数理解析研究所講究録
第67巻 1969年 61-74

連立型関数方程式における
リプシツ定数の評価について

慶大 工 管理工学科 柳井 浩

§1 はじめに

線型連立方程式を解くのによく用いられる方法にGauß-Seidel法（Iterationsverfahren in Einzelschritten, Процесс Зейделя ）というのがある。これは，方程式を

$$
\begin{aligned}
&x^1 = a_{11}x^1 + a_{12}x^2 + \cdots + a_{1M}x^M \\
&\quad \cdots \qquad \cdots \\
(1)\quad &x^i = a_{i1}x^1 + a_{i2}x^2 + \cdots + a_{iM}x^M \\
&\quad \cdots \qquad \cdots \\
&x^M = a_{M1}x^1 + a_{M2}x^2 + \cdots + a_{MM}x^M
\end{aligned}
$$

という形に書きなおし，反復法を用いるわけだが，

$$
\begin{aligned}
&x^1_{n+1} = a_{11}x^1_n + a_{12}x^2_n + \cdots + a_{1M}x^M_n \\
(2)\quad &\quad \cdots \qquad \cdots \\
&x^M_{n+1} = a_{M1}x^1_n + a_{M2}x^2_n + \cdots + a_{MM}x^M_n
\end{aligned}
$$

といういわゆる単純反復法のように右辺には才n近似だけを

代入するのではなく，計算ができた順に右辺に代入して行くのである。すなわち，

$$x_{n+1}^{1}=a_{11}x_{n}^{1}+a_{12}x_{n}^{2}+\cdots+a_{1M}x_{n}^{M}$$

$$x_{n+1}^{2}=a_{21}x_{n+1}^{1}+a_{22}x_{n}^{2}+\cdots+a_{2M}x_{n}^{M}$$

$$\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots$$

$$(3)\quad x_{n+1}^{i}=a_{i1}x_{n+1}^{1}+a_{i2}x_{n+1}^{2}+\cdots+a_{ii-1}x_{n+1}^{i-1}+ \\ +a_{ii+1}x_{n}^{i+1}+\cdots+a_{iM}x_{n}^{M}$$

$$\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots$$

$$x_{n+1}^{M}=a_{M1}x_{n+1}^{1}+\cdots+a_{MM-1}x_{n+1}^{M-1}+a_{MM}x_{n}^{M}$$

という漸化式を使って近似をすゝめるわけである。

本講で述べるのは，ザイデル型反復法を一般の非線型の関数方程式について用いる場合に問題となる，収束のための十分条件についてである。線型方程式の場合には，方程式の線形性に基づくいろいろな特性 ── 固有値，固有ベクトル等 ── によって，収束のための条件を調べる事が出来るが，こゝではむしろ，単純型の反復過程にせよ，ザイデル過程にせよ，その漸化式を与えている演算子に伴うリプシッツ定数を求め，縮小変換の定理にうったえて，その収束性を判定することを考えた。いいかえれば，以下にのべるのは，一般化されたザイデル過程に伴うリプシッツ定数を求める一般的なアルゴリズムである。

§2 B演算子，単純過程とザイデル過程

以下に述べる各種の計算を統一的なやり方で行うために次のB－演算子を定義する。

定義　有限個(N)の非負の実数の集合($\{a^i\}_{i=1}^N$)を非負の実数($b\geq 0$)に対応させる演算子

(1)　$b=B(\{a^i\}_{i=1}^N)$

が，次の4つの条件をみたしているとき，これをB－演算子とよぶことにする。

(2-i)　$B(B(\{a^i\}_{i=1}^N)\cup\{b^j\}_{j=1}^{N'})=B(\{a^i\}_{i=1}^N\cup\{b^j\}_{j=1}^{N'})$

(2-ii)　$B(\{\alpha a^i\}_{i=1}^N)=\alpha B(\{a^i\}_{i=1}^N),\ \alpha\geqq 0$

(2-iii)　$a^i\leqq a'^i,\ i=1,2,\cdots,N$

$\Longrightarrow\ B(\{a^i\}_{i=1}^N)\leqq B(\{a'^i\}_{i=1}^N)$

(2-iv)　$B(\{a^i\}_{i=1}^N)\geqq a^i,\ i=1,\cdots,N$

例　$\max(\{a^i\}_{i=1}^N),\ \sum_{i=1}^N a^i,\ \left(\sum_{i=1}^N (a^i)^2\right)^{1/2}$

