

コンパクト正曲率リーマン多様体の構造

— 測地線論を用いて —

農工大 中川久雄

東工大 塩次勝博

§0. Introduction.

我々が考える多様体 M は n -次元 ($n \geq 2$) 連結、コンパクトなリーマン多様体で、 M の断面曲率は至る所正とする。測地線を用いて M の構造を調べるときに重要な手がかりの1つとして、exponential map が1対1に対応する近傍の大きさを表わす cut locus の距離評価がある。又、もう1つの重要な手がかりとして M の diameter $d(M)$ の評価がある。今迄に解明された範囲では、前者は断面曲率の最大値と M の基本群に、後者は断面曲率の最大値と M の基本群にそれぞれ深い関係がある。しかしこれらの評価の問題は未解決の所が多い。

さて、「 M の位相的構造と曲率の最大値、最小値とを固定して、 M を変化させたときに、上記2つの値の \inf, \sup を attain する M は何か？」と云う問題を考えたとき、正定曲率空間、コンパクト対称空間(階数1)と、具体的な例がしばしば現れる。

従ってこの様な場合には、ある特定の長さを持つ閉測地線が M に存在する。そこで「 M の曲率の最大、最小値を固定したとき、もしも M がある特定の長さの閉測地線を持つならば M の構造が決定されるか？」と云ふ問題を考へる。

以下では今迄に、Toponogov, Klingenberg, Berger, 塚本等により研究された諸結果を述べ、もしも存在するならばこれらの内に含まれてゐる問題点を指摘し、著者達の研究を紹介する。

§1. 準備.

M は n 次元 ($n \geq 2$) 連結、コンパクトな C^∞ -級リーマン多様体で、 M の任意の plane element σ の決定する断面曲率 K_σ は

$$(1) \quad 0 < \delta \leq K_\sigma \leq 1$$

を満足するものとする。既存の諸定理をあげる。

定理1 (Myers [11]) 連結、完備な M の断面曲率 K_σ が M の全ての plane element σ に対して $0 < \delta \leq K_\sigma$ を満足せば、 M はコンパクトで、 M の diameter $d(M)$ は $d(M) \leq \pi/\sqrt{\delta}$ を満たす。

定理2 (Ranch の比較定理 [17], [12])

M, \tilde{M} は同次元リーマン多様体で、 $\Gamma = \{ \gamma(t) \mid 0 \leq t \leq l \}$, $\tilde{\Gamma} = \{ \tilde{\gamma}(t) \mid 0 \leq t \leq l \}$ は夫々 M, \tilde{M} の測地線分とする。 $\gamma, \tilde{\gamma}$ は $\Gamma, \tilde{\Gamma}$ に沿う Jacobi 場で $\gamma(0) = \tilde{\gamma}(0) = 0$, $\langle \gamma'(0), \xi'(0) \rangle = \langle \tilde{\gamma}'(0), \tilde{\xi}'(0) \rangle = 0$ 、かつ $\|\gamma'(0)\| = \|\tilde{\gamma}'(0)\|$ なるものとする。 $\tilde{\Gamma}$ は $(0, l)$ に 0 の共役点を持た

ず, $K\tilde{\alpha} \cong K\alpha$ が任意の $t \in [0, l]$, $\sigma, \tilde{\sigma}$ ($\sigma(t) = \gamma(t)$, $\pi(\tilde{\sigma}) = \sigma(t)$) に対し成り立つならば $\|\gamma(t)\| \geq \|\tilde{\gamma}(t)\|$ が $0 \leq t \leq l$ に対し成り立つ。

M 上の 2 点 P, Q に対し P から Q への最短測地線分の全体を $G(P, Q)$ と書くことにする。測地線 $P = \{\gamma(t)\} (0 \leq t \leq l)$ は弧長を $|\dot{\gamma}| = 1$ とすることにする。 M の 3 点 P, Q, R を頂点とする測地三角形 $\Delta = \Delta(P, Q, R)$ とは次の条件を満たす triple (T, Q, Z) のことを言う。

$$(1) \quad T \in G(Q, R) \text{ (or } G(R, Q)), \quad Q \in G(R, P) \text{ (or } G(P, R))$$

$$Z \in G(P, Q) \text{ (or } G(Q, P))$$

$$(2) \quad P \neq Q \neq R \neq P.$$

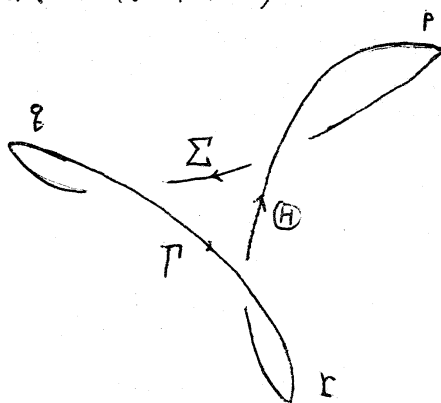


Fig 1

M 上の 3 点 P, Q, R と $T \in G(R, Q)$, $Q \in G(R, P)$ をとり, $T = \{\gamma(t)\} (0 \leq t \leq a)$, $Q = \{\theta(t)\} (0 \leq t \leq b)$ とする。3 点 $\gamma(a), R, \theta(b)$ を頂点にもつ任意の測地三角形に対応する $S_{\frac{1}{\sqrt{g}}}$ 上の等長な三角形 $\tilde{\Delta}(\tilde{\gamma}(a), \tilde{r}, \tilde{\theta}(b))$ に対し, \tilde{r} に対する頂角 $\alpha(\tilde{\gamma}(a), \tilde{r}, \tilde{\theta}(b)) \equiv \alpha(\Delta, t)$ とおいたとき次が成立する。但し S_r^n は半径 r の標準的 n -次元球を表す。

定理3 (Toponogov [19], Convexity Condition)

P. 8. 1 上の頂角に $\epsilon > 0$ 測地三辺形 $\Delta = \Delta(T, \Theta, Z)$ の周長が $2\pi/\epsilon$ 未満ならば、 $0 \leq \delta_1 \leq \delta_2 \leq a$, $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq b$ なる任意の $\delta_1, \delta_2, t_1, t_2$ に対し $\alpha(\delta_1, t_1) \geq \alpha(\delta_2, t_2)$ が成立する。

これを基本的に用いて導かれた定理として

定理4 (Toponogov [19])

完備な M が (1) を満たすとき

(1) 任意の測地三辺形 $\Delta(T, \Theta, Z)$ の周長は $2\pi/\epsilon$ をこえない。

(2) 周長が $2\pi/\epsilon$ なる $\Delta(T, \Theta, Z)$ が存在したとき

(a) (T, Θ, Z) の各辺の長さが他の 2 辺の長さの和より小ならば、 (T, Θ, Z) は単純閉測地線であり特に $d(M) = \pi/\epsilon$ となる。

(b) 辺長が π/ϵ なる辺が存在するならば $d(M) = \pi/\epsilon$ である。

(3) $d(M) = \pi/\epsilon$ ならば M は $S_{\pi/\epsilon}^n$ に等長である。

定理3、定理4より導かれた結果として

定理5 (Toponogov [19], 球面比較定理)

M の任意の測地三辺形 $\Delta(T, \Theta, Z)$ に対し、 $S_{\pi/\epsilon}^2$ 上の三辺形 $(\tilde{T}, \tilde{\Theta}, \tilde{Z})$ を対応辺が等長になるようにとったとき、 M が $S_{\pi/\epsilon}^n$ に等長の場合には Δ に合同な $\tilde{\Delta}$ を採用するとする規約の下に、2 つの三辺形 $\Delta, \tilde{\Delta}$ の対応角は Δ の方が小さくない。

以下 M の要素に対応する $S_{\pi/\epsilon}^2$ 上の要素には「 \sim 」をつけて表わすことにする。Synge の Lemma を利用して Klingenberg は

次の節を導く。

定理 6 (Klingenberg [5])

M は連結、コンパクトな偶数次元 $n-2 > 0$ の多様体で (1) を満たす時、

(1) M が orientable ならば $d(p, C(p)) \geq \pi$, for any $p \in M$,

(2) M が non-orientable ならば $\pi_1(M) = \mathbb{Z}_2$ であり $d(p, C(p)) \geq \pi/2$

が任意の $p \in M$ に対して成立する。

更に一般次元の多様体のときは π -理論を用いて導く。

定理 7 (Klingenberg [7])

M はコンパクト、単連結な $n-2 > 0$ の多様体で、 $1/4 < \delta \leq K_0 \leq 1$

を満たすならば M の任意の点 p に対して

$$(2) \quad d(p, C(p)) \geq \pi$$

が成立する。

この評価式を用いて次の定理が導かれる

定理 8 (Klingenberg [7], Sphere Theorem)

単連結な M が $1/4 < \delta \leq K_0 \leq 1$ を満たせば M は S^n に同相で

ある。

定理 9 (Berger [1])

偶数次元コンパクト、単連結な M が $1/4 \leq K_0 \leq 1$ を満たすとき、

(1) $d(M) = \pi$ ならば M は標準的計量をもつ rank 1 のコンパクト対称空間に等長である。

(2) $d(M) > \pi$ ならば M は S^n に同相である。

これらの諸定理は全て完全に check された(少なくとも著者達には)ので、以下の推論の根拠とする。証明は全て省略する。以下、 M は n -次元、連結、コンパクト リーマン多様体で (1) が成立するものとし、かような M のみを考える。

② 又、diameter の評価に関連した諸問題。

定理 1 により $d(M) \leq \pi/\sqrt{3}$ であるが、 $d(M) = \pi/\sqrt{3}$ のとき M が $S_{\pi/\sqrt{3}}^3$ に等長になることが Toponogov により証明された。そこで M の長さが $\pi/\sqrt{3}$ の単純閉測地線が存在したとき M は $S_{\pi/\sqrt{3}}^3$ に等長になるであろうか？ 一般には反例があるので無条件には云えない。 $n=3$ のとき order 3 の cyclic group G で生成元 σ が $\sigma = \begin{bmatrix} R(1/3) & \\ & R(1/3) \end{bmatrix}$ を $S_{\pi/\sqrt{3}}^3$ を割る 2 作の $L(1,3)$ と $L(1,3)$ とは長さが $2\pi/\sqrt{3}$ の単純閉測地線が存在する。この例では長さが $2\pi/\sqrt{3}$ の単純閉測地線は 4 本の最短測地線が 4 等分されて 11 する (以下この場合を閉測地線が四辺形分割されたと言うことにする)。

Toponogov は次の定理を主張している。

定理 2.1 (Toponogov [18])

n -次元単連結な M と長さが $2\pi/\sqrt{3}$ の単純閉測地線が存在すれば M は $S_{\pi/\sqrt{3}}^3$ に等長である。

注意 1. 「単純閉測地線とは self intersect しない閉測地線のことを指す。

$2\pi/\delta$ の閉測地線が三辺形分割されるならば (必然的に単純にあり) 定理 4 によって M は $S_{\frac{2\pi}{\delta}}^2$ に等長となる。よって標本は次の定理 (予想) を与えた。

定理 2.2 (Tsukamoto [207])

単連結な M が $1/4 \leq \delta \leq K_0 \leq 1$ を満たし、 M に長さ $2\pi/\delta$ の単純閉測地線が存在すれば M は $S_{\frac{2\pi}{\delta}}^n$ に等長である。

注意 2. この証明には間違ひがあるので予想の段階にとどまる。

さて、標本は長さ $2\pi/\delta$ の単純閉測地線が四辺形分割される場合球に等長になるかを考察した。彼らの得た結果は以下である。

定理 2.3 (Sugimoto [6])

M は長さ $2\pi/\delta$ の単純閉測地線 Γ で四辺形分割可能であるものを許容したと仮定する。もしも Γ の向かい合った辺の長さが等しくないならば M は $S_{\frac{2\pi}{\delta}}^n$ に等長である。

定理 2.4 (Sugimoto [6])

$1/4 \leq \delta \leq K_0 \leq 1$ を満たす M が四辺形分割可能な長さ $2\pi/\delta$ の単純閉測地線 Γ をもつとき、もしも Γ の四辺の長さが全て同時に等しくないならば M は $S_{\frac{2\pi}{\delta}}^n$ に等長である。

注意 3. M が単連結で、 $\delta > 1/4$ のとき、もしも長さ $2\pi/\delta$ の閉測地線 (単純である必要は全くない?) が存在すれば

M は $S_{\frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}}$ に等長である。

注意4. 定理2.4では単連結を仮定しない。一般に $d(M) > \pi/2\sqrt{\delta}$ ならば M は単連結となり(補題2.10), この場合には単連結が仮定から導かれる。しかし「単連結な M が $1/4 \leq \delta \leq K_0 \leq 1$ のとき、四辺形分割できる長さ $\pi/2\sqrt{\delta}$ の閉測地線(単純)を持つならば、 M は $S_{\frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}}$ に等長である。」が成立するか否かは未解決である。

注意5. 定理2.4で全2の辺長が同時に $\pi/2\sqrt{\delta}$ に等しい場合、レゾルバ空間 $L(1,3)$ があるのでこの仮定は除外できない。

注意6. Klingenberg [8] は完備、単連結な M が $1/4 \leq K_0 \leq 1$ をみたすならば、 M の任意の点 p に対して $d(p, C(p)) \geq \pi$ が成立すると主張している。しかしこの定理の証明には大きな論理的飛躍があり、完全に follow できない。この問題は実は末節の補意を参照せよ。本稿ではこの「定理」を定理と承認せよ立場をとる。もしこの「定理」が定理であるならば、塚本の予想は肯定的に解決されることが示される。その場合の証明は次の定理の証明と全く同じである。

定理2.5 [Sugimoto [16])

偶次元単連結な M が $1/4 \leq \delta \leq K_0 \leq 1$ をみたし、長さが $\pi/2\sqrt{\delta}$ の閉測地線(単純であることは仮定する必要ない)が M に存在すれば M は $S_{\frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}}$ に等長である。

さて、上述の諸結果は目標を球にありたきのであった。そ
 こで単連結でない M を考えよう。この場合 $d(M) \leq \pi/2\delta$ であ
 るが、特に $d(M) = \pi/2\delta$ となる場合に注目しよう。Example と
 しでは、 $PR^2(\delta)$, $S^3_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}$ を order k の cyclic group G が生成元
 が $\begin{bmatrix} R(1/k) \\ R(1/k) \end{bmatrix}$ をもつもので割った作られた $L(1, k)$, 又、 $\varepsilon = 1/4$
 の場合には rank 1 のコンパクト対称空間等がある。さて、
 $d(M) = \pi/2\delta$ なる仮定に更に追加の条件をつけ加えて、 M の
 構造が決定できたりかを調べる。

定理 2.6 (Shichama [15])

M は $1/4 < \delta \leq K_0 \leq 1$ を満たし、 $\pi_1(M) = \mathbb{Z}_2$ と仮定する。
 もしも $d(M) = \pi/2\delta$ ならば M は $PR^n(\delta)$ に等長である。又、
 もしも長さ π/δ の閉測地線が M に存在すれば、 M は $PR^n(\delta)$
 に等長である。

定理 2.7 (Shichama [15])

M は $1/4 < \delta \leq K_0 \leq 1$ を満たすものとする。次のいずれの場合
 にも M は曲率 δ の定曲率空間となる。

- (1) $\pi_1(M) = \mathbb{Z}_2$ であり、長さ $2\pi/3\sqrt{\delta}$ の閉測地線が存在する。
- (2) $\pi_1(M) = \mathbb{Z}_4$ であり、長さ $\pi/2\sqrt{\delta}$ の閉測地線が存在する。

注意 7. 定理 2.6, 2.7 に於て $\delta > 1/4$ なる仮定は M の
 universal covering manifold \tilde{M} に於て cut, locus の距離評価
 が π 以上であることを保証する為につけられた苦しみの仮定で

ある。これらの証明の根本は注意3にある。

この節の最後に $d(M)$ の infimum に注目した Berger の結果を紹介する。

定理 2.8 (Berger [3])

M はコンパクト、単連結、偶数次元リーマン多様体で、(1) をみたすものとする。もしも $d(M) = \pi$ ならば、 M の測地線は全て長さ 2π の単純閉測地線である。

注意 8. Bott の定理 [] によりこのとき M の homology group は rank 1 のコンパクト対称空間のそれと同型的になる。

以上の諸結果の証明は §4 で与えることとし、次に cut locus の評価に関連した問題も考えよう。

§3. Cut locus の評価に関連した諸問題。

M 上の関数 $p \rightarrow \delta(p) \equiv d(p, C(p))$ は下に半連続な関数であるから M のコンパクト性により M 上で最小値 δ_0 をとる。 M の各点 p に対する接空間 M_p 内の中心 O 、半径 δ_0 の開球内では \exp_p は 1 対 1 にその像と対応する。 δ_0 の値に $\epsilon > 0$ は (定理 6, 定理 7 に於て) δ が M に適当な条件がつけば調和される。

我々は δ_0 の値が attain される M が特に、長さ $2\delta_0$ の閉測地線を許容する場合を考える。一般に δ_0 の値が attain される M には長さ $2\delta_0$ の閉測地線が存在すると言う保証はない。しかし長さ $2\delta_0$ の閉測地線が M に存在すれば、その M は

$d(p_0, c(p_0)) = \lambda_0$ なる p_0 をとる。

定理 3.1 (Klingenberg [6])

M はコンパクト単連結な 2次元リーマン多様体で、 M の Gauss 曲率 K は至る所 $0 < K \leq 1$ を満たすものとする。 M の単純閉測地線分は長さが 2π 以上であり、もしも長さ $\pm 2\pi$ の単純閉測地線分が M に存在すれば M は S^2 に等長である。

