数理解析研究所講究録
第 68 巻 1969 年 12-26

与えられた解析空间のコンパクト解析部分空间全体の解析空间化（Douadyのthèse）

東大 理　浪川幸彦

§0. 序

これはDouadyのthèse: "Le Problèmes des Modules pour les Sous-espaces Analytiques Compacts ~~dans~~ d'un Espace Analytiques Donné" (Ann. Inst. Fourier. 1966 pp 1～98) の紹介である。百ページもある長いものなので、そのすべてを述べることはできない。问題とその解いてゆく方針のみを述べ、中间の証明は一切省くことにする。(実際個々の命題の証明はそれ程困難ではない) 又、Banach解析空间の一般論が必要であるが、やはりスペースの都合で書けないので、一応有限次元（つまりふつうの解析空间）のアナロジーで考えて頂きたい。

§1、问題とその所在

まず、问題をのべ、その问題をいかにいいかえるかを見よ

う。そのやり方は問題をむしろ一般化させて解くというBour-bakismの典型である。

（問題A） X．複素解析空間

$H(X)$．Xのコンパクト部分解析空間

この時、$H(X)$に"うまい"解析空間の構造が入るか？

こゝで"うまい"とはどんな意味かはっきりさせよう。

Def. S：もう一つの解析空間

$Y \subset S \times X$ が解析空間SでパラメトライズされたXのコンパクト部分空間の族（S-p.p.族と呼ぶ）$\Longleftrightarrow$ Yを$S \times X \to S$から導びかれたS上のファイバー空間とみて、YはS上固有的（proper）かつ平坦（flat）。

すると、問題Aは次の様に一般化される。

（問題B）（$\mathcal{A}n$）：複素解析空間の圏

（Set）：集合の圏

$$\Phi_0 : (\mathcal{A}n) \longrightarrow (Set)$$
$$S \longmapsto \{S\text{-p.p族 全体}\}$$

なる函手が表現可能か？

つまり $H(X) \in (\mathcal{A}n)$ と$H(X)$-p.p族$Y \subset H(X) \times X$が存在して、任意のS-p.p族$Z \subset S \times X$に対して SからS

$H(X)$への morphism f が一意的に存在して $Z=(f\times 1)^{-1}(Y)$ となる。

この問題をさらに一般化しよう。

Def. $\mathcal{F}$: $S\times X$ 上の層が S 上固有的 (proper) $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{Supp}\mathcal{F} \longrightarrow S$ (射影) が固有的。

(問題 C) $\mathcal{E}$: X 上の解析的連接層

$$\pi : S\times X \longrightarrow X$$

$$\begin{array}{rcl} \Phi : (\mathcal{A}n) & \longrightarrow & (\mathcal{S}et) \\ \cup\!\!\!| \\ S & \longmapsto & \{\pi^*\mathcal{E} \text{ の } S\text{-平坦かつ } S\text{-固有的な連接商層}\} \\ f : S\to S' & \longmapsto & (f\times 1_X)^* \end{array}$$

なる反変函手が表現可能か？

こゝで $\mathcal{E}=\mathcal{O}_X$ とすれば問Bになる。

この問題は解析空間の範囲ではうまくとけない。そこで Douady は Banach 解析空間への圏をひろげて解いた。つまり次の二つの問題に分けたのである

(Ban) : Banach 解析空間の圏

こゝでは S-解平坦 (anaflat) なる概念が、解析空間における連接的かつ S-平坦の概念にあたる。(正確な定義は後出)

(問題 D) X、$\mathcal{E}$ は問題 C と同じとする。

① $\Phi : (Ban) \longrightarrow (Set)$

$S \longmapsto$ {$\pi^*\mathcal{E}$ のS-解平坦かつS-固有的商層 (S-ap p 層と呼ぶ)}

$f : S \to S' \longmapsto (f \times I_X)^*$

が、表現可能であるか。

つまり、$H(\mathcal{E}) \in (Ban)$ と $H(\mathcal{E})$-ap p層 $\mathcal{R}$ があって、次の性質をみたす。

$$\forall S \in (Ban),\ \forall \mathcal{F} \in \Phi(S) \Longrightarrow \exists_1 f : S \to H(\mathcal{E})$$
$$\text{s.t. } \mathcal{F} = (f \times I_X)^* \mathcal{R}$$

② $H(\mathcal{E}) \in (An)$?

