数理解析研究所講究録
第68巻 1969年 1-9

On the Solution of Analytic Equations

東大　理　上野健爾

これは　M. Artin ; On the Solution of Analytic Equations (Inventiones math. 5 pp 277 − 291 (1968)) の紹介である。

k は標数 0 の non trivial な付値体とする。k は必ずしも完備である必要はない。k 係数で，変数 $x_1, x_2, \cdots x_n$ に関する収束べキ級数環を $k\{x_1, \cdots, x_n\}$，形式的べキ級数環 を $k[[x_1, \cdots, x_n]]$ で表すことにする。

$$f(x, y) = (f_1(x, y), \cdots, f_m(x, y))$$

$$f_i(x, y) \in k\{x, y\} \quad 1 \leq i \leq m$$

$$x = (x_1, \cdots, x_n)$$

$$y = (y_1, \cdots, y_N)$$

さて 我々は上の様に収束べキ級数の組 $f(x, y)$ を与えた時，$f(x, y) = 0$ を $y = (y_1, \cdots, y_N)$ に関して解くことを考える。$y(x) = (y_1(x), \cdots, y_N(x))$ なる。x の収束べキ級数が，$f(x, y(x)) = 0$ を満足する時，$y(x)$ を $f(x, y) = 0$ の解析解

と呼ぶことにする。また $\bar{y}(x)$ を形式ベキ級数とした時，形式ベキ級数として $f(x, \bar{y}(x)) = 0$ となる時 $\bar{y}(x)$ を形式解と呼ぶことにする。ここでは次の定理を証明することが，目的である。

定理I. $\bar{y}(x) = (\bar{y}_1(x), \cdots, \bar{y}_N(x))$, $\bar{y}_\nu(x) \in k[[x]]$ $\bar{y}_\nu(0) = 0$ が $f(x, y) = 0$ の形式解とする。この時任意の正整数 c に対して $y(x) = (y_1(x), \cdots, y_N(x))$ なる $f(x, y) = 0$ の解析解が存在して，しかも $y(x) \equiv \bar{y}(x) \pmod{\hat{\mathfrak{m}}^c}$ なるようにすることができる。ここで $\hat{\mathfrak{m}}$ は $k[[x]]$ の極大イデアルとする。

即ちこの定理は解析解は形式解の中で $\hat{\mathfrak{m}}$ adic metric に関して dense であることを云っている。この定理は次の２つの定理のいずれとも同値である

定理II. $\mathfrak{a}_1, \cdots, \mathfrak{a}_N$ は $k\{x\}$ の固有イデアルであり，$\bar{y}(x)$ は $f(x, y) = 0$ の形式解であり，かつ

$$\bar{y}_\nu(x) = u_\nu(x) + \bar{v}_\nu(x), \quad u_\nu(x) \in k\{x\}, \quad \bar{v}_\nu(x) \in k[[x]]$$

$$\bar{v}_\nu(x) \equiv 0 \pmod{\bar{\mathfrak{a}}_\nu} \qquad \bar{\mathfrak{a}}_\nu = \mathfrak{a}_\nu \cdot k[[x]]$$

$$\bar{y}_\nu(0) = 0$$

であるとする。この時，解析解が存在して $y_\nu(x) \equiv \bar{y}_\nu(x) \pmod{\bar{\mathfrak{a}}_\nu}$ とできる。

定理III　I を $k\{x\}$ の固有イデアルとする。$f(x,y)=0$ の形式解 $\bar{y}(x)=(\bar{y}_1(x),\cdots,\bar{y}_N(x))$ は，$\bar{y}_\nu(x)$ が $k\{x\}$ の I adic completion に入っているとする。この時任意の正整数 c に対して解析解 $y(x)$ が存在して，$y(x)\equiv\bar{y}(x)\pmod{I^c}$ とできる。

同値性の証明

(I) ⟹ (II)

$y_\nu=u_\nu(x)+v_\nu$　と変数変換することによって，$u_\nu(x)\equiv 0$ と考えてよい。従って　$\bar{y}_\nu(x)\equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}_\nu}$