定理 3.2 (Klingenberg [6])

定理 3.1 と同じ M が成り立つとき、 M の任意の点 p に対して $d(p, c(p)) \geq \pi$ が成立する。特に、 $d(p, q) \leq \pi$ が任意の点 p, q に対して成立するならば M は S^2 に等長である。

注意 9. これより直ちに 2次元コンパクト単連結な M が $0 < K \leq 1$ で $d(M) = \pi$ ならば M は S^2 に等長である。

±2 偶数次元多様体の場合には

定理 3.3 (Tsukamoto [20])

M は偶数次元単連結なリーマン多様体で、 $1/4 \leq K \leq 1$ とする。 M が長さ $\pm 2\pi$ の閉測地線が存在すれば M は標準的計量をもち、rank 1 のコンパクト対称空間の 1 つに等長である。又特に $1/4 < K \leq 1$ ならば M は S^n に等長である。

注意 10. 塚本の本論文では偶数次元を仮定して行っている。この証明は cut locus の距離評価が π 以上であることを essential に使うために偶数次元の仮定が前半の主張に於ては必要であ

る。一般に「コホモロジー単連結な M が $0 < K_0 \leq 1$ を満たすと M の任意の点 P に対し $d(P, \partial CP) \geq \pi$ である。」と云う命題は真であることが Berger [1] により示されている。

次に単連結でない M について得られた結果を述べる。

定理 3.4 (Shiohama [15])

M はコホモロジー-2次元多様体で $1/4 < \delta \leq K_0 \leq 1$ を満たし、 $\pi_1(M) = \mathbb{Z}_k$ とする。 M に長さ $2\pi/k$ の閉測地線が存在すれば M は曲率 1 の定曲率空間である。

特に 3次元、正定曲率リ-マン多様体については Spherical Space Form Problem により M は S^3/G となり、運動群 G が完全に分類されている。詳細は Wolf の本を参照されたい [20]。§2 の定理 2.7 に述べた正定曲率空間は、次元が 3 と仮定した場合、いくつかの運動群 G で S^3_{16} を割ったものになることが示されている。しかし我々は次の結果を得た。

定理 3.5 (Shiohama [15])

M はコホモロジー可符号 3次元リ-マン多様体で、 $\pi_1(M) = \mathbb{Z}_k$ であり、 $1/4 < \delta \leq K_0 \leq 1$ とする。 M に長さ $2\pi/k$ の閉測地線が存在するならば、 M は $L(1, k)$ と等長である。但し、 $L(1, 3) = S^3_1/G$ で、 G は order k の cyclic group \mathbb{Z}_k の生成元 θ の $\rho = \begin{bmatrix} R(1/k) & \\ & R(1/k) \end{bmatrix}$, $\rho = \rho \circ R(\theta)$ は平面の回転で、 $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos 2\pi\theta & \sin 2\pi\theta \\ -\sin 2\pi\theta & \cos 2\pi\theta \end{bmatrix}$ を表わす。

§4. 定理2.1—定理2.8の証明。

この節は §2 でおおむね定理を証明する。しかし定理2.1については完全に follow できないので疑問点を指摘することと定める。

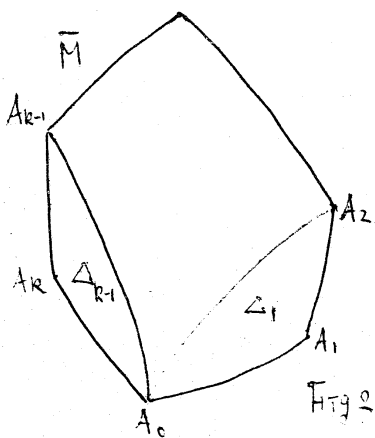
I. 定理2.1について。

補題 M内の最短測地線分により構成された多角形Pが凸多角形ならばPの周長は $2\pi/\sqrt{g}$ を達成する。

証明. MはPにより2つの単連結な domain D, D'に分けられる。Pに沿ってDをD'に貼りつけて得られる曲面上とする。Alexandrovの定理によつて閉曲面であり $K \equiv 8$ を満たす。Pの頂点を A_0, A_1, \dots, A_k としたとき、P内の最短測地線分を A_0A_i を結ぶ。 A_0, A_i, A_{i+1} を頂点とする三辺形 $\Delta_i = \Delta_i(A_0, A_i, A_{i+1})$ に対応する $S_{\frac{2}{g}}^2$ 上の等辺な三辺形 $\tilde{\Delta}_i = \tilde{\Delta}_i(\tilde{A}_0, \tilde{A}_i, \tilde{A}_{i+1})$ を作る。 $\tilde{\Delta}_2$ を $\tilde{\Delta}_1$ と辺 $\tilde{A}_0\tilde{A}_2$ を共有する様に $\tilde{\Delta}_1$ の外側に作図し、以下同様に $\tilde{\Delta}_{k-1}$ まで作図する。定理5.1より

$(\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_k)$ は $S_{\frac{2}{g}}^2$ 上の凸多角形になり、従つて周長は $2\pi/\sqrt{g}$ を達成する。

もしもこの周長が $2\pi/\sqrt{g}$ に等しいならばこの多角形は大円もしくは lune (= 弓形) になることは自明である。



定理の証明. 長さ $2\pi/\sqrt{g}$ の単純閉測地線 M 上に部分弧が最短測地線分になっているように分奠せよ. これらの分奠を順次 A_0, A_1, \dots, A_k とする. この単純閉測地線により M は 2 つの domain D, \bar{D} に分れる. Alexandrov の貼りつき定理により A_0, A_1 は D 内の最短測地線分で結ばれるのでこのとき $\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_k$ は $S_{\sqrt{g}}^2$ 上の大円になり, 従って A_0 と A_0 の分奠 (閉測地線上の) までの距離が $2\pi/\sqrt{g}$ になり定理 4 の (3) により D 内では定曲率 g になる. D を \bar{D} に貼りつけ \bar{D} で同様の考察を行えば \bar{D} 内でも定曲率 g になり, M は単連結であるから $2\pi/\sqrt{g}$ に等長になる.

注意 II. 上に述べたことは Toponogov の論文 [] を翻訳しただけであり, Alexandrov の貼りつき定理が理解出来ているので, この論証には根拠がある.

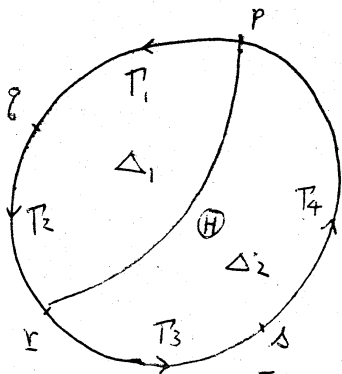
II 定理 2.2 について

注意 I で述べた立場上, $g = 2$ は偶数次元を仮定する. 単純閉測地線を $\Gamma = \{\gamma(t) \mid 0 \leq t \leq 2\pi/\sqrt{g}\}$ とする. $\gamma(0) = \gamma(2\pi/\sqrt{g}) = p$, $\gamma(\pi/2\sqrt{g}) = q$, $\gamma(\pi/\sqrt{g}) = r$, $\gamma(3\pi/2\sqrt{g}) = s$ とおく. $\pi/2\sqrt{g} \leq \pi$ なる各部分弧は最短測地線分になっている. $\Theta \in G(p, \Gamma)$ をとり, $\Theta = \{\theta(t) \mid 0 \leq t \leq \ell\}$ とおくと, 一般性を失うことなく $\angle(\gamma(0), \theta(0)) \leq \pi/2$ としよ. (p, q, Γ) を頂角とする測地三辺形に於いて, $S_{\sqrt{g}}^2$ 上の三辺形 $(\hat{p}, \hat{q}, \hat{\Gamma})$ を $d(p, q) = d(\hat{p}, \hat{q})$,

$d(p, r) = d(\hat{p}, \hat{r})$, $\chi(\hat{e}, p, r) = \chi(\hat{e}, \hat{p}, \hat{r})$ とおきよりに定め
 るは、定理5に基づいて $d(\hat{e}, \hat{r}) \geq d(\hat{e}, r) = \pi/2\sqrt{g}$ 。一方
 球面三角法を $(\hat{p}, \hat{e}, \hat{r})$ に適用して $\cos d(\hat{e}, \hat{r}) \geq 0$ 。従って
 $d(\hat{e}, \hat{r}) \leq \pi/2\sqrt{g}$ 。故に $d(\hat{e}, \hat{r}) = \pi/2\sqrt{g}$ となり矛盾は生じない。
 この証明方法は予想の段階にとどまるであろう。完全な証明
 は(偶数次元を仮定して)以下に示されるであろう。

III. 定理3.4.5の証明.

まず、定理3を証明する。 $\Gamma = \{t\omega\} (0 \leq t \leq 2\pi/\sqrt{g})$ を四辺形
 分割可能な単純閉測地線とし、辺を T_1, T_2, T_3, T_4 , $\Sigma(T_i)$
 $= a_i$ とおき、頂点は p, e, r, s とする (Fig 3 参照)。



$\Theta \in G(p, r)$ とし、 $\Theta = \{t\omega\} (0 \leq t \leq l)$ と
 する。定理4に基づき $l < \pi/\sqrt{g}$, $a_i < \pi/\sqrt{g}$
 なる場合のみ考える。 $\Delta_1 = (T_1, T_2, \Theta)$
 $\Delta_2 = (\Theta, T_3, T_4)$ に対応する $S_{\frac{1}{\sqrt{g}}}^2$ 上の
 等長な三辺形をそれぞれ $\tilde{\Delta}_1, \tilde{\Delta}_2$ とし、 $\tilde{\Theta}$ を

Fig 3 共有し、 $\tilde{\Delta}_2$ の外側に $\tilde{\Delta}_1$ を作図する。

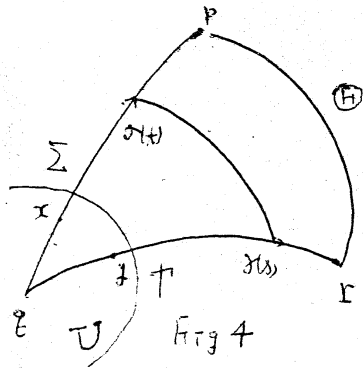
このとき $(\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{T}_3, \tilde{T}_4)$ は $S_{\frac{1}{\sqrt{g}}}^2$ 上の凸四辺形の周長が $2\pi/\sqrt{g}$
 である。 $\theta(\omega) \neq \pm \psi(\omega)$ なる ω と $l < \pi/\sqrt{g}$ により、四辺形 $(\tilde{T}_1,$
 $\tilde{T}_2, \tilde{T}_3, \tilde{T}_4)$ は辺長が π/\sqrt{g} なる lune (= 辺形) である。故に
 $a_1 + a_4 = a_2 + a_3 = \pi/\sqrt{g}$ 。 $\Sigma \in G(e, s)$ に対し
 ても同様にし、 $a_1 + a_2 = a_3 + a_4$ を得る。従って $a_1 = a_3, a_2 = a_4$

と右)仮定に反する。即ち $l < \sqrt{a}$ 且 $a < \sqrt{a}$ なる場合は我々の仮定の下には起こらぬ。

定理4を証明する為の準備として次の命題と補題を述べる。

命題4.1 (Sugimoto [16])

M の 3 点 P, Q, R を頂点に持つ測地三辺形 (P, Q, R) に対応する等しい辺長をもつ $S^2_{\sqrt{a}}$ 上の三辺形 $(\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R})$ に於て、もしも $\angle(P, Q, R) = \angle(\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R})$ なるば $\Sigma \in G(Q, P), \Gamma \in G(Q, R)$ 上の任意の点 $(u), (v)$ に対して $d(\sigma(u), \eta(v)) = d(\tilde{\sigma}(u), \tilde{\eta}(v))$ が成立し、 Γ, Σ を境界に持つ 2次元全測地的曲面片で Gauss 曲率が一定値 κ となるものが存在する。

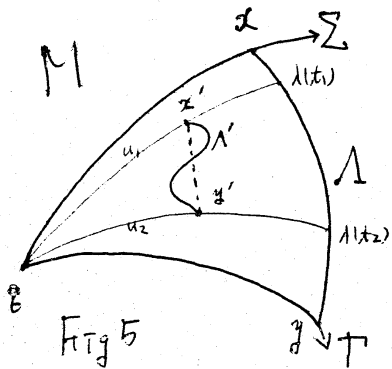


前半の証明。三辺形 $(\sigma(u), \eta(v))$ に対応する $S^2_{\sqrt{a}}$ 上の等長の三辺形 $(\tilde{\sigma}(u), \tilde{\eta}(v))$ に於て、定理3と定理5から直ちに、 $\angle(\tilde{\sigma}(u), \tilde{\eta}(v)) = \angle(\tilde{\sigma}(u), \tilde{\eta}(v))$ 。従って、2つの球面三辺形 $(\tilde{\sigma}(u), \tilde{\eta}(v))$ と $(\tilde{\sigma}(u), \tilde{\eta}(v))$ とは合同ゆえ $d(\tilde{\sigma}(u), \tilde{\eta}(v)) = d(\sigma(u), \eta(v)) = d(\tilde{\sigma}(u), \tilde{\eta}(v))$ 。

後半の証明。

ε を中心とした半径 2ε の M の凸球近傍を \mathcal{U} とする (十分小なる $\varepsilon > 0$ に対して)。 $x \in \Sigma, y \in \Gamma$ を $d(x, y) < \varepsilon, d(y, z) < \varepsilon$ となる z に任意にとり、 \mathcal{U} を固定する。 (x, y, z) に対応する $S^2_{\sqrt{a}}$ 上の三辺形 $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ をとり、 $\tilde{\lambda} \in G(\tilde{x}, \tilde{y}), \tilde{\lambda} = \{\tilde{\lambda}(t)\} (0 \leq t \leq a)$

とすると明らかに $d(\tilde{x}, \tilde{\lambda}(t)) < 2\varepsilon$ である。 $\tilde{\Phi}_t \in G(\tilde{x}, \tilde{\lambda}(t))$
 $\tilde{\Phi}_t = \{ \tilde{\varphi}_t(u) \mid 0 \leq u \leq b_t \}$ とおく。 $\varphi(\tilde{\gamma}'(0), \tilde{\sigma}'(0)) = \varphi(\tilde{\gamma}'(0), \tilde{\sigma}'(0))$
 故から \tilde{x} に於ける \mathbb{R}^n の接空間から M_x の自然な isometric
 isomorphism τ_x を $\tau_x(\tilde{\gamma}'(0)) = \gamma'(0)$, $\tau_x(\tilde{\sigma}'(0)) = \sigma'(0)$ とするよ
 うに定めることが可能である。 明らかに $\tilde{\varphi}_t'(u)$ は $\tilde{\gamma}'(0)$ と $\tilde{\sigma}'(0)$
 とが張る 2次元部分空間に属する。 従って $\Sigma(t, u) \rightarrow \varphi_t(u)$
 $(\Phi_t = \{ \varphi_t(u) \mid 0 \leq u \leq b_t \})$, $\varphi_t(u) \equiv \exp_{p_0} \circ \tau_x \circ \exp_{\tilde{x}}^{-1} \tilde{\varphi}_t(u)$ は M の
 2次元曲面片である。 その終点の軌跡 $\Lambda = \{ \lambda(t) \mid 0 \leq t \leq a \}$
 $\exp_{p_0} \circ \tau_x \circ \exp_{\tilde{x}}^{-1} \tilde{\lambda}(t) = \lambda(t)$ は Γ に属し、かつ $d(x, y) \leq L(\Lambda)$
 である。 一方 Rauch の定理 (定理 2) が $\tilde{\Lambda}$ と Λ に対し 2 俵
 として $L(\Lambda) \leq L(\tilde{\Lambda}) = d(\tilde{x}, \tilde{y}) = d(x, y)$ である。 故に $L(\Lambda) = d(x, y)$
 となり Λ は一意に決まる最短測地線分となった。 又このこ
 とから曲面上の任意の点に於ける接平面の決定する断面曲率は
 ε に等しい。 以上この曲面片が全測地的であることを主張
 するには、この曲面上の十分近い 2 点 (任意) を結ぶ最短測
 地線分がこの曲面に含まれてゐることを示せば十分である。



作りおこなふこの曲面片は x を中心と
 する星状形を有す。今、距離が M の
 基本弧長より小なる任意の 2 点 x', y'
 をこの曲面上にとり、 $f_x = \exp_{p_0} \circ \tau_x \circ \exp_{\tilde{x}}^{-1}$
 による x', y' の inverse image を \tilde{x}, \tilde{y}