定義から直ちに得られるB－演算子の性質として，次のようなものがある。

(3-i)　$B(\{a^i\}_{i=1}^N)<\varepsilon\ \Rightarrow\ a^i<\varepsilon,\ i=1,\cdots,N$

(3-ii)　$B(A\cup C)\geqq B(A)$

(3-iii)　すべてのB－演算子について

$\max(\{a^i\}_{i=1}^N)\leqq B(\{a^i\}_{i=1}^N)$

(3-iv)　$a_1\leq b_1+c_1\ ;\ a_2\leq b_2+c_2$

$$\Rightarrow\ B(b_1, b_2) + B(c_1, c_2) \geqq B(a_1, a_2)$$

(3-V) $B((B(a,b))^n) =$

$$= B(a^n, \underbrace{a^{n-1}b, \cdots, a^{n-1}b}_{\binom{n}{1}}, \cdots, \underbrace{a^{n-r}b^r, \cdots, a^{n-r}b^r}_{\binom{n}{r}}, \cdots, b^n)$$

また，特に，B－演算子として，

(4) $B(\{a^i\}_{i=1}^M) = \left(\sum_{i=1}^M (a^i)^v\right)^{1/v} \quad 0 \leqq v < \infty$

というタイプのものを用いるときには，このB－演算子を

(5) $B^v(\{a^i\}_{i=1}^M)$

と書くことにする。このようなB－演算子については，

(6-i) $B^v(\{a^i b^i\}_{i=1}^M) \leqq B^v(\{a^i\}_{i=1}^M) B^v(\{b^i\}_{i=1}^M)$

という不等式が成立する。また，Hölderの不等式は

(6-ii) $B^1(\{a^i b^i\}_{i=1}^M) \leqq B^v(\{a^i\}_{i=1}^M) B^{\bar{v}}(\{b^i\}_{i=1}^M)$ 。

こゝに， $1/v + 1/\bar{v} = 1$ ， $v, \bar{v} \geqq 1$ である。

次に，このB－演算子をつかって直積空間の距離を定義し，その完備性を考える。

定理　M個の完備距離空間 $R^1(X^1, \rho^1), \cdots, R^M(X^M, \rho^M)$ からなる直積空間 $\mathbb{R} = R^1 \times R^2 \times \cdots \times R^M$ について，

(7) $\rho(x, y) = B(\{w^i \rho^i(x^i, y^i)\}_{i=1}^M)$ ， $0 < w^i < \infty$

$$x = (x^1, x^2, \cdots, x^M) \in \mathbb{R}$$

$$y = (y^1, y^2, \cdots, y^M) \in \mathbb{R}$$

とおけば，$(\mathbb{R}, \rho)$ は完備距離空間である。

証　明　詳細は略すが，これらはB－演算子の性質，特に(3-iv)等から数学的帰納法によって証明される。

単純過程とザイデル過程を一般的な形で与えておこう。

$$
\begin{aligned}
& y^1 = \varphi^1(x^1, x^2, \cdots, x^M) \\
& y^2 = \varphi^2(x^1, x^2, \cdots, x^M) \\
(8) \quad & \cdots \qquad \cdots \\
& y^M = \varphi^M(x^1, x^2, \cdots, x^M)
\end{aligned}
$$

という形の$\mathbb{R}$から$\mathbb{R}$への写像を与える演算子を単純演算子系とよび，

$$(9) \qquad y = \varphi(x)$$

と書くことにする。また，これに対応して

$$
\begin{aligned}
& y^1 = \varphi^1(x^1, x^2, \cdots, x^M) \\
& y^2 = \varphi^2(y^1, x^2, \cdots, x^M) \\
& \cdots \qquad \cdots \\
(10) \quad & y^i = \varphi^i(y^1, \cdots, y^{i-1}, x^i, \cdots, x^M) \\
& \cdots \qquad \cdots \\
& y^M = \varphi^M(y^1, \cdots, y^{M-1}, x^M)
\end{aligned}
$$

