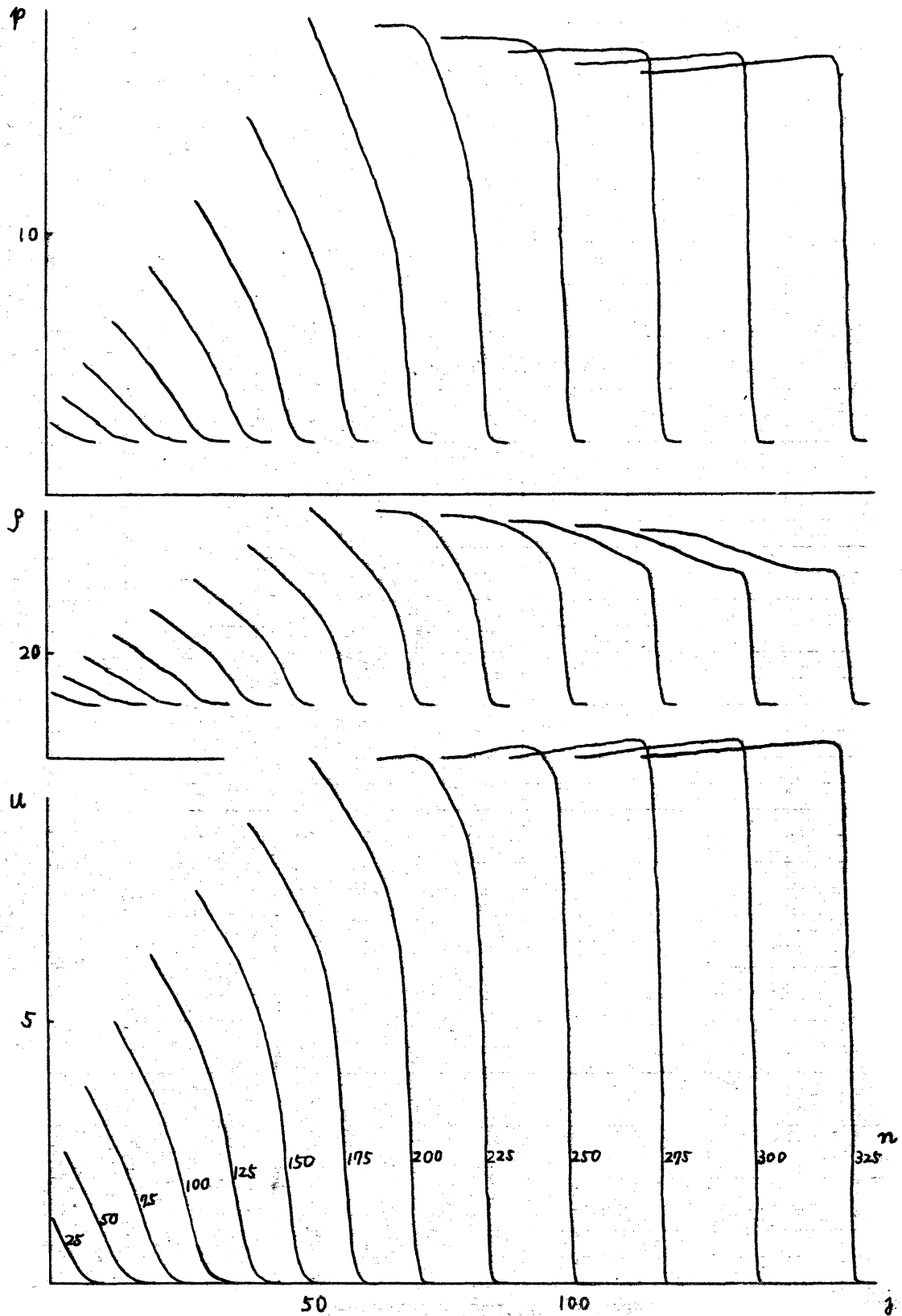


图-5 (nは繰り返しの回数)