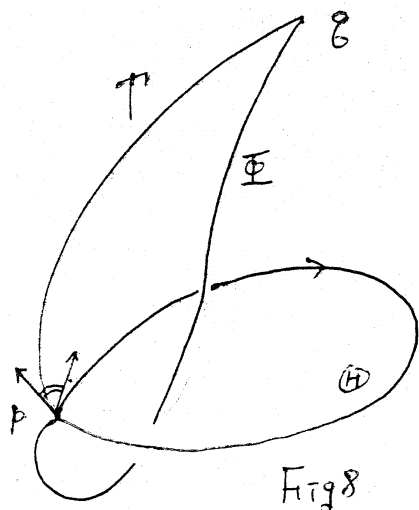
得られる。但し Σ_1 は Σ の p を通る部分弧である。また
 始めに作った (λ, γ, η) を頂点に持つ曲面片とこの曲面片とは
 $\Lambda[0, t_1]$ 上で同一の接平面を共有するから両者は同一の曲面
 上にある。かくして、 $t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots$ なる数列で $(p,$
 $\lambda(t_i), \lambda(t_{i+1}))$ を頂点に持つ三辺形 $(\Sigma_{t_i}, \Lambda[t_i, t_{i+1}], \Sigma_{t_{i+1}})$ を境界
 に持つ定曲率 κ の全測地的曲面片で、全て同一の曲面に含ま
 れるものが得られる。このとき $\sup t_i = a$ を主張する。
 実より、 $\lim_k t_{i_k} = a' < a$ と仮定すると、 $\{\Sigma_{t_{i_k}}\}$ より収束する
 部分列がとれ、その極限測地線分を Σ_0 とおくと明らかに
 $\psi(p, \lambda(a'), \gamma) = \psi(\tilde{p}, \tilde{\lambda}(a'), \tilde{\gamma})$ の $\Lambda[0, a']$ と Σ_0 とで始めの
 議論をくり返すことができる。よって $a' = a$ であるから
 め。三辺形 (Σ_a, T_1, Θ) により Σ を $\psi(p, \gamma, r) = \psi(\tilde{p}, \tilde{\gamma}, \tilde{r})$
 の $\Lambda[0, a]$ の曲面片は Σ, T_1 を境界に持つ曲面片にまで拡張される。
 注意に、この全測地的曲面片の第三の境界は必ずしも Θ に
 一致しない。しかし γ が最短測地線分であることは明らか
 である。

補題 4.2 (Shichama [15])

完備、連結な M が (1) を満たすとき、もし $d(M) > \pi/2$ とな
 るならば M は単連結である。

証明、 M が単連結でないことを仮定する。 \hat{M} を M の universal
 covering manifold とし π を projection map とする。 $d(M) = d(\hat{M})$

存在する二点 p, q に対し $\hat{q}, \hat{p}_1, \hat{p}_2 \in \hat{M}$ として $\pi(\hat{p}_1) = \pi(\hat{p}_2) = p, \pi(\hat{q}) = q$ かつ $\hat{p}_1 \neq \hat{p}_2$ が存在する。 $\hat{\Theta} \in G(\hat{p}_1, \hat{p}_2)$ に対し $\hat{\Theta} = \pi \circ \hat{\Theta}$ は p に対し閉測地線分である。このとき $T \in G(p, q)$ として、 $\angle(\gamma'(0), \xi'(0)) \leq \pi/2$ なる T が存在する。この T に対し $\hat{T} \in G(\hat{p}_1, \hat{q})$ かつ $\pi \circ \hat{T} = T$ なる \hat{T} が \hat{M} に存在する。
 $\hat{\Phi} \in G(\hat{q}, \hat{p}_2)$ に対し $\Phi = \pi \circ \hat{\Phi}$ は p, q と結ぶ測地線分中の $\angle(\Phi) \geq \angle(T) = d(p, q) > \pi/2\sqrt{\varepsilon}$ が成立する。三辺形 $(\hat{\Theta}, \hat{T}, \hat{\Phi})$



に対し $S_{\frac{\pi}{2\sqrt{\varepsilon}}}^2$ の等辺右三辺形
 に対し余弦法則より $\angle(\hat{p}_2, \hat{p}_1, \hat{q}) \leq$
 $\leq \angle(\hat{p}_2, \hat{p}_1, \hat{q}) \leq \pi/2$ 故にもし
 も $(\hat{\Theta}, \hat{T}, \hat{\Phi})$ の周長が $2\pi/\sqrt{\varepsilon}$ 未満な
 るは $\cos \angle(\hat{p}_2, \hat{p}_1, \hat{q}) =$
 $= \frac{\cos \angle(\hat{\Phi}, \hat{\Theta}, \hat{q}) - \cos \angle(\hat{\Theta}, \hat{q}, \hat{p}_1) \cdot \cos \angle(\hat{T}, \hat{p}_1, \hat{q})}{\sin \angle(\hat{\Theta}, \hat{q}, \hat{p}_1) \cdot \sin \angle(\hat{T}, \hat{p}_1, \hat{q})} \leq$

$\leq \cos d(M)\sqrt{\varepsilon} (1 - \cos \angle(\hat{\Theta}, \hat{q}, \hat{p}_1)) / \sin \angle(\hat{\Theta}, \hat{q}, \hat{p}_1) \sqrt{\varepsilon} \cdot \sin d(M)\sqrt{\varepsilon} < 0$ 。これ
 より $\angle(\hat{p}_2, \hat{p}_1, \hat{q}) > \pi/2$ と右り従って $(\hat{\Theta}, \hat{T}, \hat{\Phi})$ の周長が $2\pi/\sqrt{\varepsilon}$
 でありこれよりなる。定理4より \hat{M} は $S_{\frac{\pi}{2\sqrt{\varepsilon}}}^2$ に等長であり、又
 $\angle(\hat{p}_2, \hat{p}_1, \hat{q}) \leq \pi/2$ より $(\hat{\Theta}, \hat{T}, \hat{\Phi})$ は lune でありこれよりなる。
 従って $\angle(\hat{\Theta}) = \pi/\sqrt{\varepsilon}$ 又は $\angle(\hat{T}) = d(M) = \pi/\sqrt{\varepsilon}$ 。後者の場合 M が
 $S_{\frac{\pi}{2\sqrt{\varepsilon}}}^2$ に等長の結論は自明である。 $\angle(\hat{\Theta}) = \pi/\sqrt{\varepsilon}$ のときは、
 $\angle(\hat{T}) + \angle(\hat{\Phi}) \geq 2\angle(\hat{T})$ より $d(M) \leq \pi/2\sqrt{\varepsilon}$ と右り矛盾である。

命題 4.3 (Shiohama [15])

M は $0 < \delta \leq \kappa_0 \leq 1$ を満たし, $d(x, y) > \pi/2\delta$ なる 2 点 $x, y \in M$ が存在するならば $d(x, c(x)) \geq \pi$, $d(y, c(y)) \geq \pi$ が成立する。

証明. $\delta > 1/4$ のときは補題 4.10 により M は単連結になるので定理 7 により明らかである。従って $\delta \leq 1/4$ の場合のみ考える。 $d(y, c(y)) = \rho < \pi$ と仮定して矛盾を導く。仮定より y を始点とする閉測地線分 $\Sigma = \{\sigma(t) \mid 0 \leq t \leq 2\rho\}$, $\sigma(0) = \sigma(2\rho) = y$ が存在し、 x を Σ 上にある。従って $d(x, z) = d(x, z)$ なる $z \in \Sigma$ が存在する。

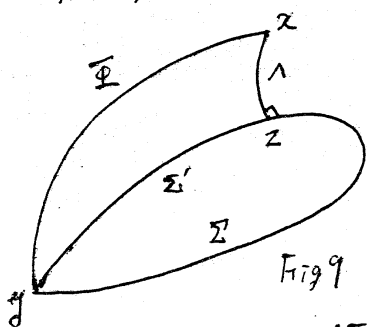


Fig 9

$y \neq z$ と仮定すれば $\rho =$ 変分の簡単な計算により $d(x, z) \leq \pi/2\delta$ となる。 Σ を Σ の y, z により分ける弧のうち長くはないとし, $\Lambda \in G(x, y)$,

$\Lambda \in G(x, z)$ とする。 (x, y, z) を三頂点とする測地三辺形 (Σ', Λ, Ξ) に対応する $S_{\frac{\pi}{2\delta}}^2$ 上の等辺の三辺形 $(\tilde{\Sigma}', \tilde{\Lambda}, \tilde{\Xi})$ に対し $d(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{\rho} > \pi/2\delta$ より $\angle(\tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{x}) > \pi/2$

となり定理 5 に反する。従って $y = z$ でありなければならない。

このとき $d(x, \sigma(t)) > d(x, y)$ が任意の $t \in (0, 2\rho)$ に対して成立している。従って特に $d(x, \sigma(\rho)) > d(x, y)$ である。 $y_1 = \sigma(\rho)$

$\rho_1 = d(y_1, c(y_1))$ とおくと $\rho_1 \leq \rho \leq \pi$, $d(x, y_1) > d(x, y) > \pi/2\delta$ 。従って閉測地線分 $\Sigma_1 = \{\sigma_1(t) \mid 0 \leq t \leq 2\rho_1\}$, $\sigma_1(0) = \sigma_1(2\rho_1) = y_1$ が存在する。もし Σ_1 が閉測地線ならば上述の議論より直ちに

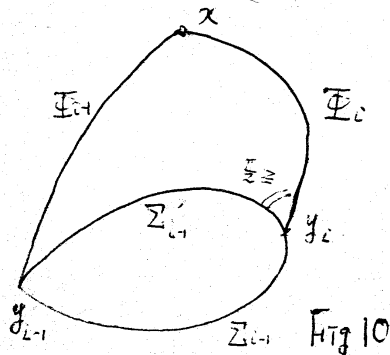
矛盾を生ずる。従って Σ_1 は閉測地線分である場合のみ考へる。又、 $d(x, y_1) < d(x, \sigma_1(x))$ が任意の $t \in (0, 2\pi)$ に対して成立するので特に $d(x, \sigma_1(x)) > d(x, y_1)$ 。 $y_2 = \sigma_1(x)$, $\rho_2 = d(y_2, C(y_2))$ とおけば $\rho_2 \leq \rho_1 \leq \rho < \pi$, $d(x, y_2) > d(x, y_1) > d(x, y) > \pi/2\epsilon$ であり、再び y_2 に於ける閉測地線分 Σ_2 を得る。この方法を繰り返して

$$\begin{aligned} y_0, y_1, y_2, \dots, y_k, \dots & \quad \text{但し } y_0 \equiv y \\ \Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_k, \dots & \quad \text{但し } \Sigma_0 \equiv \Sigma \\ \pi > \rho_0 \geq \rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \geq \rho_k \geq \dots & \quad \text{但し } \rho_0 = \rho \\ \pi/2\epsilon < d(x, y_1) < d(x, y_2) < \dots < d(x, y_k) < \dots & \end{aligned}$$

を得る。 M はコンパクト故 $\{d(x, y_k)\}$ は有界である。従って極限 L も $\epsilon > 0$ 。又 $\{y_k\}$ から y^* に収束する部分列を選べる。 $\rho \rightarrow d(\rho, C(\rho))$ は M 上で下に半連続な関数であるから

$$\lim \rho_i \geq \rho^* \equiv d(y^*, C(y^*))$$

が成立する。



一方 $\Phi_i \in G(x, y_i)$ に対して Σ_{i-1} の部分弧 Σ'_{i-1} で、 y_i に於ける Σ'_{i-1} と Φ_i との交角が $\pi/2$ 以下のものがとれる。

三辺形 $(\Phi_{i-1}, \Sigma'_{i-1}, \Phi_i)$ に対応する $S^2_{\frac{1}{2}\epsilon}$ 上の等辺右三辺形 $(\tilde{\Phi}_{i-1}, \tilde{\Sigma}'_{i-1}, \tilde{\Phi}_i)$ に於

て y_i に於ける頂角 $\tilde{\alpha}_i$ は Σ'_{i-1} のとりえにより $\pi/2$ 以下である。

従って、球面三角法により

$$\cos d(\alpha, y_{i-1})\sqrt{\varepsilon} - \cos d(\alpha, y_i)\sqrt{\varepsilon} \cdot \cos f_{i-1}\sqrt{\varepsilon} = \sin d(\alpha, y_{i-1})\sqrt{\varepsilon} \cdot \sin f_{i-1}\sqrt{\varepsilon} \cos \tilde{\alpha}_i \geq 0$$

が $i=1, 2, \dots$ に対し 2 成立する。従って

$$\cos d(\alpha, y_{i-1})\sqrt{\varepsilon} \geq \cos d(\alpha, y_i)\sqrt{\varepsilon} \cdot \cos f_{i-1}\sqrt{\varepsilon}$$

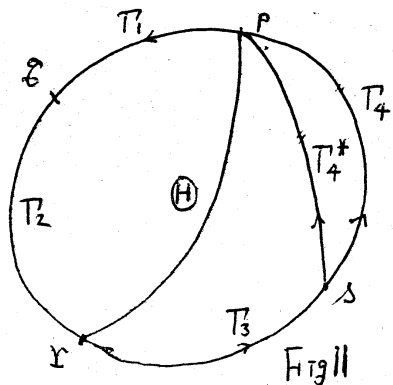
が $i=1, 2, \dots$ に対し 2 成立する。よって

$$\begin{aligned} \cos d(\alpha, y)\sqrt{\varepsilon} &\geq \cos d(\alpha, y_1)\sqrt{\varepsilon} \cdot \cos f_0\sqrt{\varepsilon} \geq \cos d(\alpha, y_2)\sqrt{\varepsilon} \cdot \cos f_1\sqrt{\varepsilon} \cdot \cos f_0\sqrt{\varepsilon} \\ &\geq \cos d(\alpha, y_k)\sqrt{\varepsilon} \prod_{i=1}^k \cos f_{i-1}\sqrt{\varepsilon} \geq \cos d(\alpha, y_k) \cdot (\cos f^*\sqrt{\varepsilon})^k \end{aligned}$$

しかし $\lim_{k \rightarrow \infty} \cos d(\alpha, y_k) \cdot (\cos f^*\sqrt{\varepsilon})^k = 0$ ゆえ $\cos d(\alpha, y)\sqrt{\varepsilon} \geq 0$ であることは明らか。これは $d(\alpha, y) \leq \pi/2\sqrt{\varepsilon}$ を意味するから矛盾である。

注意13. 命題4.11よりコンパクトリーマン多様体 M が $d(M) > \pi$ かつ $1/4 \leq K_2 \leq 1$ を満たすならば M は S^n に同相であることを証明できる (Shichama [1])。

さて、本章の定理の証明が完全に準備された。



定理2.4の証明。 \mathcal{T} が T_1, T_2, T_3, T_4 に分割される2つの頂点は P, Q, R, S とする (Fig 11 参照)。 $\angle(T_i) = \alpha_i$ とおく。一般性を失うことなく $\alpha_1 \geq \pi/2\sqrt{\varepsilon}$ としよ。 $\Theta \in G(P, \varepsilon)$ $\Theta = \{B(x)\}$

$(0 \leq t \leq \varepsilon)$ とおいて $\varepsilon < \pi/\sqrt{\varepsilon}$ と仮定する。 $(\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{\Theta}), (\tilde{\Theta}, \tilde{T}_3, \tilde{T}_4)$ を夫々 $(T_1, T_2, \Theta), (\Theta, T_3, T_4)$ に対応する等辺の $S_{\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}}^2$ 上の三辺形とし $\tilde{\Theta}$ を共有し一方を他の外側に描くものとする。このとき ε の

仮定より $(\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{T}_3, \tilde{T}_4)$ は (u, v) に在るの2測地三辺形 (T_3, T_4, Θ) と $(\tilde{T}_3, \tilde{T}_4, \tilde{\Theta})$ とは \tilde{r} に在る内角が等しい。命題4.1により T_3, Θ, T_4^* を境界にキつ定曲率 δ の全測地的曲面片が存在する。 $\alpha_1 = \alpha_3, \alpha_2 = \alpha_4$ とあるから $\alpha_4 = \pi/\delta - \alpha_1 < \pi/2\delta \leq \pi$ 。一寸 $d(p, c(p)) \geq \pi$ が $\alpha_1 > \pi/2\delta$ ゆえ命題4.3により保証されるので従って $T_4^* = T_4$ であり得る。このとき $\angle(\tilde{\gamma}_3'(a_3), \tilde{\gamma}_4^*(0)) = \pi$ ゆえ $\angle(\tilde{\gamma}_3'(a_3), \tilde{\gamma}_4'(0)) = \pi$ であり得る。これは $\delta < \pi/\delta$ に矛盾する。

定理2.5の証明。

$d(p) = \pi/2\delta$ なる等辺四辺形に Γ を分割する。 $\Theta \in G(p, r)$ とし $\angle(\Theta) = \delta < \pi/\delta$ と仮定して矛盾を導く。 (Θ, T_3, T_4^*) を境界にキつ定曲率 δ の全測地的曲面片が存在する。 $\delta < \pi/\delta$ の仮定から $T_4^* \neq T_4$ 従って p は T_4, T_4^* の最短測地線分が結ばれる長さ $\pi/2\delta \leq \pi$ である。従って $\delta = 1/4$ であり得る(これは定理6に基づく議論である)。このとき Berger の technique (補題4.4) により T_4^*, T_4 を境界にキつ定曲率1の全測地的曲面片が存在する。従って $K(\tilde{\gamma}_4^*(0), \tilde{\gamma}_4'(0)) = 1$ 。一寸から $K(-\tilde{\gamma}_3'(\pi/2\delta), \tilde{\gamma}_4^*(0)) = \delta$ であり矛盾である。

IV 定理6,7の証明。

M が $\Pi_1(M) = \mathbb{Z}_2$ から $1/4 < \delta \leq K_0 \leq 1$ を満たすとき、 $d(p) = \ell = d(p, z)$ とおくと、単純閉測地線 $\Sigma = \{p(t) \mid 0 \leq t \leq 2\ell\}$ 2', $\gamma(0) =$

$\sigma(z_k) = p, \sigma(z) = \xi$ とするものが存在する。更に、
 $\Sigma_1 \in G(p, \xi)$ に対して $T \in G(p, \xi)$ で $\angle(-\sigma'(10), \gamma'(10)) \leq \pi/2$ とする T が存在する(補題4.5)。そこで $\angle(\sigma'(10), \gamma'(10)) \neq \pi$ と仮定すると、 $u = -(\sigma'(10) + \gamma'(10))$ に対して $\Sigma_2 \in G(p, \xi)$ で $\angle(u, \sigma'(10)) \leq \pi/2$ とする Σ_2 が存在する。 M の universal covering space \hat{M} 内の \hat{p}_1 ($\pi(\hat{p}_1) = p$) から出る Σ_1, T, Σ_2 の lift を $\hat{\Sigma}_1, \hat{T}, \hat{\Sigma}_2$ とおくとこれらのうち少なくとも2つは同じ終点を持つ。一方から $\ell = d(M) \leq \pi/2\sqrt{8} < \pi$ ゆえこれは定理7に反する。従って $\angle(\sigma'(10), \gamma'(10)) = \pi$ であることがわかる。同様にして $\sigma'(z) \times \gamma'(z)$ との角も π とする。

さて \hat{M} に長さ $2\pi/\sqrt{8}$ の閉測地線が存在すれば、 \hat{M} は $S^2/\sqrt{8}$ に等長になるので定理6は自明である。又定理7も同じ理由により明らかである。

V 定理2.8の証明.