$\mathfrak{a}_\nu$ の生成元を $\{a_{\nu j}\}$ とすると

$$\bar{y}_\nu(x)=\sum_j(\bar{z}_{\nu j}(x)+c_{\nu j})a_{\nu j}\quad c_{\nu j}\in k,\ \bar{z}_{\nu j}(x)\in k[[x]],\ \bar{z}_{\nu j}(0)=0$$

と書くことができる。

$$\begin{cases} f_i(x,y)=0 & 1\leq i\leq m \\ y_\nu-\sum_j(z_{\nu j}+c_{\nu j})a_{\nu j}=0 & 1\leq\nu\leq N \end{cases}$$

という方程式で未知函数が $\{y_\nu, z_{\nu j}\}$ と考えて，定理I を適用すればよい。

(II) ⟹ (III)

$\mathfrak{a}_\nu=I^c$ とおけばよい。

(III) ⟹ (I)

$I=\mathfrak{m}$　$\mathfrak{m}$ は $k\{x\}$ の極大イデアルとすればよい。

この定理から，種々の結果を導くことができるが，特に次

の結果は著しい。

定理 k は完備として，X，Y は k 解析空間とする。x を X の点，y を Y の点として $\hat{\mathcal{O}}_{X,x} \cong \hat{\mathcal{O}}_{Y,y}$ とする。この時 X，Y は x，y の近傍で，解析的に同型である。

この定理は $k=\mathbb{C}$ で x，y が *isolated singularity* の時は Hironaka, Rossi によって Grauert の方法を拡張することによって得られていた。（Math. Ann. 156 (1964)）。この定理は実はもっと一般的な結果の系として出て来るのであるが，それらについては 原論文を参照されたい。

定理I の証明のスケッチ

変数 $x=(x_1,\dots,x_n)$ の個数 n に関する帰納法による。

$n=0$ の時は自明

$n-1$ まで定理が成立したとして n の時成立することを，証明する。

$\bar{y}(x)$ は定数項を持たないことより，$f(x,y) \rightsquigarrow f(x,\bar{y}(x))$ によって，*local k homomorphism*

$$\phi : k\{x,y\} \longrightarrow k[[x]]$$

が引起される。$\bar{y}(x)$ は $f(x,y)=0$ の解だから

$$f_i(x,y) \in \mathrm{Ker}\,\phi = I \qquad 1 \le i \le m.$$

$\mathrm{Ker}\,\phi = I$ は 有限底を持つから，必要ならば更に方程式を加えることによって，I は f_i $1 \le i \le m$ から生成されるとし

てよい。従って　$A = k\{x, y\}/I \simeq \mathrm{Im}\,\phi$ は整域となる。Aの Krull次元をaとする。

$$J = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le N}}$$

$r = N+n-a$ として，Jの $r\times r$ 次の小行列式を $\{\delta_\nu\}$，これから生成される $k\{x, y\}$ のイデアルをΔとする。証明の key point は次の補題にある。

補題1．$I = (f_1, \cdots, f_m)$ は $k\{x, y\}$ の固有イデアルとし，$A = k\{x, y\}/I$ とおいた時，Spec A のすべての component は同次元aであるとする。更にAの nilradical の support の次元はaより小，従って Spec A は各 generic point の近傍で reduced とする。また $f(x, y) = (f_1(x, y), \cdots, f_m(x, y))$ は形式解 $y(x)$ を持つとする。この時　$\Delta \not\subset I$

∵）

Aの係数体kの完備化をk'とする時，$A' = k'\{x, y\}/I'$ に対しても上の仮定が成立している。（ここで $ch(k) = 0$ の仮定を使う。）　$\Delta' \not\subset I'$ ならば $\Delta \not\subset I$ だから，kを完備としてよいことが分かる。Spec A に対応する local analytic space を $\mathcal{V}$，spec $k\{x\}$ に対応する loccal analytic space を $\mathcal{E}$ とすると，補題は morphism

$$\varpi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{E}$$

が，原点に任意に近い点で smooth であることを云っている。

一方Vの非特異点で，原点に任意に近いものが存在する。よって座標を平行移動し，かつ形式解の存在を使うことによって補題は次の形にすることができる。

$A = k\{x, y\}/I$ は Krull 次元 a の正則局所環

$A/(x_1, \cdots, x_n)$ の Krull 次元は $a-n$.

