数理解析研究所講究録
第63巻 1969年 63-68

周期解, 概周期解の存在

東北大理　　吉 沢 太 郎

$f(t)$ は $I: 0 \leqq t < \infty$ で定義された連続函数とする。 $f(t)$ が連続な概周期函数 $p(t)$ と, $t \to \infty$ のとき零に近ずく連続函数 $q(t)$ との和であるとき, $f(t)$ は漸近概周期函数であるといわれる。 すなわち,

(1) $$f(t) = p(t) + q(t)$$

漸近概周期函数 $f(t)$ に対して, その表現 (1) は一意的で, $f(t)$ は有界, 一様連続である。

<u>補題 1</u>. 漸近概周期函数 $f(t)$ は微分可能で, その導函数 $f'(t)$ もまた漸近概周期函数であるとき,

(2) $$f'(t) = p'(t) + q'(t),$$

ここで $p'(t)$, $q'(t)$ はそれぞれ $p(t)$, $q(t)$ の導函数。

漸近概周期函数はまたつぎのようにも定義することができ

る。$\tau_k > 0$, $\tau_k \to \infty$ $(k \to \infty)$ である任意の数列 $\{\tau_k\}$ に対して，$f(t+\tau_{k_j})$ が I の上で一様収束するような部分列 $\{\tau_{k_j}\}$ が存在するとき，$f(t)$ は漸近概周期函数であるといわれる。

概周期系

$$(3) \qquad x' = F(t, x) \qquad \left(' = \frac{d}{dt} \right)$$

を考え，(3) は有界な解 $\varphi(t)$ を持っていると仮定する。すなわち，$\|\varphi(t)\| \leqq B$ $(t \geqq 0)$。$D = \{x ; \|x\| \leqq B\}$, $R = (-\infty, \infty)$ とし，$F(t, x)$ は $R \times D$ で連続で，$x \in D$ に対して一様に，t の概周期函数であるとする。

定理 1 解 $\varphi(t)$ が漸近概周期函数ならば，系 (3) は概周期解 $p(t)$ を持つ。

したがって，概周期系が漸近概周期解を持てば，いつでも概周期解を持つことがわかる。

まず周期系に対する漸近概周期解の存在について考える。

$$(4) \qquad x' = F(t, x), \quad F(t+\omega, x) = F(t, x), \quad \omega \geqq 0$$

は $\|\varphi(t)\| \leqq B$ $(t \geqq 0)$ なる有界な解を持っているとする。$D^* = \{x ; \|x\| < B^*\}$, $B < B^*$, とし，$F(t, x)$ は $R \times D^*$ で連続であると仮定する。

定理 2 $\varphi(t)$ が $t \geqq 0$ で一様安定ならば，$\varphi(t)$ は (4) の漸

漸近概周期解である。　したがって系(4)は概周期解をもつ。
そしてそれは一様安定である。

<u>定理3</u>　定理2の仮定のもとで、$\varphi(t)$ が $t \geq 0$ で一様漸近安定ならば、系(4)はある整数 $m \geq 1$ に対して周期が $m\omega$ である周期解をもつ。　そしてそれは一様漸近安定である。

つぎに概周期系の漸近概周期解の存在について考える。
概周期系

$$(4) \qquad x' = F(t, x)$$

は $\|\varphi(t)\| \leq B$ $(t \geq 0)$ なる有界な解 $\varphi(t)$ を持つとする。　$F(t, x)$は $R \times D^*$ で連続で、$x \in D^*$ に対して一様に、t の概周期函数であると仮定する。

$R \times D^*$ 上で定義され R^n に値をもつ連続函数の空間 $C(R \times D^*, R^n)$ において、$T(F)$ で F の translate からできている函数の空間を表わす。　すなわち、$F_\tau \in T(F)$、ここで $F_\tau(t, x) = F(t+\tau, x)$、$\tau \in R$。　$\{K_s\}$ を $R \times D^* = \bigcup_{s=1}^{\infty} K_s$ となる compact set の列とし、各 s に対して、

$$\|F - G\|_s = \sup\{\|F(t, x) - G(t, x)\| \ ; \ (t, x) \in K_s\},$$

$$\rho_s(F, G) = \frac{\|F - G\|_s}{1 + \|F - G\|_s}$$

$\rho(F,G)=\sum_{s=1}^{\infty}2^{-s}\rho_s(F,G)$ とすれば，これは $C(R\times D^{*},R^{n})$ 上の compact-open topology に対する metric である。概周期函数 F の hull $H(F)$ は $H(F)=\overline{T(F)}$ で定義される。

$(0,x)$ を通る (4) の解を $\varphi(t,x,F)$ で表わす。

<u>定義</u> 任意の $\varepsilon>0$ に対して $\tau\geq 0$, $G\in H(F)$, $\rho(F_\tau,G)\leq\delta$, $\|\varphi(\tau,x,F)-y\|\leq\delta$ ならば，$t\geq 0$ に対して

$$\|\varphi(t+\tau,x,F)-\varphi(t,y,G)\|\leq\varepsilon$$

となるような $\delta(\varepsilon)>0$ が存在するとき，(4) の解 $\varphi(t,x,F)$ は stable under disturbances from $H(F)$ であるといわれる。

<u>定理 4</u> (4) の有界な解 $\varphi(t)$ が stable under disturbances from $H(F)$ ならば，$\varphi(t)$ は (4) の漸近概周期解である。したがって，系 (4) は概周期解をもつ。

もし $\varphi(t)$ が totally stable ならば，$\varphi(t)$ は stable under disturbances from $H(F)$ であるから，つぎの結果がえられる。

<u>系</u> (4) の有界な解 $\varphi(t)$ が totally stable ならば，(4) は概周期解をもつ。

<u>定理 5</u> 各 $G\in H(F)$ に対して $\lambda(G)>0$ が存在して，$x(t)$, $y(t)$ がすべての $t\in R$ に対し $x(t)\in D$, $y(t)\in D$ である

$$(5)\qquad x'=G(t,x)$$

の異なる解ならば，すべての $t \in R$ に対し

$$\| x(t) - y(t) \| \geqq \lambda(G)$$

ならば，(4)の有界な解 $\varphi(t)$ は漸近概周期解で，したがって(4)は概周期解をもつ。

系　定理5の仮定のもとで，(4)の解 $\varphi(t)$ がすべての $t \in R$ に対し，$\| \varphi(t) \| \leqq B$ ならば，$\varphi(t)$ は概周期解である。

つぎの定理に対しては，すべての $G \in H(F)$ に対して，(5)の解は初期値問題に関して一意的であると仮定する。

定理6　もし(4)の有界な解 $\varphi(t)$ が一様漸近安定ならば $\varphi(t)$ は漸近概周期解である。したがって系(4)は一様漸近安定な概周期解をもつ。

この定理の証明においてつぎの事実をつかう。すなわち任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在し，任意の $t_0 \in I$ に対し $\| \varphi(t_0) - x_0 \| < \delta$，$\| g(t, x) \| < \delta$ ならば $t_0 \leqq t \leqq t_0 + T$ 上で

$$\| \varphi(t) - x(t; x_0, t_0) \| < \varepsilon ,$$

ここで T は与えられた定数で $x(t; x_0, t_0)$ は

$$x' = F(t, x) + g(t, x)$$

の (t_0, x_0) を通る解である。

このことを示すために各 $G \in H(F)$ に対する解の一意性を必要とした。しかし，$F(t,x)$ が周期函数のとき，$\varphi(t)$ が一様安定ならば，一意性の仮定なしで上のことが成り立つ。