まずIVの途中で用いた2つの補題を証明する。

補題4.4 (Berger [2])

M はコンパクトで $0 < \delta \leq K \wedge \leq 1$ を満たすものとする。 M の2点 p, ξ で $d(p, \xi) = \pi$ かつ、 $\Theta_1, \Theta_2 \in G(p, \xi)$ ($\Theta_1 \neq \Theta_2$) であり、 $\Theta_1'(10) \neq \pm \Theta_2'(10)$ なる2本の最短測地線分が存在するものとする。更に p の近傍 U で、 U 内の任意の点 x に対して $d(x, c(x)) \geq \pi$ が成立するならば、 Θ_1, Θ_2 を境界に持つ定曲率1の全測

地的曲面片が M に存在する。

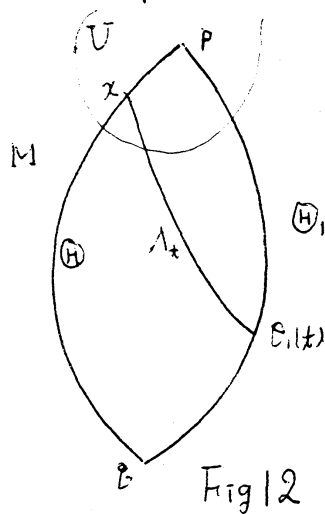
注意 14. Berger は偶数次元コンパクト単連結な M が $\delta \leq K \leq 1$ を満たすとき π の補題を証明した []。ここで P の近傍が π の cut locus の距離評価ができていれば十分であることが云々している。又この補題は注意 13 に述べたことを証明する為には重要である。

証明.

$x = \theta(t_0) \in U$ を任意に固定する。 $\angle(\theta'(t_0), \theta'(t_0)) \neq \pi$ かつ、 $\angle(\theta'(\pi), \theta'(\pi)) \neq \pi$ である。 実際 $\angle(\theta'(\pi), \theta'(\pi)) = \pi$ と仮定すると θ, θ_1 は P から出る長さ 2π の閉測地線分となる。 これを \mathbb{H}^* とおけば、

$$d(x, \theta^*(\pi+t_0)) < d(x, P) + d(P, \theta^*(\pi+t_0)) = t_0 + (\pi - t_0) = \pi.$$

故に $\mathbb{H}^*[t_0, \pi+t_0]$ は最短測地線分ではない。 これは $d(x, \theta(x)) \geq \pi$ に矛盾する。(Fig 12 参照)。 このとき明らかに任意の $t \in [0, \pi]$ に対し $d(x, \theta(t)) < \pi$ が成り立つ。



M_x 内の中心 O , 半径 π の開球を V とおくと $\exp_x|_V$ は 1-1 であるから $(\exp_x|_V)^{-1} \cdot \mathbb{H}_1$ が一意に定まる。 $\Lambda_x \in G(x, \theta(t))$ とおくと S_1^n 上に一意 x^* を固定し \mathbb{H}^* を x^* をとる大円と、 $\theta^*(t_0) = x^*$ と仮定する。

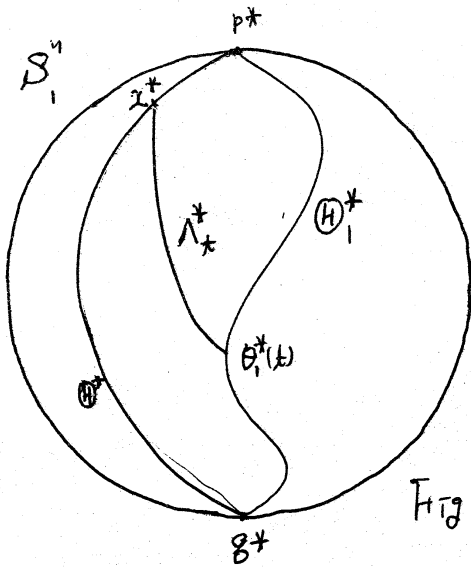


Fig 13

$p^* = \theta^*(0), g^* = \theta^*(\pi)$ とお
 けは、Ranch の定理により

$$L(\exp_{x^*} \circ \alpha_{x^*} \circ (\exp_{x^*} |V|)^{-1} \circ \Theta_1) \leq$$

$$\leq L(\Theta_1) = \pi.$$
 従って

$$\exp_{x^*} \circ \alpha_{x^*} \circ (\exp_{x^*} |V|)^{-1} \circ \Theta_1 \equiv \Theta_1^*$$
 は p^*, g^* を結ぶ大円である。
 但し $\alpha_x: M_x \rightarrow (S^2)_{x^*}$ は
 isometric isomorphism である。

$\alpha_x(\theta(t_0)) = \theta^*(t_0)$ により定義されたいとする。 Θ_1^* が
 大円であることは $\lambda_t^*(0)$ が $t \in [0, \pi]$ に対し同一の 2 次元
 部分空間に含まれることを意味し、 $(t, u) \rightarrow \varphi(t, u) \equiv \exp_x u \lambda_t^*(0)$
 は曲面片を定義する。これは $u \in [0, b_x]$ であり $b_x = L(\Lambda_x)$ 。
 更にこの曲面片に接する接平面の定める断面曲率が 1 である
 ことも解る。すなわち、この曲面片上に任意の 2 点 y, z をと
 り $d(y, z)$ が M の基本弧長より小であるとしたとき、 y, z を結
 ぶ最短測地線分がこの曲面に含まれることを証明すればよい。
 $f \equiv \exp_{x^*} \circ \alpha_{x^*} \circ (\exp_{x^*} |V|)^{-1}$ とおく。 y, z に対し $z = \lambda_{t_2}(s_2)$
 $y = \lambda_{t_1}(s_1)$ とある s_1, t_1, s_2, t_2 が一意に定まる。 $y^* = f(y)$
 $z^* = f(z)$ とおく。 y^*, z^* をとる大円弧(劣弧)を Ψ^* とおく。
 点 $\theta \in G(y, z)$ がこの曲面片上にあると仮定して矛盾を導くこ
 う。 Ranch の定理より $L(\Psi) \geq L(f \circ \Psi) \geq L(\Psi^*) = d(y^* z^*)$

一 λ . $\mathcal{L}(f^{-1}\Psi^*) = \mathcal{L}(\Psi^*) \geq \mathcal{L}(\Psi)$. 従って $\mathcal{L}(\Psi) = \mathcal{L}(f^{-1}\Psi^*)$ から $f^{-1}\Psi^*$ が最短測地線分となり、 Ψ に一致しなければならぬ。よって $X = f^{-1}\Psi^*$ はこの曲面片上にあるので Ψ もこの曲面上に取付けられる。

補題 4.5 (Tsukamoto [])

M はコンパクトなリ-マン多様体で $d(M) = d(p, \xi)$ とする。任意の $X \in M_p$ に対して $\Gamma \in G(p, \xi)$ で、 $\langle X, \delta'(\omega) \rangle \geq 0$ とする Γ が存在する。

注意 15. Berger は正曲率の仮定の下にこの補題を証明した (Berger [2])。しかし曲率の仮定は基本的に仮定でなく、コンパクト性のみが基本的であることが根本的に示された。

証明. $\|X\| = 1$ としよ。 $\Sigma = \{\alpha(t)\} (0 \leq t \leq d)$ は、 $\alpha(t) = \exp_p tX$ で定義された測地線分とする。 $t_1 > t_2 > \dots > t_n \rightarrow \dots$ $\lim t_n = 0$ とする減少数列と $\lambda_n \in G(\alpha(t_n), \xi)$ とする測地線分の系列で、 $\langle \alpha_n'(t_n), \lambda_n'(\omega) \rangle \geq 0$ とするものが存在する。実はいかにある $\{t_n\}$ と $\{\lambda_n\}$ とが存在しなかったと仮定すれば $d(M)$ より長さが長い最短測地線分が M に存在することになり、矛盾を生ずる。この λ_n から収束する部分列を選べば証明は完結する。

さて、Berger の論旨に従って、定理 8 を証明する準備をする。

$d(M) = \pi$. \ast 定理 6 より M の任意の点 z について M の diameter が測れる。こゝで、 $p, q \in M$ と $d(p, q) = \pi$ とする。また任意に固定し $A_{p, q} \equiv \{X \in M_g \mid \|X\| = 1, \exp_p \pi X = q\} \subset M_g$ なる M_g の部分集合を考へる。 S_g は M_g 内の中心 O , 半径 1 の超球としたとき、 $A_{p, q}$ が S_g と M_g のある部分空間との交わりになることを証明すれば十分である。

$A_{p, q}$ は S_g の部分集合で次の性質をもつことが解る。

- (1) $A_{p, q}$ の任意の X, Y に対して $(aX + bY) / \sqrt{a^2 + b^2} \in A_{p, q}$ が任意の $a \geq 0, b \geq 0$ に対して成立する。
- (2) M_g の任意の Z に対して $X \in A_{p, q}$ として $\langle X, Z \rangle \geq 0$ となる X が存在する。
- (3) $A_{p, q}$ は S_g 内の閉集合である。

(1) は補題 4.4 による。 (2) は補題 4.5 から、(3) は $A_{p, q}$ の定義から明らかである。 $A_{p, q} \neq \emptyset$ なることは明らかであるが、 $A_{p, q}$ は S_g 内の凸集合であるか、もしくは $A_{p, q}$ が 2 点 $X, -X$ のみから成るかのいずれかである。 \ast 2、ある pair p, q $d(p, q) = \pi$ に対して $A_{p, q}$ が 2 点のみから成ると仮定しよう。このとき $d(p, c(p)) \geq \pi$ に注目して、 p から出る測地線は全て単純閉測地線であり、 2π の長さで p に戻る。任意の $T = \{t\alpha\} \{0 \leq t \leq 2\pi\}$ $\alpha(0) = \alpha(2\pi) = p$ に対して、 O の (p) の T に対して first conjugate point は 2π (p 自身) である。

P は、初瀬-高木の意味での self-conjugate point である。
 このとき Hatsuse-Takagi の定理 [13] により M は単連結である。
 PR^n に M が微分同型になることが解り、 M の仮定に戻
 する。従って任意の pair $p, q \in d(p, q) = \pi$ に対し $A_{p, q}$
 $= \{X, -X\}$ となることは起こる。以下この p, q を固定
 しておく。

補題 4.6. (Berger [3])

$A_{p, q}$ の元 $X_0 \in \mathbb{R}^n, -X_0 \in A_{p, q}$ なるものが存在する。

証明。

もしも任意の $X \in A_{p, q}$ に対し $-X \notin A_{p, q}$ と仮定すれば、
 $A_{p, q}$ が S_g 内の凸集合であるから、南半球に完全に含まれる
 ような北極 $Z_0 \in S_g$ が存在する。この Z_0 に対し (4) を用
 いて、 $\langle X, Z_0 \rangle \geq 0$ なる $X \in A_{p, q}$ が存在する。これは矛盾の
 ある。

以下この X_0 を固定する。 M'_g を M_g 内の X_0 に垂直な $n-1$ 次
 元部分空間とする。そうまでできなく $\Gamma = \{tX_0\} (0 \leq t \leq 2\pi)$
 $\gamma(0) = p, \gamma(t) = \exp_p tX_0$ は閉測地線である。 $U' \equiv A_{p, q} \cap M'_g$
 とおいたとき、 U' が S_g の部分空間になることを証明すれば
 十分である。

補題 4.7 (Berger [3] Lemma 1)

P は U' を含む M_g の最小の部分空間とする。 P の任意の $X,$

$\|X\|=1$ に対して、 $\varepsilon > 0, \eta > 0$ の以下の条件を満たすものが存在する。任意の $Y \in S_g$ で $\langle X, Y \rangle \geq 1 - \eta$ なる Y に対して、 $d(P, \exp_{P_g} tY) < d(P, g) = \pi$ かつ $t \in (0, \varepsilon)$ なる任意の t に対して成立する。

証明. 変分原理によらず、 $\langle Y, X_0 \rangle = 0$ なる場合のみ考えれば十分である。任意の $Z_0 \in U'$ に対して、 Γ が赤道にならざる、 Z_0 が g に於て接ベクトルにならざる2次元の半球が M に存在する。これは補題4.4と Γ が閉測地線であることによる。従って M_g 上の二次形式 $V \rightarrow R(VX_0)X_0 V$ を考えると、 $K_0 \equiv 1$ なる U' はこの二次形式の固有値1の固有空間に含まれる。特に Z を Γ に沿う平行ベクトル場 $Z, Z(0) = Z_0$ をみたすものとするれば、 Z は半球の平行ベクトル場ゆえ $Z(2\pi) = Z(0) = Z_0$ であり、特に $K(Z(t), \dot{Z}(t)) = 1$ をみたす。また、 $W_0 \in P$ を任意にとれば、 W_0 は U' の元 Y_0, Z_0 を用いて $W_0 = \alpha Y_0 + \beta Z_0$ と書けるので $W_0 \in V \rightarrow R(VX_0)X_0$ の固有値1の固有空間に属する。従って W を Γ に沿う M の平行ベクトル場 $Z, W(0) = W_0$ なるものとするれば、明らかに $K(W(t), \dot{W}(t)) = 1$ が成立してゐる、しかし W に対しては、 Γ を赤道に持ち、 $W(t)$ が接ベクトルにならざるよる2次元半球が M に存在するおどろき解がある。

$$\ast 2 \quad \cdot C = \{Y \in M_g \mid \|Y\|=1, \langle Y, X_0 \rangle = 0, \langle Y, X \rangle \geq 1 - \eta\}$$

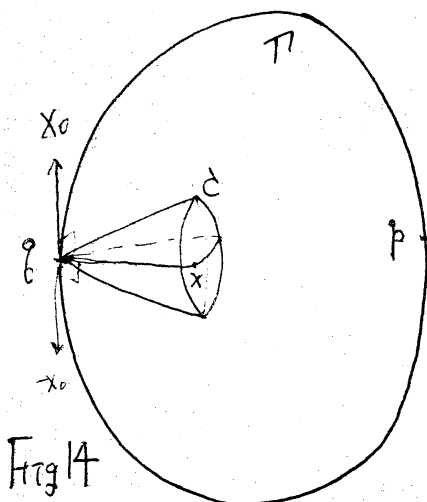


Fig 14

よおく (Fig 14 参照)。

$Y(t)$ を Π に沿う平行ベクトル場
 で $Y(0) = Y$ なるものをとす。

任意の $\epsilon > 0$ に対して $\eta(\epsilon) > 0$
 であり、 $\langle XY \rangle \geq 1 - \eta(\epsilon)$ なる任意
 の Y に対し $K(Y(t), \delta'(t)) \geq 1 - \epsilon$ を
 満たすような $\eta(\epsilon)$ が存在する。

$\Pi \setminus [0, \pi]$ に沿うベクトル場 $\sin kt \cdot Y(t)$ を変分ベクトル場に持

つ変分 $V(t, \epsilon) = \exp_{Y(t)} \epsilon \cdot \sin kt \cdot Y(t)$ による変分 $L''(0)$

$$\text{は } L''(0) \leq (k^2 - (1 - \epsilon)) \pi / 2 + k/4 \cdot (1 - \epsilon + k^2) \sin 2k\pi$$

となる。ここで $3/4 < k < 1$, $\epsilon = 1 - k^2$ とおけば、この
 ϵ に対して $\eta(\epsilon) > 0$ が存在し、 $\langle YX \rangle \geq 1 - \eta(\epsilon)$ を満たす Y
 を作ると、先上記のベクトル場を変分ベクトル場にすると変分
 は $L''(0) < 0$ となる。

補題 4.8 (Berger [3], Lemma 2)

D の任意の元 X に対して、 $Z' \in U'$ であり $\langle X, Z' \rangle > 0$ なるものが
 存在する。

証明。 $X \in P$ に対して $Z \in A_{P, \delta}$ であり $\langle X, Z \rangle > 0$ となる
 Z が存在することは十分である。実際には、 $Z' =$
 $= (Z - \langle X_0, Z \rangle X_0) / \|Z - \langle X_0, Z \rangle X_0\|$ とおけば $Z' \in U'$ かつ、
 $\langle Z'X \rangle \geq \langle ZX \rangle > 0$ である。