この時 $\Delta \not\subset I$.

これは Jacobian criterion の直接の帰結である。　q.e.d.

この補題を我々の場合に適用すると $I = \mathrm{Ker}\,\phi$ より，$\exists \delta \in \{\delta_\nu\}$ $\delta(x, \bar{y}(x)) \neq 0$。更に $\delta = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)_{i,j=1,\cdots,r}$ としておいてよい。

補題2　$\delta(x, \bar{y}(x)) \neq 0$ ならば，次の条件を満足する正整数 c が存在する。

$$y(x) = (y_1(x), \cdots, y_N(x)) \qquad y_i(x) \in k\{x\}, \quad 1 \leq i \leq N$$

$$f_i(x, y(x)) = 0 \qquad 1 \leq i \leq r$$

$$y(x) \equiv \bar{y}(x) \qquad (\mathrm{mod}\ \mathfrak{m}^c)$$

$$\Longrightarrow \quad f_i(x, y(x)) = 0 \qquad 1 \leq i \leq N.$$

∵)

$X = V(f_1, \cdots, f_r)$ を $\mathrm{Spec}\, k\{x, y\}$ の閉集合とすると，

$X = V \cup X'$, $V = \mathrm{Spec}\, A$, X' は閉集合で $X' \not\supset V$

と書くことができる。即ち $(f_1, \cdots, f_r) = I \cap K$, Kはその locus $V(K)$がX'となるイデアル，かつ $K \not\subset I$。$h(x, y)$ をX'上で vanish し，Vで vanish しない $k\{x, y\}$ の元とする

と，$h(x,\bar{y}(x))\neq 0$。従って$^\exists c$，$y(x)\equiv\bar{y}(x) \mod \hat{m}^c$ ならば $h(x,y(x))\neq 0$ とできる。これより local k homomorphism

$$\begin{array}{ccc} k\{x,y\} & \longrightarrow & k\{x\} \\ \cup & & \cup \\ g(x,y) & \longmapsto & g(x,y(x)) \end{array}$$

の kernel を $\mathfrak{P}$ とすると，$\mathfrak{P}$ は素イデアル，かつ $\mathfrak{P}\supset(f_1,\cdots,f_r)$。一方 $h(x,y(x))\neq 0$ より $\mathfrak{P}\not\ni K$。従って $\mathfrak{P}\supset I$。よって上の c が求めるものである。 q.e.d.

この補題より $m=r$，$\delta(x,\bar{y}(x))\neq 0$，$\delta=\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)_{1\leq i,j\leq r}$ としてよいことが分かる。さて今 $y^0(x)=(y_1^0(x),\cdots,y_N^0(x))$ $y_i^0(x)\in k\{x\}$ $1\leq i\leq N$ が存在して，上記の補題の正整数より任意に大きな整数 c に対して

$$y^0(x)\equiv\bar{y}(x) \pmod{m^c}$$

$$\delta^2(x,y^0(x)) \mid f_i(x,y^0(x)) \qquad 1\leq i\leq r$$

が成立したとする。すると

$$\delta(x,y^0(x))\equiv\delta(x,\bar{y}(x)) \pmod{m^c}$$

$$f_i(x,y^0(x))\equiv f_i(x,\bar{y}(x)) \pmod{m^c}$$

より $\quad f_i(x,y^0(x))\equiv 0 \pmod{\delta^2(x,y^0(x))m^c}$ となる。よって，この時次の補題より定理が証明できる。

補題3. $f_1(x,y),\cdots\cdots,f_r(x,y)\in k\{x,y\}$

$J=\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)_{1\leq i,j\leq r}$ $\quad\delta=\det J$, $\quad r\leq N$,