$S \in (An)$ なら $\Phi(S) = \Phi(S)$ である。従って問Dが肯定的ならば、問Cが肯定的になる。

§2. 良性近傍 (Voisinage privilégié)

Def. $K \subset \mathbb{C}^n$ が柱状集合(polycylindre)

$\Longleftrightarrow K = K_1 \times \cdots \times K_n$, K_iは$\mathbb{C}$内のコンパクト凸集合

U : Kを(柱状体)ふくむ$\mathbb{C}^n$の開集合

$\mathcal{F}$: U上の解析的連接層　以下固定する。

~~$\mathcal{O}(K)$~~ $\mathcal{O}$: U上の正則函数の芽の作る層

$\mathcal{F}(K) \underset{def}{=} \varinjlim_{\substack{V\supset K\\ \text{open}}} \mathcal{F}(V)$ （$=H^0(K,\mathcal{F})$ とかくこともある）

$\mathcal{C}(K) \underset{def}{=} \{K$ から $\mathbb{C}$ への連続函数$\}$

$B(K) \underset{def}{=} \overline{\mathcal{O}(K)}$ in $\mathcal{C}(K)$ （Banach空間として）

（$=\{K$上連続かつ $\mathring{K}$で解析的な$\mathbb{C}$値函数 if $\mathring{K}\neq\phi\}$）

この$B(K)$が重要な役割を果す。内Dへの拡張したのも、$B(K)$を用いるがゆえなのである。だが、なぜ$B(K)$がうまい性質を持つかはこゝでは十分述べることができない。

$$0\longrightarrow\mathcal{L}_p\longrightarrow\cdots\longrightarrow\mathcal{L}_0\longrightarrow\mathcal{F}\longrightarrow 0 \quad (\mathcal{L}_i=\mathcal{O}^{n_i}) \cdots(1)$$

を$\mathcal{F}$のU上の分解とする。

Prop.1 Kを柱状集合とすれば

$$0\longrightarrow H^0(K,\mathcal{L}_p)\longrightarrow\cdots\longrightarrow H^0(K,\mathcal{L}_0)\longrightarrow H^0(K,\mathcal{F})\longrightarrow 0 \cdots(2)$$

は直完全（Banach $\mathcal{O}$-加群として完全、Banach空間の完全列としてはsplitする）//

$B(K;\mathcal{F}) \underset{def}{=} B(K)\underset{\mathcal{O}(K)}{\otimes}\mathcal{F}(K)$

$B(K;\mathcal{O}^r)=B(K)^r$ だから Banach空間。$B(K;\mathcal{F})$には(2)を用いて $\mathrm{coker}\,(B(K;\mathcal{L}_1)\longrightarrow B(K;\mathcal{L}_0))$ なる位相を入れる。

Def.1 柱状集合Kが$\mathcal{F}$-良性（$\mathcal{F}$-privilégié）

$\Longleftrightarrow$ (1)のような分解が存在して、次の列が直完全になる。

$$0\longrightarrow B(K;\mathcal{L}_p)\longrightarrow\cdots\longrightarrow B(K;\mathcal{L}_1)\longrightarrow B(K;\mathcal{L}_0)\cdots(3)$$

Prop. 2 柱状集合 K が $\mathcal{F}$-良性

$\Longrightarrow$ 1) $B(K;\mathcal{F})$ は Hausdorff Banach space

2) 任意の (1) の様な分解に対して (3) は直完全列。//

基本的な性質として

Prop. 3 $\mathcal{F}, \mathcal{F}', \mathcal{F}''$ を U 上の解析的連接層で $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ (完全)

K を U に含まれる柱状集合

1) K が $\mathcal{F}'$-, $\mathcal{F}''$-良性 $\Longrightarrow$ K は $\mathcal{F}$-良性