次に本題であるところのピストンの運動が両側の状態から運動方程式によって決まる場合について考える。上にみたようにピストンが加速されていってその速度がわかるとピストンの前面の状態がわかった。そのとき後面には膨脹波が発生し波をよまうて成り立つ関係式からピストンの後面の状態も決定される。逆にピストン前面の圧力と後面の圧力がわかるとピストンの運動方程式から AB 上のピストン速度の平均値が決まる。

$$(10) \quad U_A = U_B + \Delta t (P_b - P_f), \quad \bar{U}_{AB} = \frac{U_A + U_B}{2}$$

ここで U_A, U_B は A 点, B 点でのピストン速度, \bar{U}_{AB} は AB 上の速度の平均値, P_b と P_f はピストンの後面と前面の圧力の平均値である。これらのことから \bar{U}_{AB} と P_b, P_f を決めるのに逐次計算を繰り返して収束させればよいことがわかる。こうしてピストンでの状態が決まるとピストンに近接した格子点での値の決定には積分表式(9)を用いられる。

前方については前にみた通りにやればよく後方についても同様な考察をすればよい。ピストンが減速するときには前方に膨脹波が発生し、後方に衝撃波が発生すると考えられる。

この方法によって計算した結果を図-2 (ピストン軌跡), 図-6 (圧力の変化) に示す。

初期条件

$$p(0, x) = \begin{cases} 23.57 \\ 1.0 \end{cases}$$

$$f(0, x) = \begin{cases} 33.0 \\ 1.4 \end{cases}$$

$$u(0, x) = 0.0$$

$$x_E = 18.8$$

$$\Delta x = 0.094$$

$$\lambda = 0.2$$

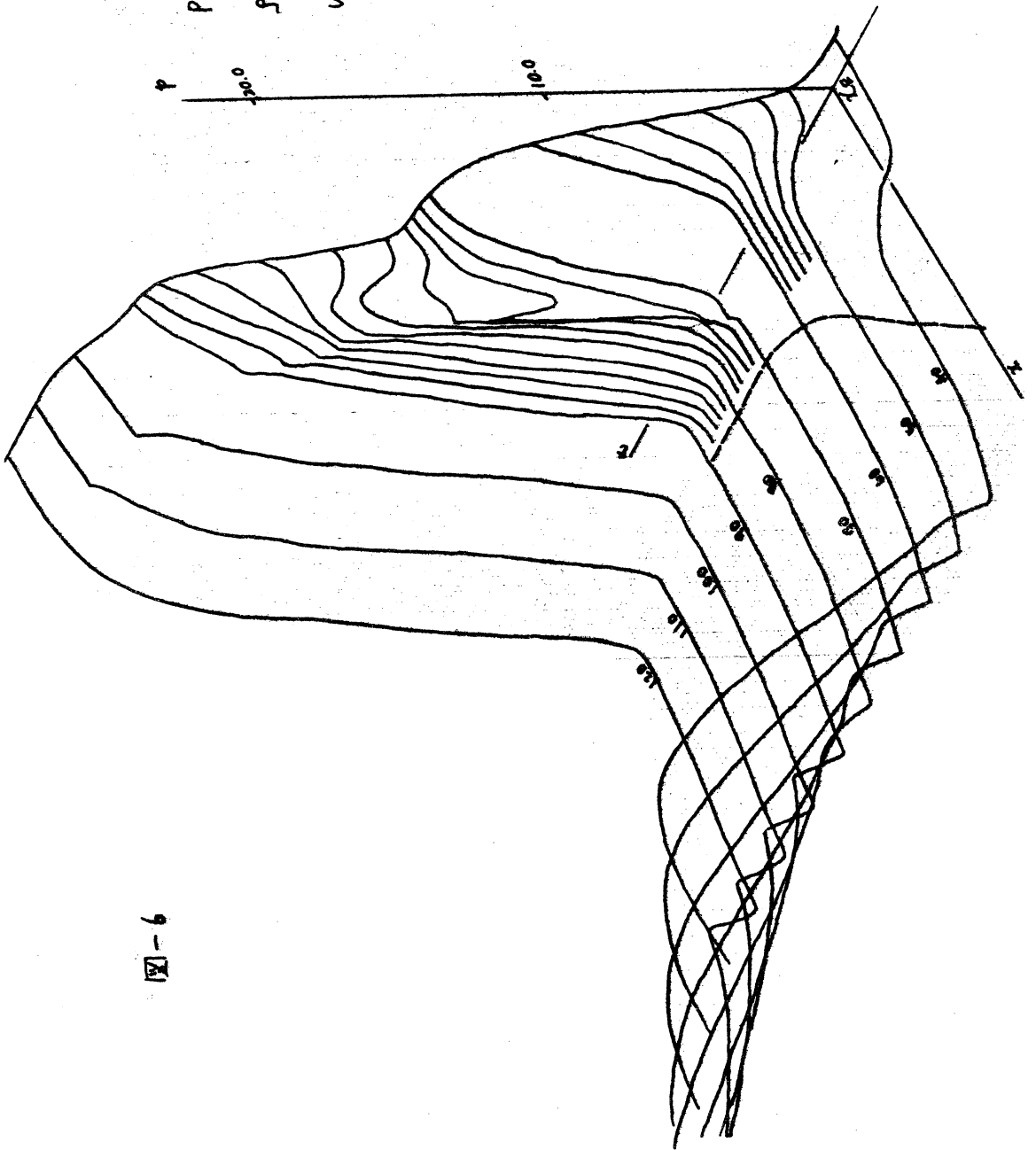


图-6

この報告では、アルゴリズムと数値実験の結果を示した。ここにあげた方法の良さという点での理論的裏付けはできていない。ただ保証といえは、より簡単な線形問題に対する準備の上にならなければならないことである。この種の非線形問題の数値計算について現在理論的に何もかも保証できるという段階ではない。しかしながらますます非線形偏微分方程式を解くことの重要性は増大してきている。