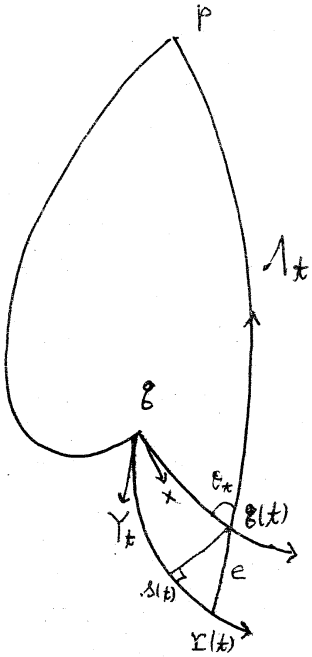


Fig 15

すなわち $g(t) = \exp_{g(t)} tX$,

$d(t) = d(P, g(t))$, $e(t) = \pi - d(t)$

$\lambda_t \in G(g(t), P)$ $\theta_t = \angle(\lambda_t', e)$

とおく (Fig 15 参照)。補題

4.7 より $d(t) < \pi$ 。

定理 5 を用い、 $d(t) = \omega e(t) \times (2)$

$$\pi^2 \leq d^2 + t^2 - 2dt \cos \theta_t$$

$$= d^2 + t^2 - 2d \cdot t \cdot d(t)$$

$\Gamma(t) = \lambda_t - e(t)$ とおく。

$t \rightarrow 0$ のとき $d(g, \gamma(t)) \rightarrow 0$ ゆえ $\varepsilon > 0$ に対し $\varepsilon' > 0$ が存在

して、 $d(g, \gamma(t)) < \varepsilon$ が任意の $t \in (0, \varepsilon')$ に対し成立する。

Y_t を $g, \gamma(t)$ を結ぶ一意的に決まる最短測地線分の g に於ける接

ベクトル (単位) とするとき、すくもある $t \in (0, \varepsilon)$ に対し、

$\langle Y_t, X \rangle \geq 1 - \eta$ が成立するならば補題 4.7 により $d(P, \gamma(t))$

$< \pi$ となり矛盾である。すなわち $\gamma(t)$ を $g(t)$ より $g(t)$ 以下に

た垂線の足とするとき、 $d(g(t), \gamma(t)) \geq d(g(t), \delta(t))$ 。更に

$d(g(t), \delta(t)) / d(g, g(t)) = e(t) / t \geq \sin \beta(t)$ かつ $t \rightarrow 0$ に対し

成立する。但し $\beta = \angle(X, Y_t)$ とおくと。一方必ず

$\sin \beta(t) \geq \{1 - (1 - \eta)^2\}^{\frac{1}{2}} > 0$ ゆえ $e(t) / t \geq a > 0$ とある正

数 a が存在する ($t \rightarrow 0$ のとき)。故に

$$d(t) \geq \pi e / dt - (e^2 + t^2) / 2dt \geq (\pi/d) \cdot a - (ae + t) / 2d \rightarrow a.$$

数 $\varepsilon'' > 0$ が存在して、 $\lambda(t) \equiv b > 0$ が任意の $t \in (0, \varepsilon'')$ に対して成立する。こゝで λ_t から γ_t までの部分列を選
 び、その極限測地線を λ とおくと、 $z \equiv \lambda(0)$ とおけば
 $\langle z, x \rangle \equiv b > 0$ である。

定理の証明。

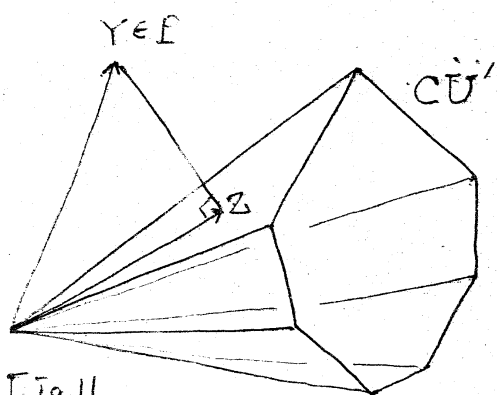


Fig 16

$CU' \equiv \{kX \mid X \in U', k \geq 0\}$
 とおくと、 $P = CU'$ を証明
 したい。 $CU' \subset P$ は自明で
 ある。もしも $Y \in P - CU'$ が
 存在したとすると (Fig 16) 矛盾
 を導くことが出来る。

$z \in CU'$ として $d(Y, z) = d(Y, CU')$ なる z が一意に存在する。
 CU' は convex なため z が一意に決まる。又 $Y - z \in P$ かつ、
 $\langle Y - z, w \rangle \leq 0$ が CU' の全 w に対して成立する。
 しかし補題 4.8 より $w_0 \in U'$ で、 $\langle w_0, Y - z \rangle > 0$ とする
 ものが存在する。これは矛盾である。

§5. 定理 3.1 — 定理 3.5 の証明.

§3 に述べた定理を全て完全に証明する。定理 3.1, 3.2 は Klingenberg の論文 [C] の内容の紹介であり、定理 3.3 は、研究集会に於て紹介した手法による。定理 3.5 については Z_3 の場合のみ証明すれば、一般の Z_n の場合にも同様の議論で証明できる。

I. 定理 3.1 の証明.

$\Delta(p) = d(p, C(p))$ の最小値 δ_0 が、 $\delta_0 < \pi$ であつたと仮定する。

M の任意の閉測地線分の長さは $2\delta_0$ 以上であることが解る。

實に cut locus までの距離の最小値は次の 2 数のうちの小さい方が与えられるからである。

- (1) 測地線分上の first conjugate point までの長さの最小値
- (2) 閉測地線の長さの最小値の半分。

$\delta_0 < \pi$ なる仮定に基づき、長さ $2\delta_0$ の閉測地線 Γ が存在する。このとき Synge の Lemma により Γ の平行曲線族の

長さが Γ より短かいものがとれる。これより Γ 上の一点 p から出る測地線分で長さ δ_0 のものが p の Γ 上の対蹠に到達し従つて $2\delta_0$ の対蹠 q は、 Γ に沿つて conjugate pair である。

一方曲率の仮定 $K \leq 1$ より Γ に沿つて q の conjugate point は π 以上(長さが)の所に分布してゐるので $\delta_0 < \pi$ に矛盾する。

次に後半を証明する。長さ 2π の閉測地線分は、前半

の結果から単純閉測地線になり、 X を Γ に垂直な単位平行ベクトル場としたとき、 Γ の平行曲線 $\Gamma_\varepsilon = \{\gamma_\varepsilon(t) \mid 0 \leq t \leq 2\pi\}$, $\gamma_\varepsilon(t) \equiv \exp_{\gamma(t)} \varepsilon X(t)$ は $\varepsilon > 0$ なる仮定から長さは Γ より短かり、その出発点 $\gamma_\varepsilon(0)$ に於ける接空間内に $\exp_{\gamma_\varepsilon(0)}$ を通して unique に lift される。従って写像 $\varphi, \varphi(t) \equiv \varphi(\gamma'_\varepsilon(0), \sigma'_\varepsilon(0))$ $\Sigma_t \in G(\gamma_\varepsilon(0), \gamma_\varepsilon(t))$ の値域は $[0, \pi]$ 中々任意の $\alpha \in (0, \pi)$ に対し $\Sigma_{t_\alpha} \in G(\gamma_\varepsilon(0), \gamma_\varepsilon(t_\alpha))$ なる $\varphi(t_\alpha) = \alpha$ とする $t_\alpha, \Sigma_{t_\alpha}$ が存在する。但し t_α は、 $\varphi(t) = \alpha$ とする閉集合内で最小の t の値として決まることにする。 $\varepsilon \rightarrow 0$ としたとき Σ_{t_α} は $\gamma(0)$ と $\gamma(\pi)$

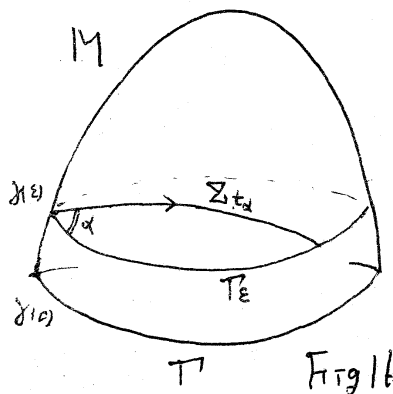


Fig 16

とを結ぶ長さ π の最短測地線分となる。従って $\gamma(0)$ から出る長さ π の測地線分は $\gamma(\pi)$ をその端点に持つ。長さ π の測地線分の両端が conjugate pair のとき、その測地線分上での Gauss 曲率が恒等的に 1

に於るので証明は終了。

II. 定理 3.2 の証明。

前半は明らかである。Morse-Schoenberg の定理から conjugate points 間の長さは π 以上であり、閉測地線の長さの半分も π 以上なることが既に示された。従って後半のみ証明する。

任意の点 q に対して、 $d(p, q) \leq \pi$ としたとき C が一弧のみからなることを示せば十分である。今、 p から出る長さ π の測地線分の端点が p の conjugate point ならば、その測地線分を conjugate segment、端点が p の conjugate point でないならば non-conjugate segment と呼ぶことにする。 M_p にある conjugate segment の単位接ベクトルを conjugate 方向、non-conjugate segment の単位接ベクトルを non-conjugate 方向と呼ぶことにする。明らかに conjugate 方向は単位円周 R 上の閉部分集合をなす。残りの仮定の下に次の3つの場合が考えられる。

- (A) p から出る長さ π の測地線分が全て conjugate segment のとき。
- (B) non-conjugate segment T に対して、 T と異なる non-conjugate segment Z で $d(p, z) = 0(1\pi)$ とある Z が存在する。
- (C) $A \neq B$ である。

まず、(A), (B) の場合に M が S^2 に等長になることはすでに述べた。以下 (C) のみを考える。条件より non-conjugate segment T が存在し、 p と $d(p)$ とを結ぶ T 以外の最短測地線分は全て conjugate segment である。単位円周 R に向きを決めておく。conjugate 方向の set A は R の閉部分集合で、特に p と $d(p)$ とを結ぶ conjugate segment の方向は R の閉部分集合で

ある。従って R の向き γ に対して $\gamma(0)$ に最も近い (R 上の距離で) $G(P, \gamma(\pi))$ 内の conjugate 方向が定まる。これを $\sigma(0)$ とする。 P, Σ は M を 2 つの連結成分に分け、 R の部分弧 $[\gamma(0), \sigma(0)]$ 内に方向をきつ測地線分族によりその一つの連結成分は完全にあらわれる。これを N と呼ぶ、 $I \equiv [\gamma(0), \sigma(0)]$ とおく。 I 内の $\gamma(0)$ の近くに non-conjugate 方向 $\gamma'(0)$ がとれ、 P と終点を共有する conjugate segment Σ_1 が上述のとり方から従って N 内にとれる。 実上 $\sigma(0)$ が I と仮定すれば、 $\gamma(\pi)$ は N の内点である (この条件から) から Σ_1 は P より Σ と P 以外の共有点をきつ。これは矛盾を生ずるから。このとき区間 $[\sigma'(0), \sigma(0)]$ 内には少なくとも一つの conjugate 方向が存在する。 実上、 $[\sigma'(0), \sigma(0)] \subset A$ と仮定すれば $\gamma(\pi) = \sigma'(0)$ となり (B) に帰着するから。 P, Σ_1 で囲まれる一つの連結成分のうちで、 $[\sigma'(0), \sigma(0)]$ 内に方向をきつ測地線分族によりあらわれるものを N_1 と呼ぶ" ことにすると、明らか $N_1 \subset N$ である。

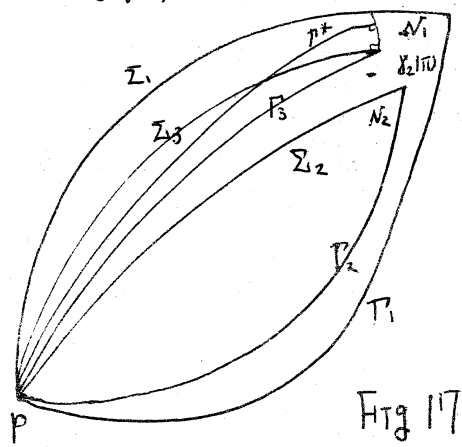


Fig 17

$R-A$ 内の $\gamma(0)$ を含む連結成分に含まれる区間 $[\gamma(0), P)$ を考える。このとき $\gamma'(0) \in [\gamma(0), P)$ に対し $\sigma'(0) \in A$ を対応させる写像 f は単調減少で、有界である

から、任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\gamma_1'(10), \gamma_2'(10) \in [\gamma'(10), \rho]$ 2', $\sigma_1'(10) = f(\gamma_1'(10)) \in A$ とおくと $[\sigma_2'(10), \sigma_1'(10)] < \varepsilon$ とする $\gamma_1'(10), \gamma_2'(10)$ がとれる。 $[\sigma_2'(10), \sigma_1'(10)]$ 内には少くとも \rightarrow non-conjugate な方向 $\gamma_3'(10) \in [\sigma_2'(10), \sigma_1'(10)]$ に対し $\sigma_3'(10) = f(\gamma_3'(10)) \in A$ が全く同じとり方により定まる。 $\sigma_3'(10) \in A$ かつ $\sigma_3'(10) \in [\sigma_2'(10), \sigma_1'(10)]$ 。 明らかにか $[\gamma_3'(10), \sigma_3'(10)] < [\sigma_2'(10), \sigma_1'(10)] < \varepsilon$ であるから、従って $\varepsilon > 0$ を十分小さくとり、 $\angle(\gamma_3'(\pi), \sigma_3'(\pi)) < \pi/4$ とする γ が可能である。 γ は T_3 に十分近い N_3 内の $T_{\#} = \{\gamma_x(t)\} (0 \leq t \leq \pi)$ をとり $\gamma_x(\pi) \in N_3$ とする矛盾する。

注意 16. 上の証明で $\angle(\gamma_3'(\pi), \sigma_3'(\pi)) < \pi/4$ のときの $\pi/4$ には特別な意味はない。 だが $\angle(\gamma_3'(\pi), \sigma_3'(\pi)) < \pi/2$ であることは十分である。

III. 定理 3.3 の証明.

$d(M) = \pi$ とする γ を示せば十分である。 $T = \{\gamma(t)\} (0 \leq t \leq 2\pi)$ を長さ 2π の閉測地線とする。 $p = \gamma(0)$ とおく。 T 上にない M の任意の点 q に対し、 $d(q, T) = d(q, \gamma)$ とする γ を T 上にとり、 (p, q, γ) を頂点とせよ測地三辺形に定理 5 を適用すれば、 $d(p, q) \leq \pi$ を得る。 従って (偶数次元の場合) $\hat{c}(p)$ の任意の点 q に対し $d(p, q) = \pi$ とする。

$\hat{c}(p) = \{q\}$ と仮定する。 このとき Index term の比較定理から任意の $\Lambda \in G(p, q)$ に対し q は Λ に沿う p の

first conjugate point と conjugate point の multiplicity は $n-1$ である。故に Λ に接する任意の plane element σ に対して $K_\sigma = 1$ が成立し、更に Rauch の定理を用いて S^n と M との間で exponential map を介して等長写像が得られる。

従って以下では $\mathbb{C}P^n$ が一意のみでない場合のみを考へる。 $d(M) = \pi$ を証明する為、 P から出る測地線は全て長さ 2π の単純閉測地線となることを示せば十分である。実より P から出る測地線が全て長さ 2π の閉測地線であればとする。 $d(M) = d(P_0, q_0)$ なる P_0, q_0 をとり、 P_0, q_0 のうち少くとも1つが T 上にあるならば $d(M) \leq \pi$ となるから従って両方とも T 上にある場合を考へよう。 $\lambda \in G(P_0, P_0)$ をとり (再び $q_0 \in \lambda$ なる場合を考へるのを) $d(P_0, \lambda) = d(P_0, q_0)$ なる $q_0 \in \lambda$ を定める。このとき (P_0, q_0, r_0) を頂点とする測地三辺形に定理5を適用すれば直ちに $d(P_0, q_0) \leq \pi$ となる。その後の議論は定理9に含まれる。

命題 5.1 (Nakagawa-Shichama [14])

M は $0 < \delta \leq K_0 \leq 1$ を満たし、 M の一意 $P \in \mathbb{C}P^n$ 上の任意の点 q に対して $d(P, q) = \pi/2\delta$ を満たす P が存在しと仮定する。このとき P から出る測地線は全て長さ π/δ の閉測地線である。

以下にこの命題の証明を示す。

補題 5.2 $\partial(p) \neq \emptyset$ のとき、 $\partial(p)$ の任意の = 矢 ξ, η に対し $G(\xi, \eta)$ 内の任意の Σ は $\partial(p)$ に含まれる (真集合として)。

補題 5.3 任意の $\mathcal{P} \in G(p, \xi)$ に対し 2 次が成立する。

$$(1) \quad \langle \gamma(\pi/2\sqrt{\delta}), \alpha'(0) \rangle = 0 \quad \text{但し } \Sigma \in G(\xi, \eta)$$

(2) X を \mathcal{P} に沿う平行ベクトル場で、 $X(\pi/2\sqrt{\delta}) = \alpha'(0)$ とするとき、 $K(X(s), \gamma'(s)) = \delta$ が $s \in [0, \pi/2\sqrt{\delta}]$ に対し成立する。

(3) $Y(s) \equiv \sin(\sqrt{\delta}s) X(s)$ は \mathcal{P} に沿う Jacobi field である。

補題 5.4 ξ を $\partial(p)$ 内に任意に固定したとき、 $M_p^0 \subset M_p^2$ を、 ξ を通る $\partial(p)$ 内の曲線の ξ に於ける接ベクトルの全体の集合とする。このとき M_p^0 は M_p^2 の部分空間である。