K が $\mathcal{F}$-, $\mathcal{F}''$-良性 $\Longrightarrow$ K は $\mathcal{F}'$-良性

2) 上の条件のもとで

$$0 \longrightarrow B(K;\mathcal{F}') \to B(K;\mathcal{F}) \longrightarrow B(K;\mathcal{F}'') \longrightarrow 0 \quad \text{(直完全)}$$ //

Def. 2 $x \in U$ をとる。柱状集合 K が x の $\mathcal{F}$-良性近傍

$\Longleftrightarrow$ a) K は x の近傍

b) K は $\mathcal{F}$-良性

c) $B(K;\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{F}_x$ は単射 //

以後重要となる基本定理は次のものである。

Theo. I U を $\mathbb{C}^n$ 内の開集合.

$\mathcal{F}_1, \cdots, \mathcal{F}_k$ を U 上の解析的連接層.

$\forall x \in U$, $\exists K \subset U$: x の $\mathcal{F}_i$-良性近傍 ($i=1,\cdots,k$ 同時に)

§3. 解平坦層 (faisceau anaplat)

解析空間 X を以下固定する。

$S \in (\mathrm{Ban})$ をとり, morphism

$$\begin{array}{cccc} i_s : & X & \longrightarrow & S \times X \\ & \cup & & \cup \\ & x & \longmapsto & (s,\ x) \end{array}$$

を定義する。さらに $\mathcal{F}$ を $\mathcal{O}_{S\times X}$-加群層としたとき、

$$\mathcal{F}(s) = i_s^{*}\mathcal{F} \qquad (s \in S)$$

と定める。

Def. 3 $S \in (\mathrm{Ban})$, $U \subset \mathbb{C}^n$ 開集合。

$\mathcal{F}$: $\mathcal{O}_{S\times U}$-加群層が S-解平坦 (S-anaplat)

$\Longleftrightarrow$ $\forall (s, x) \in S \times U$ に対し、(s, x)の近傍で有限分解

$$0 \to \mathcal{L}_p \to \cdots \quad \to \mathcal{L}_0 \to \mathcal{F} \to 0$$

があって、しかも

$$0 \to \mathcal{L}_p(s) \to \cdots\cdots \to \mathcal{L}_0(s) \to \mathcal{F}(s) \to 0 \quad //$$

Def. 3' $S \in (\mathrm{Ban})$ $X \in (\mathrm{An})$

$\mathcal{F}$: $\mathcal{O}_{S\times X}$-加群層が S 解平坦

$\Longleftrightarrow$ ~~$\forall(s, x) \in S \times X$ に対し~~ $\forall x \in X$ に対し、札 (chart)

$$x \in X' \xrightarrow{\varphi} U \subset \mathbb{C}^n$$

があって、$(I \times \varphi)_* \mathcal{F}$ は S-解平坦 //

Prop. 4. 特に $S \in (\mathrm{An}) \subset (\mathrm{Ban})$ のときは

$\mathcal{F}$ が S-解平坦 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{F}$ が連接的かつ S-平坦 //

$\mathcal{F}$ は S をパラメーター空間とみて、層の変形と考えられる。解平坦とは、パラメーターについて、分解までこめて解析的

に変形することを意味する。解平坦層と精良性近傍を結びつける次の著しい性質がある。

Prop. 5 $S \in (\mathrm{Ban.})$, U を $\mathbb{C}^n$ 内の開集合, K を U 内の柱状集合とする。$\mathcal{F}$ を $S \times U$ 上の層とする.

$\mathcal{F}$ が S-解平坦 $\Longrightarrow$ $S' = \{ s \in S ; K$ が $\mathcal{F}(s)$-良性$\}$ は S の開集合 //

§4. グラスマン多様体.