それに対応するべき解法の研究ではここに報告したようなスタイルをとらざるを得ない。すなわち複雑な問題を分割することにより幾つかの単純な問題に分け、それぞれ基礎実験を積み重ねること、それらができないときには線形化問題に立ちもって工夫してみるということである。これらの単純な実験をいろいろの数値現象を細く観測することにより、欠点の原因を見出し改良を繰り返していく。このような技術的側面の強い研究を続ける中で理論的発展の端緒を見い出していく必要がある。

再び繰り返すことになると、計算機が今後あらゆる分野の数値計算に有効に働いてくれることを願うなら、数値実験自身を科学的に行う方法を確立することが必須である。それが又数値解析の理論的発展をささえていくものと確信する。

参考文献

- 1) Courant, K. and Friedrichs, K. O., *Supersonic flow and shock waves*, Interscience Publishers, Inc., 1948.
- 2) Stalker, R. J. *A Study of the Free-Piston shock tunnel*
AIAA Journal, Vol.5, No.12 1967
- 3) Kimura, T. *Studies on Hypersonic Gun Tunnel*
Ph.D. Thesis 1967
- 4) Годунов, С. К., Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики,
Mat. Сбор. Т. 47 (89), No.3, 1959
- 5) Lax, P. D. and Wendroff, B. *Systems of conservation laws*. *Comm. Pure Appl. Math.*, vol 13, 1960.
- 6) Годунов, С. К., Завродин, А. В. and Прокопов, Г. П.,
Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отошедшей ударной волной, *Выч. мат. и мат. физ.*,
Т. 1, No. 6, 1964.
- 7) 野木 達夫, 一次元の流体力学方程式に対する差分法, 数理解析研究所講究録 32, 1967.10.