という形の$\mathbb{R}$から$\mathbb{R}$への写像を与える演算子を上の単純演算子系に対応するザイデル型演算子系とよび，まとめて，

(11) $$y = \Psi(x)$$

と書くことにする。さらに，これらの演算子によって定義される漸化式

(12) $$x_{n+1} = \Phi(x_n)$$

(13) $$x_{n+1} = \Psi(x_n)$$

によって点列 $\{x_n\}$ を与える過程を，それぞれ，単純過程およびザイデル過程とよぶことにする。

§3 各演算子のリプシッツ定数だけがわかっている場合

いま，単純演算子系φを構成する各演算子

(1) $\qquad \varphi^i(x) \qquad x \in R$

について，リプシッツ定数，すなわち

(2) $\qquad \rho^i(\varphi^i(x), \varphi^i(x')) \leqq L^i \rho(x, x')$

$$\forall x, x' \in R$$

なる定数L^iがわかっているとき，次の事がいえる。

(イ) 単純演算子系(2.9)は

(3) $\qquad L = B(\{w^i L^i\}_{i=1}^M)$

というリプシッツ定数をもつ。

(ロ) ザイデル型演算子系(2.11)は

(4) $\qquad \mathcal{L} = B(\{w^i C^i\}_{i=1}^M)$

というリプシッツ定数をもつ。こゝに，

(5) $\qquad C^1 = B(\{L^1\})$

$$C^i = L^i B(B\{w^r C^r\}_{r=1}^{i-1} \cup \{1\}), \quad i = 2, \cdots, M$$

である。

(ハ) 単純演算子系(2.9)を構成する第1の演算子$\varphi^1(x)$が特に，xの第1の要素x^1に依存しないとき，すなわち，

$$y^1 = \varphi^1(x^2, x^3, \cdots, x^M)$$

という形をとる場合(このような場合が実際問題でよく起る。)には，対応するザイデル型演算子系は

(6) $\quad \mathscr{L}^* = B(\{w^i C^i\}_{i=2}^{M})$

(C^iは(ロ)の場合に同じ) というリプシツ定数をもつ。

証　明

(イ) ρ の定義(2.7) と (2)から，単純演算子系(2.9) について，

$$\begin{aligned}\rho(y, y') &= B(\{w^i \rho^i(y^i, y'^i)\}_{i=1}^{M}) \leqq \\ &\leqq B(\{w^i L^i \rho(x, x')\}_{i=1}^{M}) = \qquad (cf\ 2\text{-}2\text{-}iii) \\ &= B(\{w^i L^i\}_{i=1}^{M})\rho(x, x') \qquad (cf\ 2\text{-}2\text{-}ii)\end{aligned}$$

こゝに，

$$y = \varphi(x)\ ,\ y' = \varphi(x')\ ,\ x, x' \in R$$

すなわち(3)を得る。

(ロ) ザイデル演算子系の定義(2.10)から，関係式

$$y = \psi(x), \quad y' = \psi(x')$$

は次のように書ける。

$$\begin{aligned}y^1 &= \varphi^1(x) \\ y^2 &= \varphi^2(\varphi^1(x), {}^2x) \\ y^3 &= \varphi^3(\varphi^1(x), \varphi^2(\varphi^1(x), {}^2x), {}^3x) \\ &\cdots \qquad \cdots \\ y'^1 &= \varphi^1(x') \\ y'^2 &= \varphi^2(\varphi^1(x'), {}^2x') \\ y'^3 &= \varphi^3(\varphi^1(x'), \varphi^2(\varphi^1(x'), {}^2x'), {}^3x')\end{aligned}$$

・・・　　　・・・

こゝで，

$$\rho^i(y^i, y'^i) \leqq C^i \rho(x, x')$$

が成立することを数学的帰納法によって証明する。

実際，$i=1$ の場合には $C^1 = B(L^1) \geqq L^1$ (cf. 2-2-iv) であるから明らかである。次に，$i=1,\cdots,r-1$ について上の式が成立しているものとしよう。このとき，

$$\begin{aligned}
\rho^r(y^r, y'^r) &\leqq L^r \rho(({}_{r-1}\mathbf{y}, {}^r x), ({}_{r-1}\mathbf{y}', {}^r x')) = \\
&= L^r B(\{w^i \rho^i(y^i, y'^i)\}_{i=1}^{r-1} \cup \{w^i \rho^i(x^i, x'^i)\}_{i=r}^{M}) \leqq \\
&\leqq L^r B(\{w^i C^i \rho(x, x')\}_{i=1}^{r-1} \cup B(\{w^i \rho^i(x^i, x'^i)\}_{i=r}^{M})) \leqq \\
&\leqq L^r B(\{w^i C^i \rho(x, x')\}_{i=1}^{r-1} \cup \{\rho(x, x')\}) = \\
&= L^r B(\{w^i C^i\}_{i=1}^{r-1} \cup \{1\}) \rho(x, x') = \\
&= L^r B(B\{w^i C^i\}_{i=1}^{r-1} \cup \{1\}) \rho(x, x') = C^r \rho(x, x')
\end{aligned}$$