補題 5.5 M_p^1 を M_p^0 の M_p^2 に対する直交補空間としたとき、任意の $X \in M_p^1$, $\|X\| = 1$ に対し $\exp_p(\pi/2\sqrt{\delta})X = p$ が成立する。

これらの補題の証明は Nakagawa-Shiohama [14] による。これは Berger [2] の証明法と全く平行な議論である。補題 5.5 により証明が完結する。

又、定理の後半の証明は S^n に同相なコンパクト付線空間 (rank 1) は球のみであることが自明である。

注意 17. $\partial(p) = \emptyset$, $d(p, \xi) = \pi$ に関連して 2 次が云々。

命題 5.6 (Nakagawa [10])

M はコンパクト, 連結 リー-マン多様体で $K_M \leq 1$ が任意の 2-plane section のに対し て成り立つとする。 M に一点 p が存在して $\partial(p) = \{0\}$, $d(p, \partial) = \pi$ とすれば, M は S^2 に等長である。

この仮定には単連結性と正曲率であることが不要であることに注目すべしである。

IV. 定理 3.4 の証明。

M の universal covering manifold を \tilde{M} , $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$ を projection とする。 $d(\tilde{\gamma}(x)) \geq \pi/k$ が M の任意の点 x に対し て成り立つので、 M の長さ $2\pi/k$ の閉測地線 γ は単純閉測地線になる。このとき \tilde{M} の閉測地線 $\tilde{\gamma}$ で、 $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ とするものが存在する。 $L(\tilde{\gamma}) = 2\pi$ とすることを示せば証明は終る。 \tilde{M} では $d(\tilde{x}, \partial(\tilde{x})) \geq \pi$ が任意の $\tilde{x} \in \tilde{M}$ に対し て成立しているので、 $L(\tilde{\gamma}) \geq 2\pi$ が必要である。 点 $\tilde{\gamma}(0), \tilde{\gamma}(2\pi/k), \tilde{\gamma}(4\pi/k), \dots, \tilde{\gamma}(2(k-1)\pi/k)$ は π により $\gamma(0)$ に写されるので、 $\pi_1(M) = \mathbb{Z}_k$ により、 $\tilde{\gamma}(2\pi) = \tilde{\gamma}(0)$ が必要である。 故に $L(\tilde{\gamma}) = 2\pi$ であり、従って M は曲率 1 の定曲率空間である。

注意 18. 偶数次元, 完備正定曲率リー-マン多様体は球又は実射影空間である。 従って $\pi_1(M) = \mathbb{Z}_k$ ($k \geq 3$) の場合に M の次元は奇数である必要がある。

5.2. 定理 5.4 に述べた M は $(2m+1)$ -次元 リーマン多様体であるが、特に長さ $2\pi/k$ の閉測地線 γ を許容することから、 M の詳細な構造 (例えば運動群を決定すること) が調べるに値があるだろうか? $\pi_1(M) = \mathbb{Z}_k$ なる仮定は $\pi_1(M) = \mathbb{Z}_3$ なる仮定に亦き変えても良しである (少くとも以下の補題 5.5 - 補題 5.8 まで議論を限れば)。以下で $(2m+1)$ -次元 リーマン多様体が $\pi_1(M) = \mathbb{Z}_3$ を満たし、 $1/4 < \delta \leq k_0 \leq 1$ の M に長さ $2\pi/3$ の閉測地線が存在する場合を考へる。

補題 5.5. M の任意の点 p に対し $d(p, C(p)) = \pi/3$ が成立する。

証明. $d(p, C(p)) = l > \pi/3$ なる点 p が存在したと仮定する。 M は単連結であるから $d(M) \leq \pi/2\sqrt{3} = \pi/2$ 。故に $l \leq \pi/2$ であるから $l > \pi/3$ である。従って単結閉測地線 $\gamma = \{o(t)\} (0 \leq t \leq 2l)$ $o(0) = o(2l) = p$ が M に存在する。 \tilde{M} は S^1 に等長であるから $\pi_0 \tilde{M} | [0, 2l] = \mathbb{Z}$ とある大円 $\tilde{\gamma} = \{\tilde{o}(t)\} (0 \leq t \leq 2\pi)$ が存在する。このとき $l = \pi/2$ が成立したと仮定すれば $\pi_1(M) = \mathbb{Z}_3$ に矛盾するので $l < \pi/2$ が解る。

$\pi(\tilde{o}(0)) = \pi(\tilde{o}(2l)) = \pi(\tilde{o}(4l)) = o(0)$ であるから $\pi_1(M) = \mathbb{Z}_3$ である。

$\tilde{o}(6l) = \tilde{o}(0)$ であるから $6l = 2\pi$ より仮定に反する。

補題 5.6. M の任意の点 p に対し $\text{Max}\{d(p, x) \mid x \in M\}$

$= \pi/2$ であり、従って特に $d(M) = \pi/2$ である。

証明。 M は単連結であり、従って補題 4.2 の対偶により、
 $d(M) \leq \pi/2\delta = \pi/2$ ($\delta = 1$ である) が成立する。従って
 $\text{Max}\{d(p, x) \mid x \in M\} = l = d(p, r)$ とおけるとき、 $l = \pi/2$ を
 示せば証明は終る。補題 5.5 より $\Sigma_r = \{\sigma_r(t)\} (0 \leq t \leq 2\pi/3)$
 $\sigma_r(0) = \sigma_r(2\pi/3) = r$ なる閉測地線 Σ_r が存在する。 r は p から
 の最遠点であるから補題 4.5 に基づき、 $G(p, r)$ には少くとも
 2 つの最短測地線分がある。 $P_1, P_2 \in G(p, r)$, $P_1 \neq P_2$
 とするとき、 $\alpha(\gamma_1'(l)), \alpha_2'(l) \in (0, \pi)$ である。 実際には、
 $\alpha(\gamma_1'(l)), \alpha_2'(l) = \pi$ と仮定すれば \tilde{M} には p の原像が 4 つ以上
 存在するから矛盾を生ずる。従って、再び補題 4.5 を用い
 て、 $\alpha(\gamma_1'(l) + \gamma_2'(l)) \in M_r$ とある角が、 $\pi/2$ 以下の $P_3 \in G(p, r)$
 が存在する。 $\tilde{p} \in \tilde{M}$ で、 $\pi(\tilde{p}) = p$ なる点を一つ固定する。
 $\pi \circ P_3 = P_3$ は $\tilde{\gamma}_3(l) = \tilde{p}$ を満たすものとする。 $\pi \circ \tilde{\Sigma}_r = \Sigma_r$
 を満たす $\tilde{\Sigma}_r$ は $\tilde{M} = S^2$ 上の大円であり、 $\tilde{\gamma}_3(l) \in \tilde{\Sigma}_r$ は自
 明である。従って、 S^2 上に 3 つの等辺測地三角形が存在
 する。明らかに、これらの頂角は至多 $\pi/2$ であり、これより
 から、余弦法則を適用すれば直ちに $\cos l = 0$ となり、
 $l = \pi/2$ であり、これは右の如く。

注意 19. $\pi_1(M) = \mathbb{Z}_k$ の場合の議論でも、 $G(p, r)$ 上に、
 少くとも 2 つの異なる相異なる最短測地線分が存在すれば十分

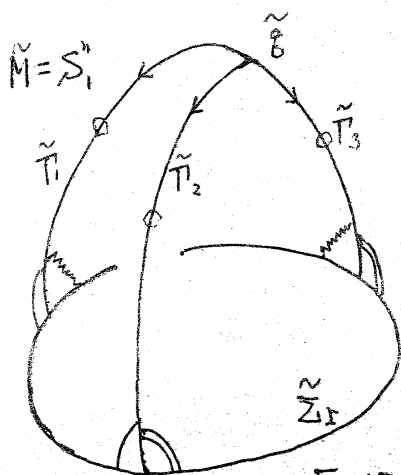


Fig 18

である。又、このことから直ちに $d(p, \sigma_g(t)) = \pi/2$ が任意の $t \in [0, 2\pi/3]$ に対して成り立つことが解る。

補題 5.5 に基づき、 M の各点 x に於て x を通る長さ $2\pi/3$ の単純閉測地線が存在する。これを Σ_x

と書くことにする。以下 $d(p, q) = \pi/2$ なる 2 点を固定する。

補題 5.7. $d(p, q) = \pi/2$ を固定する。 $T_1, T_2, T_3 \in G(p, q)$ に対して次のことが成り立つ。

(1) $\angle(\gamma'_i(0), \gamma'_{i+1}(0)) = 2\pi/3$, $\angle(\gamma'_i(2\pi/3), \gamma'_{i+1}(2\pi/3)) = 2\pi/3$
 $i = 1, 2, 3 \pmod{3}$.

(2) $\Sigma_g, T_{i+1}, T_{i+2}$ を境界に持つ全測地的曲面片 \mathcal{F}_i が存在し、 \mathcal{F}_i は測地線分族 $\lambda_* \in G(\sigma_g(t), p), \lambda_* = \{\lambda_*(s)\} (0 \leq s \leq \pi/2)$ により生成され、 $t \rightarrow \lambda'_*(0)$ に Σ_g に沿う平行なベクトル場があり、 $\lambda'_*(0) = -\gamma'_{i+1}(0), \lambda'_*(2\pi/3) = -\gamma'_{i+2}(0)$ を満たす。

(3) $\pi \circ \tilde{T}_i = T_i$ なる S^2 上の四分円 $\tilde{\mathcal{F}}_i(0) = \tilde{p} (i=1, 2, 3)$ なる \tilde{p} と \tilde{T}_i とを固定したとき、 $\tilde{\mathcal{F}}_1 \cup \tilde{\mathcal{F}}_2 \cup \tilde{\mathcal{F}}_3$ は S^2 上の $\tilde{\Sigma}_g$ を赤道、 \tilde{p} を北極とみなしたときの、 $\tilde{\mathcal{F}}_i$ を含む 2 次元半球の π による像である。

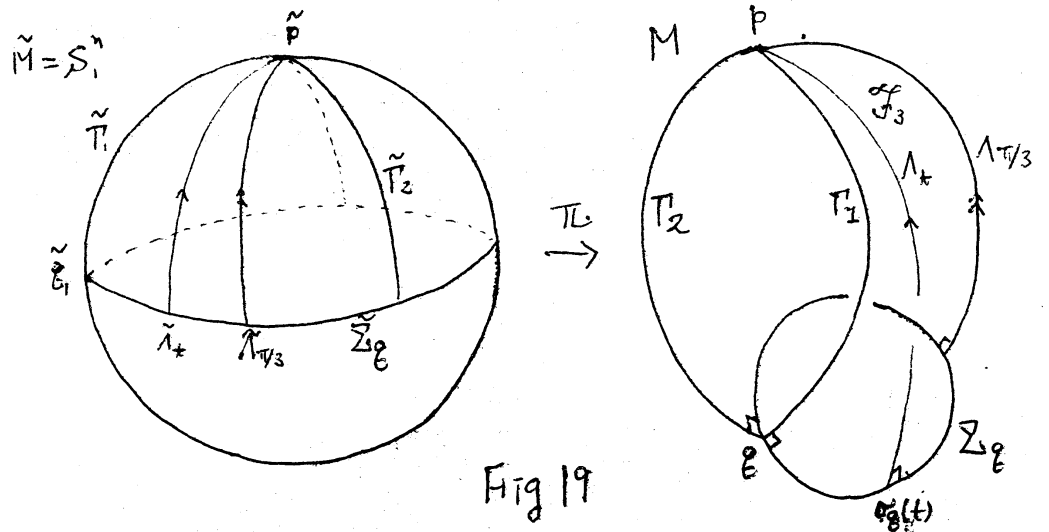


Fig 19

証明。

$\tilde{\Sigma}_g, \tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_2$ を含む 2次元半球上で $\tilde{\lambda}_* \in G(\sigma_g(\#), \tilde{p})$ を考へる。
 $\tilde{q}_1 = \tilde{\gamma}_1(\pi/2)$ とおき、 $d(\tilde{q}_1, \tilde{\lambda}_*(s)) < \pi$ であるから、この半球面上で測地線族 $G(\tilde{q}_1, \tilde{\lambda}_*(s))$ ($0 \leq s \leq \pi/2$) を $\tilde{M}_{\tilde{q}_1}$ 内に lift し、Rauch の定理を用いれば証明は完結する。

補題 5.8 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ を補題 5.7 の全測地的曲面片としとき $\Lambda_{\pi/3}, \Lambda_\pi, \Lambda_{5\pi/3}$ は $\mathcal{C}(\mathcal{F}_3)$ に含まれる。

証明。 $\Lambda_{\pi/3} \subset \mathcal{F}_3$ 上の真 $\lambda_{\pi/3}(s)$ は \mathcal{F}_3 上の 2本の等長な測地線分 α と結合される。これら M の最短測地線分 $(\alpha, \lambda_{\pi/3}(s))$ も結合される。これら M の最短測地線分 $\beta \in G(\tilde{q}_1, \lambda_{\pi/3}(s))$ が存在する。このとき \tilde{M} 上には π より $\lambda_{\pi/3}(s)$ に map される真が少なくとも 6 真は存在し、従って $2\pi_1(M) = \mathbb{Z}_3$ に反する。

注意 20 $\mathcal{F}^+ = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3$ とおき、 $\sigma_p(\pi/3)$ を p と見

\rightarrow $\sigma_p(\pi/3)$, Σ_g に対して上述の議論を繰り返せば、
 $T_{i+1} \in [\pi/2, \pi]$, $T_{i+1} \in [\pi/2, \pi]$ と Σ_g を境界に持つ全測地的
 曲面片 \mathcal{F}_{i+1}^- と $\mathcal{F}^+ = \mathcal{F}_1^+ \cup \mathcal{F}_2^+ \cup \mathcal{F}_3^+$ とを得る。ここで
 $\mathcal{F}_{p,g} = \mathcal{F}^+ \cup \mathcal{F}^-$ とおくと、 $\mathcal{F}_{p,g}$ は $\tilde{T} \in [0, \pi]$ と $\tilde{\Sigma}_g$ とを
 含む S^2 内の 2次元部分空間の π による image Z^2 あり、
 この 2次元球面の赤道 $\tilde{\Sigma}_g$ は Σ_g を 3回 cover している。 π
 をこの 2次元球面に制限すれば、 π は isometric immersion
 Z^2 である。又 $\mathcal{F}_{p,g}$ の g に於る接空間は $\sigma_g(0)$ を含む 3枚の
 2次元平面で、交角が夫々 $2\pi/3$ ずつの Z^2 である。

注意 21. $A \equiv \{x \in M \mid d(p, x) = \pi/2\}$ なる M の部分集合
 は Σ_g を含む Z^2 であるが一般に $\Sigma_g \supset A$ は成立しない。 A の
 任意の点 x に於る Σ_x は A に含まれる。従って A は長さ
 $2\pi/3$ の閉測地線の集合よりなる。 $\dim M = 3$ のとき、
 $A = \Sigma_g$ Z^2 であるが、 $\dim M$ に depend し A 内の閉測地線の
 個数が決まれば M の構造はよく解るはず Z^2 である。

注意 22. $\mathcal{F}_{p,g}$ の p に於る接空間は 1枚の平面であり、
 これは $\sigma_p(0)$ に直交している。従って $\mathcal{F}_{g,p}$ (g 北極、 Σ_p 赤
 道で p が東経 0 度と考へた曲面) の g に於る接空間が $\mathcal{F}_{p,g}$
 の g に於る 3枚の接平面に垂直で、その交わりは $\gamma_1'(\pi/2), \gamma_2'(\pi/2)$
 $\gamma_3'(\pi/2)$ Z^2 である。

次に $\mathcal{F}_{\sigma_p(t), g}$ を考へよう。 $\mathcal{F}_{\sigma_p(t), g}$ の g に於る接平面は 3

木の接平面で、互いに交り合う2平面の交角は $2\pi/3$ であり、 $\mathcal{F}_{p,g}$ のそれを角 t だけ回転させたものである。

かくして合同な2次元全測地的曲面族 $\mathcal{F}_{p(t),g}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) が得られた。この曲面族の g に対する接平面全体の集合は M_g 内の3次元部分空間を張る。2) 1)。

V. 定理3.5の証明。

M の一実点 p に対する *tangent cut locus* C_p とは次の如く定義される M_g の部分集合のことである。

$C_p = \{x \in M_p \mid \exp_p X \text{ は測地線 } t \rightarrow \exp_p t \frac{X}{\|X\|} \text{ に沿って } p \text{ の cut point である}\}$ 。

我々は $(1-k)$ type の L -空間の *tangent cut locus* の構造を調べるのであるが $L(1,3)$ が最も基本であり、 $L(1,3)$ の *tangent cut locus* が解れば、一般の $L(1,k)$ の *tangent cut locus* も全く同様の議論から解るので、以下 $L(1,3)$ を調べる。

$M^* = L(1,3) \equiv S^3/G$ とおく。 G は order 3 の cyclic group であり、 G の生成元 σ は $\sigma = \begin{bmatrix} R(1/3) \\ R(1/3) \end{bmatrix}$ を満たすとする。 M^* 上の任意に固定される一実点 p^* に対する $C_{p^*}^* \subset M_{p^*}^*$ が、 M 上の任意の実点 p に対する $C_p \subset M_p$ と合同であり、cut locus としこの構造 (identification の構造) を定め、両者が一致していることを主張すれば、 \mathcal{L}_g を $M_g \rightarrow M_{g^*}^*$ の適当な isometric isomorphism としたとき、 $\exp_{p^*} \circ \mathcal{L}_g \circ \exp_p^{-1}$ によ