$y^0(x)=(y_1^0(x),\cdots,y_N^0(x))$ $\;y_i^0(x)\in k\{x\}$ $\;y_i^0(0)=0\quad 1\leq i\leq N$

かつ $f_i(x, y^0(x)) \equiv 0 \pmod{\delta^2(x, y^0(x))\mathfrak{m}^c}$ とすると,

$y(x) = (y_1(x), \cdots, y_N(x))$ で $y(x) \equiv y^0(x) \pmod{\delta(x, y^0(x))\mathfrak{m}^c}$

かつ $f_i(x, y(x)) = 0 \quad 1 \leq i \leq r$ なるものが存在する。

証)

新たに,方程式 $f_i(x, y) = y_i - y_i^0(x) \quad r+1 \leq i \leq N$ をつけ加えると, $\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)_{1 \leq i, j \leq N} = \begin{pmatrix} J & * \\ 0 & I_{N-r} \end{pmatrix} = \tilde{J}$, $\det \tilde{J} = \delta$

となるから, $r = N$ と仮定してよい。

$f = (f_1, \cdots, f_N)$, $h = (h_1, \cdots, h_N)$ $y^0 = y^0(x)$ と書くことによって, $f(x, y^0 + h) = f(x, y^0) + J(x, y^0)h + P$ と書くことができる。但しここで P は x, h に関する次数が2次以上の項とする。さて $J = J(x, y^0)$, $\delta = \delta(x, y^0)$ と略記すると,各要素が $k\{x\}$ の元である $N \times N$ 次の行列 M が存在して,

$M \cdot J = J \cdot M = \delta I_N$.

ここで,方程式 (*) $f(x, y^0 + \delta u) = 0$ を $u = (u_1, \ldots, u_N)$ に関して解くことを考える。仮定より

$$f_i(x, y^0) = \delta^2 \varepsilon_i(x) \qquad \varepsilon_i(x) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}^c}$$

だから, Taylor の公式より (*) は

$$0 = \delta^2 \varepsilon + J\delta u + \delta^2 Q \qquad Q \text{ は } u \text{ に関して2次以上}$$

となる。これより

$$0 = JM \cdot \delta\varepsilon + J\delta u + JM\delta Q$$

従って (*) を解くには, $0 = M\varepsilon + u + Q$ が解ければ,

十分である。これは $x_1,\cdots,x_n,\ u_1,\cdots,u_N$ に関する analytic equationであり 変数 u に関する Jacobian matrix の $u=0$ での値は I_N であるから，陰函数の定理により 解 $u(x)$ が存在する。所で $\varepsilon_i\equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}^c}$ より $u_i\equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}^c}$

よって $y(x)=y^0(x)+\delta(x,y^0(x))u(x)$ が求めるものである。

q.e.d.

結局，定理を証明するためには，次のことを示せばよいことが分かった。

補題4. 定理Iが $n-1$ で成立したとする。

$g(x,y)$, $f_i(x,y)$ $1\leq i\leq m$ は $k\{x,y\}$ の元

$\bar{y}(x)=(\bar{y}_1(x),\cdots,\bar{y}_N(x))$ $\bar{y}_\nu(x)\in k[[x]]$ $\bar{y}_\nu(0)=0$

$g(x,\bar{y}(x))\neq 0$.

$g(x,\bar{y}(x)) \mid f_i(x,\bar{y}(x))$ $1\leq i\leq m$

以上の条件のもとで，任意の正整数 c に対して $y(x)=(y_1(x),\cdots,y_N(x))$ $y_\nu(x)\in k\{x\}$ が存在して，

$$y(x)\equiv\bar{y}(x) \pmod{\mathfrak{m}^c}$$

$$g(x,y(x))\mid f_i(x,y(x)) \quad 1\leq i\leq m$$

となるようにできる。

この補題の証明は，Weierstraßの予備定理を使うことによって，初等的な計算を遂行することによってなされる。くわしくは原論文を参照されたい。