が成立する。こゝに，

$$\begin{aligned}
{}_{r-1}\mathbf{y} &= (y^1, \cdots, y^{r-1}) \in R^1 \times \cdots \times R^{r-1} \\
{}^r x &= (x^r, \cdots, x^M) \in R^r \times \cdots \times R^M
\end{aligned}$$

である。この後，(4) を導びくやり方は(イ) の場合と同様である。

(ハ) この場合には，演算子系が

$$y^2 = \varphi^2(\varphi^1({}^2x), {}^2x)$$

$$y^3 = \varphi^3(\varphi^1({}^2x), y^2, {}^3x)$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

$$y^i = \varphi^i(\varphi^1({}^2x),\ y^2,\ \cdots,\ y^{i-1},\ {}^ix)$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

$$y^M = \varphi^M(\varphi^1({}^2x),\ y^2,\ \cdots,\ y^{M-1},\ x^M)$$

という直積空間$R^2\times R^3\times\cdots\times R^M$の上で定義された，この空間の上への写像と考えることができる。ところで，才二の演算については

$$\rho^2(y^2, y'^2) \leqq L^2B(\{w^1\rho^1(\varphi^1({}^2x),\varphi^1({}^2x'))\}\cup$$
$$\cup\ \{w^i\rho^i(x^i, x'^i)\}_{i=2}^{M}) \leqq$$
$$\leqq L^2B(w^1L^1, 1)\rho^*(x, x')$$

が成立する。こゝに，ρ^* は$R^2\times R^3\times\cdots\times R^M$の距离である。以下，(ロ) と同様にして

$$\rho^i(y^i, y'^i) \leqq C^i\rho^*(x, x')$$
$$i = 2, \cdots, M$$

を示すことができる。(6) 式を導びくやり方は(イ) の場合と同様である。

§4　さらにくわしい性質がわかっている場合

演算子系を構成する各々の演算子については，そのリプシッ定数ばかりでなく，次のような定数 $L^i, M^i; K^i, L^i, M^i; L^{ij}$ 等を知り得ることもある。

（イ）　$\rho^i(y^i, y'^i) \leqq B'(\phi_{i1} \cap M^i \rho({}_{i-1}x, {}_{i-1}x'), L^i \rho({}^i x, {}^i x'))$

（ロ）　$\rho^i(y^i, y'^i) \leqq$

$$\leqq B'(\{\phi_{1i} \cap \{M^i \rho({}_{i-1}x, {}_{i-1}x')\}\} \cup \{L^i w^i \rho^i(x^i, x'^i)\} \cup \{\phi_{Mi} \cap \{K^i \rho({}^{i+1}x, {}^{i+1}x')\}\})$$

（ハ）　$\rho^i(y^i, y'^i) \leqq B'(\{L^{ij} w^j \rho^j(x^j, x'^j)\}_{j=1}^{M})$

こゝに，

$$\phi_{ij} = \text{空集合} \qquad i = j$$
$$\phantom{\phi_{ij}} = \text{すべての非負の実数からなる集合} \qquad i \neq j$$

$${}_i x = (x^1, \cdots, x^i) \in R^1 \times \cdots \times R^i$$
$${}^i x = (x^i, \cdots, x^M) \in R^i \times \cdots \times R^M$$

である。また，線形方程式の場合でいえば，(イ), (ロ) は三項行列に対応するものであり，(ハ) は普通の行列に対応するものである。さらに，こゝで，B' とあるのは，この B－演算子が，直積空間の距離を定義するのにつかったものとは，一般には，相異ることを示している。