り M から M^* への global isometry を得る。

以下、 C_{g^+} の構造を調べる。 G は order 3 の cyclic group であり G の生成元 g は $g = \begin{bmatrix} R(V_3) & \\ & R(V_3) \end{bmatrix}$ とする。但し $R(\theta)$ は回転 $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos 2\pi\theta & \sin 2\pi\theta \\ -\sin 2\pi\theta & \cos 2\pi\theta \end{bmatrix}$ を表わすものとする。

S^3 上の任意の点 x に対して $g(x) + g^2(x) + g^3(x) = 0$ であるから $g(x), g^2(x)$ は同一の大円周上にあり、それを三等分してゐる。これは補題 5.5 の事情とよく合致してゐる。

$S^3 \subset E^4$ の局所座標 (u, v, w) を E^4 の orthonormal basis (e_1, e_2, e_3, e_4) を用いて $x = x(u, v, w) = e_1 \cos u \cos v + e_2 \sin u \cos v + e_3 \sin v \cos w + e_4 \sin v \sin w$ で定義する。但し (u, v, w) の定義域は $-\pi/2 < u < \pi/2, 0 < v < \pi/2, \pi/2 < v < \pi, -\pi/2 < w < \pi/2$ 。

$w = w_0(\cos t)$ で定義される曲面は $e_1 \cos u + e_2 \sin u$ を赤道に持ち $e_3 \cos w_0 + e_4 \sin w_0$ を北極に持つ 2次元球面 (の一部) であるから、 S^3 は $\Sigma = \{0, \pi\}$ ($0 \leq u \leq 2\pi$)、 $\sigma_u = e_1 \cos u + e_2 \sin u$ を赤道に持ち、大円 $e_3 \cos w + e_4 \sin w$ 上に両極を持つ 2次元球面族により生成されることを示すことが出来る。 $w = 0$ で定義される

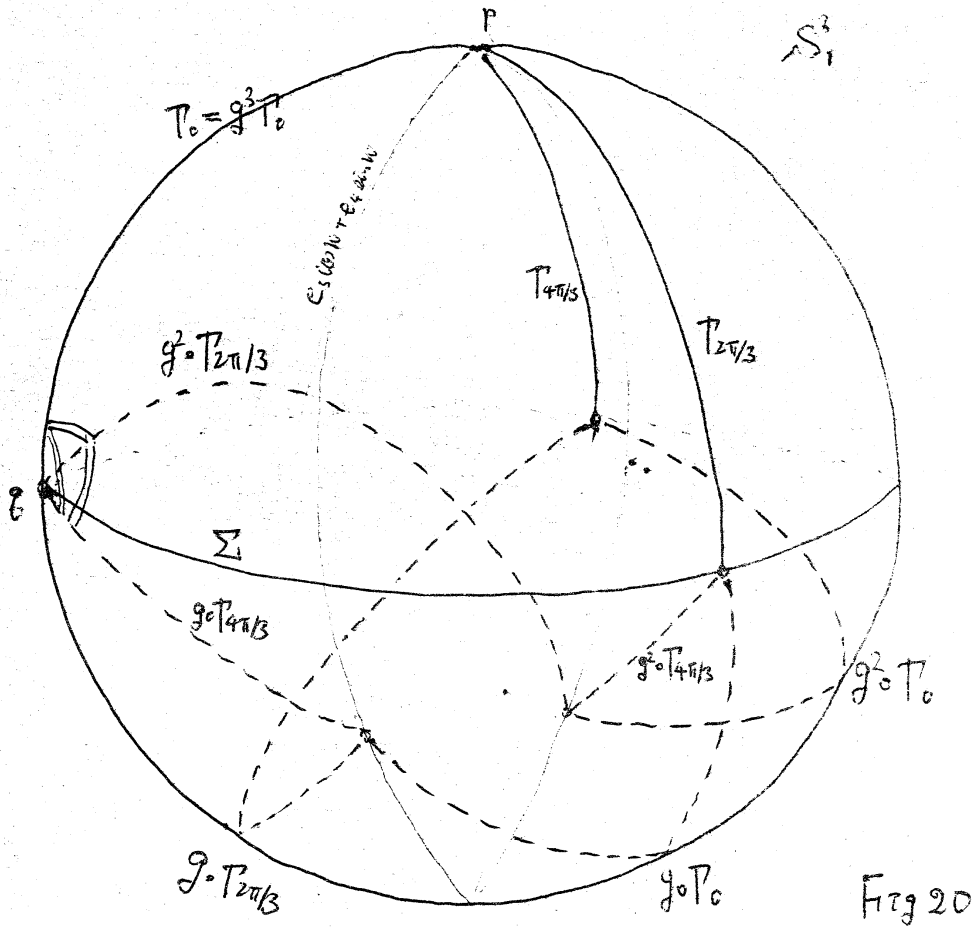
$$S_{e_3}^2 = \{e_1 \cos u \cos v + e_2 \sin u \cos v + e_3 \sin u \mid -\pi/2 < u < \pi/2, 0 < v < \pi/2, \pi/2 < v < \pi\}$$

に G が作用する様子を調べよう。

S_p^2 は $p = e_3 \cos w + e_4 \sin w$ を北極に持ち、 $e_1 \cos u + e_2 \sin u$ を赤道に持つ 2次元球面を表わすものとする。 $\forall x \in S_{e_3}^2$

に対し $\alpha = e_1 \cos u \sin v + e_2 \sin u \sin v + e_3 \cos v + e_4 \cdot 0$ に対し
 $g(\alpha) = e_1 \cos(u - \frac{2\pi}{3}) \sin v + e_2 \sin(u - \frac{2\pi}{3}) \sin v + e_3 \cos \frac{2\pi}{3} \cdot \cos v$
 $- e_4 \sin \frac{2\pi}{3} \cdot \cos v$. 従, 2赤道上の莫は $g \in G$ により
 赤道上の $2\pi/3$ 回転した莫に射り, 赤道上に在り莫は $g \in G$
 により $S_{e_3}^2$ 外の莫に射される。 $q = (1, 0, 0, 0)$, $p = (0, 0, 1, 0)$
 とし, p と q とを結ぶ四分円を T_u とおく。 π を S_1^3 か
 ら M^* への projection とし, $\pi(S_1^3)$ は M^* 内の self-
 intersection を持つ全測地的曲面で $\Sigma^* = \pi \circ \Sigma$ は M^* の
 長さ $2\pi/3$ の閉測地線であり Σ により 3回 cover される。
 以下 π による像を $(*)$ を π として表わすことにする。 S_1^3 上
 の他の莫では $\pi|_{S_2^1} : S_2^1 \rightarrow \pi(S_2^1)$ は $|-1|$ であり, $p^* = \pi \circ p$
 と Σ^* 上の莫 $\sigma^*(u)$ との距離は $\pi/2$ である。 実さし $G(p^*, \sigma^*(u))$
 内に $\pi/2$ 未満の長さ ϵ を持つ測地線分が存在したと仮定する
 と, π による lift を作ることにより $d(p, \sigma(u)) < \pi/2$ と
 なり矛盾を生ずる。 又, $G(p^*, \sigma^*(u))$ は長さ $\pi/2$ の
 測地線分よりなり, γ からは T_u^* , $T_{u+2\pi/3}^*$, $T_{u+4\pi/3}^*$ 2
 あり, 且つ p^* に対する γ からの交角は $2\pi/3$ あり γ が解了。
 $\sigma^*(u)$ に対する γ からの交角を測るには, $\sigma^*(0) = q^*$ に対する場合と
 全く同じであるから T_0^* , $T_{2\pi/3}^*$, $T_{4\pi/3}^*$ の q^* に対する交角を測れば
 よい。 明らか $T_{2\pi/3}^* = \pi(\sigma^2 T_{2\pi/3})$, $T_{4\pi/3}^* = \pi(\sigma \cdot T_{4\pi/3})$
 であり, T_0^* , $g^2 T_{2\pi/3}^*$, $g T_{4\pi/3}^*$ の q に対する交角は $2\pi/3$ である。

g^* に於る T_0^* , $T_{2\pi/3}^*$, $T_{4\pi/3}^*$ の夾角も $2\pi/3$ である。(Fig 20)



注意 2. $L(1, k)$ のとき P_0^* , $T_{2\pi/k}^*$, ..., $T_{2(k-1)\pi/k}^*$ の g^* に於る夾角は全て $2\pi/k$ である。

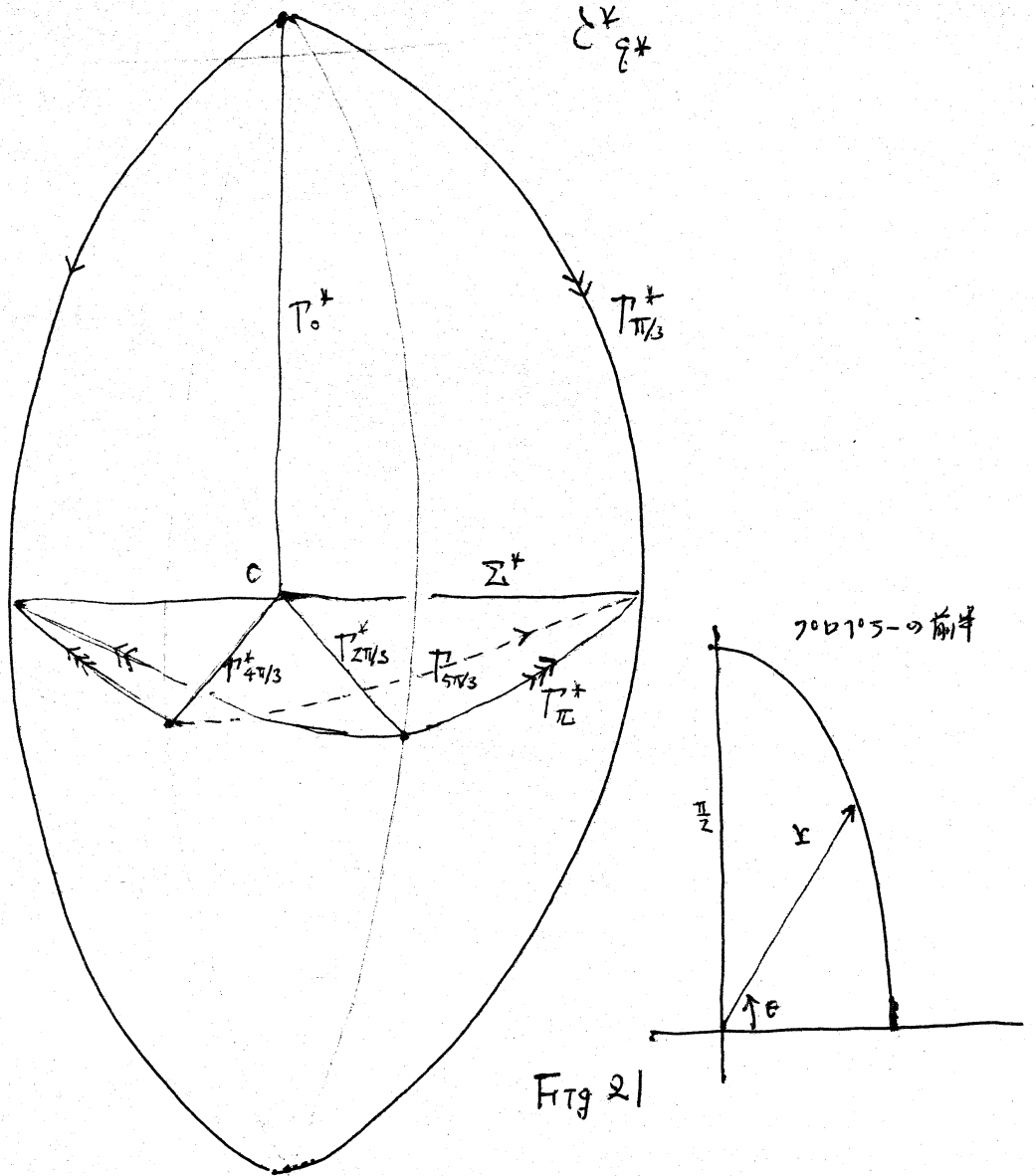
$\pm 2 C_{g^*}^*$ を調べるために M^* の cut locus に注目する。
 $\pi_0 S_p^2$ 上の g^* の cut locus が $C^*(g^*)$ に含まれることを主張する。
 $\pi_0 S_p^2$ 上の g^* の cut locus は明らかに $T_{\pi/3}^* | [0, \pi]$, $T_{\pi}^* | [0, \pi]$, $T_{5\pi/3}^* | [0, \pi]$ である。実は $T_{\pi/3}^* | [0, \pi]$ は $\sigma(0)$, $\sigma(2\pi/3)$ から等距離にあり任意の $\Lambda \in G(g, \gamma_{\pi/3}^*(t))$ $t \in [0, \pi]$

に対して $\Lambda^* \in \Gamma(\mathcal{G}^*, \mathcal{Y}_{\pi/3}^*(M))$ とあることは自明であるから
 $\Gamma_{\pi/3}^*|_{[0, \pi]}$ は $\pi_0 S_p^2$ 上で \mathcal{G}^* の cut locus に含まれる。更に
 $\Gamma_{\pi/3}^*|_{[0, \pi]} \subset C^*(\mathcal{G}^*)$ (M^* の cut locus) であることが容易に示す如く、
 $\Gamma_{\pi}^*|_{[0, \pi]}$, $\Gamma_{5\pi/3}^*|_{[0, \pi]}$ についても同様である。 \mathcal{G}^* に於ける
 $\pi_0 S_p^2$ の接平面が3枚あることを注意して、任意の単位
 接ベクトル (\mathcal{G}^* に於ける) X^* をとる。 X^* が属する接平面に對
 応する一葉の全測地的曲面片が S_p^2 を3本の大円弧 $\Gamma_{\pi/3}^*|_{[0, \pi]}$,
 $\Gamma_{\pi}^*|_{[0, \pi]}$, $\Gamma_{5\pi/3}^*|_{[0, \pi]}$ で分けて一つの component の π による
 image であるから、 X^* 方向の cut locus ($\pi_0 S_p^2$ 上の) は
 $\Gamma_{\pi/3}^*|_{[0, \pi]}$, $\Gamma_{\pi}^*|_{[0, \pi]}$, $\Gamma_{5\pi/3}^*|_{[0, \pi]}$ に含まれてゐる。故に
 この3本の測地線分が $\pi_0 S_p^2$ 上の \mathcal{G}^* の cut locus であること
 が解る。かく ($2\pi_0 S_p^2$ 上の \mathcal{G}^* の tangent cut locus の
 内部は $L > \pi$ 型をして交角 $\pi/3$ の等角を有する6枚の羽根 (ワ
 ロドロー) より出来てゐる、その軸 (シャフト) の長さ $\pi/3$, 羽根
 の長さ $\pi/2$ であり、羽根の半分を才1現象内の極座標によ
 り表示すれば $\sqrt{3} \cot \theta = \cot \phi$ である。

次に $\pi_0 S_p^2$ 上の \mathcal{G}^* の cut locus が $C^*(\mathcal{G}^*)$ に含まれてゐること
 が解るので、任意の w に対して、北極を $e_3 \cos w + e_1 \sin w$ とし
 $2 \cdot S_{e_3 \cos w + e_1 \sin w}^2$ について同様の議論を繰り返すことによ
 り $C^*(\mathcal{G}^*)$ が完全に求まる。[(17), (18), (20) が定義されてゐる所では
 適宜右変換を行へば cover してゆく]。要するに、任意の

単位接点 $X^* \in M_{g^*}^*$ に対し $X^* = \sigma_1^*(\omega) \cos \alpha + Y^* \sin \alpha$
 $\|Y^*\| = 1$, $\langle Y^*, \sigma_1^*(\omega) \rangle = 0$, $Y^* \in M_{g^*}^*$ と表わされる。 Y^* に対し
 $\rho' = e_3 \cos w + e_4 \sin w$ なる $w \in \mathbb{R}$, $Y^* \in (\pi_0 S_{\rho'}^2)_{g^*}$ とする
 w が存在する。従って $\exp_{p_{g^*}} \pm X^*$ の定義士れを M^* の測
 地線に沿って g^* の cut point は $\pi_0 S_{\rho'}^2$ 上の $\exp_{p_{g^*}} \pm X^*$ に
 沿って g^* の cut point と一致し、その長士 L は $\sqrt{3} \cot L = \cos \alpha$
 と与えられる。 $70^\circ 10' 30''$ の小ちの前半は 1° と $9^\circ 10' 30''$
 $70^\circ 30''$ の小ちの後半に identify 士れ、特に $70^\circ 10' 30''$ の原典
 0 からの最遠典は $2\pi/3$, $4\pi/3$ 回転して $70^\circ 10' 30''$ の最遠典に
 identify 士れる。

士 $Z_g = M_g \rightarrow M_{g^*}^*$ を isometric isomorphism とし、
 $Z_g(\sigma_1^*(\omega)) = \sigma_1^*(\omega)$, $Z_g(\delta_1^*(\pi/2)) = \delta_1^*(\pi/2)$ を満たすものとする。
 系 i は S^2 上の直角 = 等辺三辺形が底辺の長士が $2\pi/3$
 なるもの π による像であるから系 i 上の g の tangent
 cut locus は極座標 (r, θ) による表示で $\sqrt{3} \cot L = \cos \theta$ とある
 ことは自明である。又、 C_g の identification の構造が $C_{g^*}^*$
 のそれと全く同じであることは解るから Z_g により C_g と
 $C_{g^*}^*$ とは完全に合同である。又 $C_g, C_{g^*}^*$ は $\exp_{p_{g^*}}$ と共に \exp_{p_g}
 \exp_{p_g} が maximal rank を持つ $M_g, M_{g^*}^*$ の近傍内
 に含まれ士れるので $\exp_{p_{g^*}} \circ Z_g \circ (\exp_{p_g} | U_\pi)^{-1}$ により M と
 M^* とは等長である。 (証明終り)。



注意23. $L(1, k)$ の場合, $70^\circ 15'$ の前半を第一象限内に極座標を用いて表わせば $\cot \theta = \cot \pi/k \cdot \cot \theta$ となる。

§6 補意.