これらの定数をもとに，いろいろな演算子系のリプシッ定数を求めることができる。これを一覧表に示しておく。

アルゴリズム一覧

単純演算子系およびザイデル型演算子系のリプシツ定数は，

$$L = B(\{w^iC^i\}_{i=1}^{M})$$

によって計算できる。こゝに C^i は，演算子系の構造，既知の定数に応じ，次の漸化式で与えられる。

既知定数	単純演算子系	ザイデル型演算子系
L^i (§3)	$C^i = L^i$ (11)	$C^i = B(L^iB(\{w^jC^j\}_{j=1}^{i-1}), L^i)$ (12)
M^i, L^i (§4,(イ))	$C^i = B'(M^i, L^i)$ (21) (＊$B=B'$ の場合 $C^i = max(M^i, L^i)$	$C^i = B'(M^iB(\{w^jC^j\}_{j=1}^{i-1}), L^i)$ (22)
M^i, L^i, K^i (§4(ロ))	$C^i = B'(M^i, L^i, K^i)$ (31) (＊$B=B'$ の場合 $C^i = max(M^i, L^i, K^i)$	$C^i = B'(B(\{w^jC^jM^j\}_{j=1}^{i-1}), L^i, K^i)$ (32) (＊ $B=B'$ の場合 $C^i = B(M^iB(\{w^jC^j\}_{j=1}^{i-1}), max(L^i, K^i))$
L^{ij} (§4(ハ))	$C^i = B'(\{L^{ij}\}_{j=1}^{M})$ (41) (＊ $B^v, B^{v'}$ について $v \geq 1, v'=1$ のとき $C^i = B_{\bar{v}}(\{L^{ij}\}_{j=1}^{M})$ こゝに，$\frac{1}{v}+\frac{1}{\bar{v}}=1$ (＊＊ $B=B'$ のときにはリプシツ定数が $L = max(\{B(\{w^iL^{ij}\}_{i=1}^{M})\}_{j=1}^{M})$ と計算できる。	$C^i = B'(\{w^jC^jL^{ij}\}_{j=1}^{i-1} \cup \{L^{ij}\}_{j=i}^{M})$ (42) (＊ $B^v, B^{v'}$ について $v \geq 1, v'=1$ のとき， $C^i = B_1(\{w^jC^jL^{ij}\}_{j=1}^{i-1} \cup B_{\bar{v}}(\{L^{ij}\}_{j=i}^{M}))$ こゝに $\frac{1}{v}+\frac{1}{\bar{v}}=1$ (＊＊ $B=B'$ の場合 $C' = B(\{w^jC^jL^{ij}\}_{j=1}^{i-1} \cup max(\{L^{ij}\}_{j=i}^{M}))$

§5 例題

§3の結果をめぐって，次のようなことが云える。

例題 1

(a) $B(\{a^i\}_{i=1}^M) = max(\{a^i\}_{i=1}^M)$

$w^i = 1, \quad i = 1, \cdots, M$

のとき，

(イ) $L = max(\{L^i\}_{i=1}^M)$

(ロ) $\mathcal{L} = max(\{L^{i_1}\}, \{L^{i_1}L^{i_2}\}, \cdots, \{L^{i_1}L^{i_2}\cdots L^{i_r}\}, \cdots, \{L^1L^2\cdots L^M\})$

$i_s = 1, \cdots, M, \quad r < s \Rightarrow i_r < i_s$

(ハ) $\mathcal{L}^* = max(\{L^i\}_{i=2}^M, \{L^{i_1}L^{i_2}\}, \cdots, \{L^{i_1}L^{i_2} \; L^{i_r}\}, \cdots, \{L^1L^2\cdots L^M\})$

となる。したがって，L^1 が特に大きいときには，$\mathcal{L}^*$ が$\mathcal{L}$より小さくなる可能性がある。

(b) $B(\{a^i\}_{i=1}^M) = (\sum_{i=1}^M (a^i)^p)^{1/p} \qquad p \geqq 1$

$w^i = 1, \quad i = 1, \cdots, M$

であり，

$L^i = \bar{L} \qquad i = 1, \cdots, M$

ならば

$\mathcal{L} = ((1+\bar{L}^p)^M - 1)^{1/p}$

となる。

特に線型方程式の場合について数値例をあげる。

例題 2

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0 & 1.0 & 0.3 \\ 0.2 & 0.0 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

$$\rho(x, x') = \max\{|x^i - x'^i|\}_{i=1}^{3}, \quad B : \max$$

とすれば,

(1) $L^1 = 0.0 + 1.0 + 0.3 = 1.3$

$L^2 = 0.2 + 0.0 + 0.2 = 0.4$

$L^3 = 0.2 + 0.2 + 0.0 = 0.4$

(4.11)によれば,

$$L = \max(1.3, 0.4, 0.4) = 1.3$$

(4.12)によれば,

$$C^1 = 1.3$$

$$C^2 = \max(1.3 \times 0.4, 0.4) = 0.52$$

$$C^3 = \max(0.4 \max(1.3, 0.52), 0.4)$$

$$= \max(0.52, 0.4) = 0.52$$

$$\mathcal{L} = \max(1.3, 0.52, 0.52) = 1.3$$

§3 の(ハ)を用いれば,

$$\mathcal{L}^* = 0.52$$

が得られる。