$\equiv \equiv$ は Klingenberg [8] の問題集を指す。 $\equiv \equiv$ は限り notation は全く [8] そのままを用いる $\equiv \equiv$ にする。

以下 M は m -次元 ($m \geq 3$) complete, 単連結右リ- $\equiv \equiv$ 多様体で $1/4 \leq K_m \leq 1$ を満たすものとする。

Basic Lemma (Klingenberg [8]).

M は完備連結右リ- $\equiv \equiv$ 多様体で, $K_m \leq C$ を満たす正数 C が存在するものとする。 M の 2 点 p, q に対し $\equiv \equiv (p, q)$ を p から q の M 上の piecewise smooth 右曲線の全体と ($\equiv \equiv$) せよ。 $\equiv \equiv (p, q)$ 内の 2 本の異なる測地線分 G_0, G_1 2 $\equiv \equiv L(G_0) \leq L(G_1)$ を満たし, かつ, $H_t \in \equiv \equiv (p, q)$, $0 \leq t \leq 1$ なるホモトピー H_t 2 $H_0 = G_0, H_1 = G_1$ を満たすものが存在するならば, $L(G_0) + L(H_{t_0}) \geq 2\pi/\sqrt{C}$ を満たす $t_0 \in [0, 1]$ が存在する。但し $H \in \equiv \equiv (p, q)$ に対し $L(H)$ は H の長さを表わす。

$\equiv \equiv$ は、例文 [12] の p198 の Lemma と本質的に同じであり、正しく follow できる $\equiv \equiv$ の証明は省略する。

注意 24. Lemma の仮定の下に t_0 を $L(G_0) + L(H_{t_0}) = 2\pi/\sqrt{C}$ とする木の最小値としたとき、 G_0, H_{t_0} は Fig 22 の如く測地

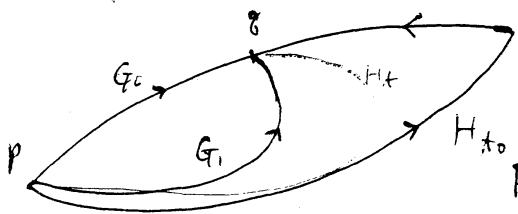


Fig 22. $\equiv \equiv$ 二辺形 $\equiv \equiv$ 右リ, p 以外の頂点 $\equiv \equiv$ p から q の長さは $\equiv \equiv \pi/\sqrt{C}$ とする。

この Lemma を用い 2 次の 定理 を 証明 し たい。

定理 1. M は コンパクト 単連結 リーマン多様体 で $1/4 \leq K_M \leq 1$ とし たい と き、 M の 任意 の 点 p に 対 し $d(p, \partial M) \geq \pi$ が 成立 する。

こゝで $\dim M$ が 偶数 の 場合 は すでに 証明 し たい の で $\dim M \geq 3$ の 仮定 の 下 に 証明 し たい。 定理 1 の 仮定 の 下 に 結論 を 否定 す る べし $L(G) < 2\pi$ の 単純閉測地線 が M に 存在 する。 以下 論文 に 従 っ て この 定理 の 証明 の た め に 4 つ の 補助定理 を 用 意 する。 補助定理 1 は 正し い。 補助定理 2 と 3 と 4 は 互 い に 信用 す る べし 根拠 を 見 出 せ たい。 補助定理 4 は 補助定理 2, 3 を 基礎 と し て いる の で こゝで 4 を 省 く こ と に する。 以下 $\dim M \geq 3$ の 仮定 を 満た す M の 4 を 考 へ る。

補助定理 1. $\mathbb{S}_b(p, \varepsilon)$ は non-degenerate と する。 $G_0, G_1 \in \mathbb{S}_b(p, \varepsilon)$ $G_0 \neq G_1$ の 測地線 分 で $L(G_0) + L(G_1) < 2\pi$ が 成立 し たい と 仮定 する。 こゝで $t \in [0, 1]$ へ $H_t \in \mathbb{S}_b(p, \varepsilon)$ ($0 \leq t \leq 1$) を

$H_0 = G_0, H_1 = G_1$ かつ $L(H_t) < 2\pi$ for any $t \in [0, 1]$ を 満た す も の が 存在 する。 特 に $\text{Max}\{L(H_t) \mid 0 \leq t \leq 1\} = L(H_{t_0})$ を 満た す H_{t_0} は 測地線 であり、 $\text{Ind } H_{t_0} \leq 1$ を 満た す。

証明。 $\tilde{H}: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$ は $\tilde{H}_t \in \mathbb{S}_b(p, \varepsilon), \tilde{H}_0 = G_0, \tilde{H}_1 = G_1$ の $t \in [0, 1]$ へ (連続写像) と し たい と き。 矩形 の 境界 が C^∞ -級 である から、 内部 を 変形 (2 piecewise に smooth) する

H をおまかえることができる (Whitney)。 Ω は H に対しよく知られた broken geodesic の変形を行えば H_t が測地線でないときはこの変形により、より短い broken geodesic に作り、 H_t が測地線のときは長さは変わらない。 $\Omega_{p,q}$ は non-degenerate であるから H 内の長さ 2π 以上の測地線 H_t は $\text{Ind } H_t \geq n-1 \geq 2$ を満たす。従ってこの場合も変形して $\text{Ind } H_t \leq 1$ とすることができる (Moise の定理, [12], p249)。かくして H 内の測地線は Index が 1 以下となるように変形された。 $\Omega_{p,q}$ 内には測地線は有限回しか存在しないので上記の変形を有限回くり返すことにより結論を得る。

補助定理 2. G は $\mathcal{L}(G) < 2\pi$ を満たす M の閉測地線とする。 G 上の点 p に対し $H_t \in \Omega(p,p)$ なるホモトピー $H_0 = \{p\}$, $H_1 = G$ が、 $\mathcal{L}(H_t) \leq 2\pi$ for all $t \in [0,1]$ を満たす H_t が存在する。特に、 $\mathcal{L}(H_t) = 2\pi$ のときには H_t は測地線である。

証明. p に対し $\Omega(p,q)$ が non-degenerate な実列 $\{q_i\}$ であり $\lim_{i \rightarrow \infty} q_i = p$ なるものを次の様にとる。

G の p に対する単位接空間 $T_p G \in A$ とし $\exp_p(A) = p$ とおくと $(1-\varepsilon)A$ が \exp_p の critical point ではない $\varepsilon > 0$ がとれる。このとき $(1-\varepsilon)A$ の近傍 V_ε が存在し $\exp_p|_{V_\varepsilon}$ が local diffeo.

に対応するようになる。 $\pm 2 \exp_p(U)$ 内には $\mathbb{R}(CP, \mathbb{R})$ が non-degenerate とあるより \mathbb{R}_0 がとれる。

± 2 、二つの \mathbb{R}_0 の選いなおから $G_0^i, G_1^i \in \mathbb{R}(CP, \mathbb{R})$ の 2本の測地線分を、 $\lim G_0^i = \{p\}$, $\lim G_1^i = G$ なる G_0, G_1 が存在する。仮定より番号 N が存在して、 $i > N$ なる任意の i に対し $\mathcal{L}(G_0^i) + \mathcal{L}(G_1^i) < 2\pi$ が成立するから、このとき補助定理1の仮定が満たされる。故に $H_x^i \in \mathbb{R}(CP, \mathbb{R})$ なるホモトピー $H_0^i = G_0^i, H_1^i = G_1^i, \mathcal{L}(H_x^i) < 2\pi$ なるものが存在する。このホモトピーの後 H_x^i から結論の H が作れるとして、これが大きな論理の飛躍があると思われる。

我々は補助定理2が正しいと仮定して次に進む事にしよう。

補助定理3. 閉測地線 G で $\mathcal{L}(G) < 2\pi$ なるものが M に存在したと仮定する。 $p \in G$ を任意に固定したとき、ホモトピー $H_x \in \mathbb{R}(CP, \mathbb{R})$ で、 $H_0 = \{p\}, H_1 = G$, 更に $\mathcal{L}(H_x) \leq 2\pi$ を満たし更に、 $\mathcal{L}(H_x) = 2\pi$ とする x の最小値を x_0 とおいたとき、 H_{x_0} は次の条件を満たす。

(1) H_{x_0} は長さ 2π の閉測地線である。

(2) H_{x_0} の各点 $H_{x_0}(s)$ に対し、 H_{x_0} に接する plane section $\sigma_s = (H_{x_0}'(s), X(s))$ で $K_{\sigma_s} = 1$ を満たし、更に σ_s に垂直な σ_s^* に対しては $K_{\sigma_s^*} = 1/4$ が成立するようになる σ_s が存在し、且つ σ_s は H_{x_0} に平行である。

(3) $t < t_0$ 上の P^* 対象とする。 P, E を結ぶ測地線
 分枝 $G(t)$, $0 \leq t \leq \pi$ で $\mathcal{L}(G(t)) = \pi$ かつ, P に於る $G(t)$ と H_{t_0}
 との交角が $\alpha < \pi$ となるものが存在する。

注意 25. (3) は $\{G(t)\}$ が 2次元の半球 (半径 1 の) をなし, H_{t_0}
 がその半球の境界 (赤道) になることを主張している。

証明. $t < t_0$ に対し \exp_P を通して M_P に H_t の lift
 が作れる。 $M^* \equiv S^2$ とおいて, M^* 上に H_t に対応する H_t^*
 を ($t < t_0$ に対し) 作り出すことが可能である。 このとき Rouché
 の定理より $\mathcal{L}(H_t^*) \leq \mathcal{L}(H_t) < 2\pi$ $0 \leq t < t_0$ が成立する。
 $t \rightarrow t_0$ とし去ると, H_t^* は S^2 上のある curve $H_{t_0}^*$ に収束す
 る。 実数 Δ を H_t の弧長に比例した $[0, 1]$ に与えられた H_t の
 1対1 X-チーとする。 $\Delta \in [0, 1/2)$ に対し $H_{t_0}|[0, \Delta]$ の
 lift は作れる。 lift が作れたい場合は $H_{t_0}|[0, \Delta]$ であるが
 1対1 X-チーを逆向きにすれば $H_{t_0}|[0, \Delta]$ での lift が作れるこ
 とが容易に解る。 従って Δ を $1/2$ に対し $\lim_{t \rightarrow t_0} H_t^*(\Delta) = H_{t_0}^*(\Delta)$
 が成立し, $H_{t_0}|[1/2, 1]$ が lift できる。 しかし長さの関係から
 $\lim_{\Delta \rightarrow 1/2} H_{t_0}^*(\Delta) \rightarrow E^*$ (E^* は P^* の対象)。 従って H_t^* はある一定形
 $H_{t_0}^*$ に収束することが解る。 従って 4 段目の問題
 がある。

H_{t_0} は E に於て平角 π の $H_{t_0}^*$ も E^* で平角 π とある。 故に
 $H_{t_0}^*$ は P^* で平角とあるので H_{t_0} は閉測地線である。

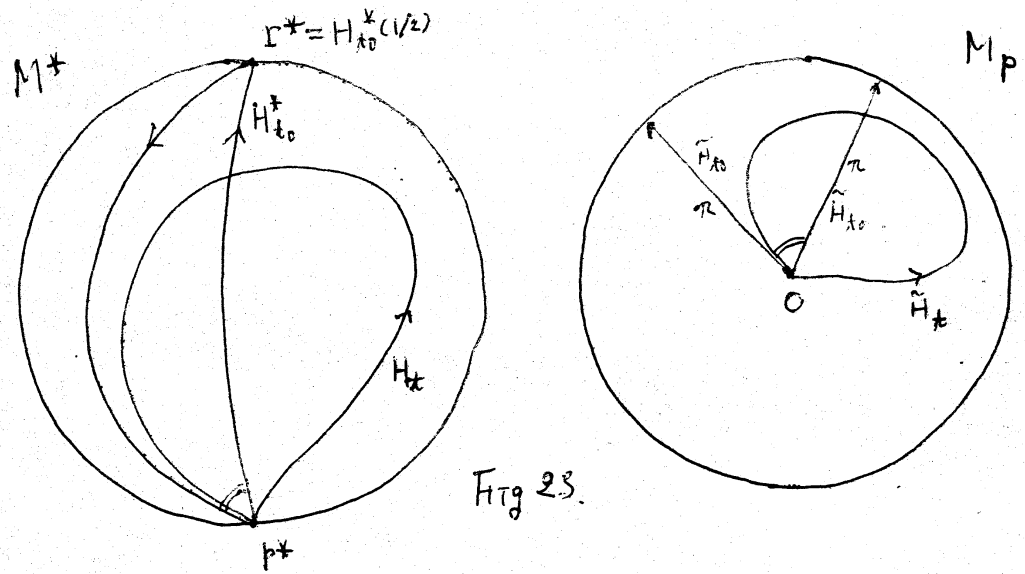


Fig 23.

$M^* = S^1$ であるから

A: $H_{t_0}^*$ の r^* に於ける角が π と右ること、 $H_{t_0}^*$ の p^* に於ける角が π と右ることと同値である。

$Z_p: M_p \rightarrow M_{p^*}^*$ は isometric isomorphism である

B: $H_{t_0}^*$ の p^* に於ける角が π と右ること、 H_{t_0} の p に於ける角が π と右ることと同値である。

従って、A, B より「 r^* に於ける $H_{t_0}^*$ の角が π と右ること」と「 p に於ける H_{t_0} の角が π と右ること」は同値な関係にあることが解る。

一方 smooth curve H_t^* の極限 $H_{t_0}^*$ は一般に連続曲線であるから、 r^* に於ける $H_{t_0}^*$ の角が π と右ことは証明を要する事である、この明白な事ではない。 實に $r^* = H_{t_0}^*(1/2)$ に於ける微分可能性が保証されることが尚更の事である。

マホラの理由により、我々は Klingenberg の [8] を認める
ことが出来ない。

文 献

- [1] M. Berger, Les variétés riemanniennes ($1/4$) pincées,
Ann. Scuola, Nor. Sup., Pisa. 14(1960), 161-170.
- [2] " Sur quelques variétés riemanniennes suffisamment
pincées, Bull. Soc. math. France 88(1960), 57-71.
- [3] " Sur les variétés à courbure positive de diamètre
minimum, Comm. Math. Helv. 35(1961), 28-34.
- [4] R. Bott, On manifolds all of whose geodesics are closed,
Ann. of Math., 64(1954), 357-382.
- [5] W. Klingenberg, Contributions to Riemannian Geometry in the large,
Ann. of Math., 69(1959), 654-666.
- [6] " Neue Ergebnisse über Konvexe Flächen,
Comm. Math. Helv., 34(1960), 17-36.
- [7] " Über Riemannsche Mannigfaltigkeiten
mit positiver Krümmung, Comm. Math. Helv.
35(1961), 47-54.
- [8] " Über Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit
nach oben beschränkter Krümmung, Ann. di Math.,
60(1962), 49-59.
- [9] H. Nakagawa, A Note on theorems of Bott and Samuelson,
J. Math. Kyoto Univ., 7(1967), 205-220.

- [9] H. Nakagawa, Riemannian manifolds with many geodesic loops, *J. Math. Soc. Japan*, 20 (1968), 648-654.
- [10] S. B. Myers, Riemannian manifolds in the large, *Duke Math. J.*, 1 (1935), 39-49.
- [12] D. Gromoll-W. Klingenberg-W. Meyer, *Riemannsche Geometrie im Grossen*, Springer-Verlag, 1968.
- [13] K. Hattuse and R. Takagi, On W^{\pm} manifolds, *Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A*, 10 (1968), 10-16.
- [14] H. Nakagawa and K. Shiohama, On Riemannian manifolds with certain cut loci, to appear.
- [15] K. Shiohama, On the diameter of S -pinched Riemannian manifolds, to appear.
- [16] M. Sugimoto, On Riemannian manifolds with a certain closed geodesic, to appear.
- [17] H. Rauch, A contribution to differential geometry in the large, *Ann. of Math.*, 54 (1951), 38-55.
- [18] V. A. Toponogov, Оценка длины замкнутой геодезической на выпуклой поверхности, *Докл. Акад. Наук, С. С. С. Р.*, 24 (1959), 282-284.

- [19] V.A. Toponogov, Riemannian spaces having their curvature bounded below by a positive number, Amer. Math. Soc. Transl. Ser., 39(1964), 291-336. (Uspehi Math. Soc., 14(1959), 87-130).
- [20] Y. Tsukamoto, Closed geodesics on certain Riemannian manifolds of positive curvature, Tôhoku Math. J., 18(1966), 138-143.
- [21] J. Wolf, Spaces of constant curvature, Mc-Graw-Hill, Inc.