Theo-Def. 4 E を Banach 空間とする。E の直部分空間全体を $\mathfrak{G}(E)$ と書くと、$\mathfrak{G}(E)$ は次に述べる様に、自然に Banach 多様体になる。この構造をもつ $\mathfrak{G}(E)$ を E の Grassmann 多様体と呼ぶ。

構造は $F \in \mathfrak{G}(E)$ を含む ~~の~~ 札を, $F \oplus G \cong E$ とする時

$$\begin{array}{ccl} U_G = \{ F' ; F' \oplus G \cong E \} & & \ni F' \\ \downarrow & & \quad \downarrow \\ \mathbb{L}(F, G) & & \ni F' \subset F \times G \text{ をグラフとする写像。} \end{array}$$ //

Def. 5. A を Banach 代数, E を Banach A-加群とする。

$\mathfrak{G}_A(E) = \{ E$ の直 A-部分加群$\}$ (直 A 部分加群とは, A-部分加群であって, Banach 空間としては直交補空間をもつもの) //

Prop. 5. $\mathfrak{G}_A(E)$ は $\mathfrak{G}(E)$ の部分解析空間である。

§5. $\gamma_K(\mathcal{E})$

S : Banach解析空間,

U : $\mathbb{C}^n$内の開集合, $\pi : S\times U \longrightarrow U$ 射影

$\mathcal{E}$: U上の連接層 $\mathcal{E}_S = \pi^*\mathcal{E}$

$K\subset U$: $\mathcal{E}$-良性柱状集合

Def. 6 $\gamma_K(\mathcal{E}) = \{B(K;\mathcal{E})$の部分$B(K)$加群で直有限分解を持つもの$\}$ $(\subset \gamma_{B(K)}(B(K;\mathcal{E})))$

$=\{B(K;\mathcal{E})$の商で直有限分解を持つもの$\}$ //

$\gamma_K(\mathcal{E})$は$\gamma_{B(K)}(B(K;\mathcal{E}))$の開集合になる。(自明ではない)

この$\gamma_K(\mathcal{E})$が問Dをとく、つまり$H(\mathcal{E})$を作る素材となる重要な役割を果す。それは次の二つの命題からわかる。

Prop-def. 7 $\mathcal{F} = \mathcal{E}_S/\mathcal{F}^\vee$; $\mathcal{E}_S$のS-解平坦な商層.

$S_1 = \{s\in S ; K$は$\mathcal{F}(s)$-良性$\}$ … Sの開集合

$$\beta_K(\mathcal{F}) : \begin{array}{ccc} S_1 & \longrightarrow & \gamma_K(\mathcal{E}) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ s & \longmapsto & B(K;\mathcal{F}(s)) \end{array}$$

は morphism である。

さらに、これはSについて函手的である。つまり morphism $h : S' \longrightarrow S$があると $S_1' = h^{-1}(S_1)$, であり、$\mathcal{F}' = (h\times 1_U)^*\mathcal{F}$とすると $\beta_K(\mathcal{F}') = \beta_K(\mathcal{F})\circ h$ //

Prop. 8 逆に morphism $f : S\to \gamma_K(\mathcal{E})$に対し、$\mathcal{E}_S|S\times \mathring{K}$の$S$-解平坦な商層$\mathcal{F}$を次の性質を満すように対応させることがで

きる。

1)(函手性) $h: S' \longrightarrow S$ morphism

$$f: S \longrightarrow \gamma_K(\mathcal{E}) \longmapsto \mathcal{F}$$

$$\Longrightarrow f \circ h : S' \longrightarrow \gamma_K(\mathcal{E}) \longmapsto \mathcal{F}' = (h \times 1_{\mathring{K}})^* \mathcal{F}$$

故に $I\gamma_K(\mathcal{E})$ に対応する層を $\mathcal{R}$ とかけば

$$f: S \longrightarrow \gamma_K(\mathcal{E}) \longmapsto \mathcal{F} = (f \times I_{\mathring{K}})^* \mathcal{R}$$

2) $(\beta_K(\mathcal{F}) \times I_{\mathring{K}})^* \mathcal{R} \doteqdot \mathcal{F} | S_1 \times \mathring{K}$

3) K' を $\mathring{K}$ 内の $\mathcal{E}$-良性柱状集合とする

$$\left.\begin{array}{l} \rho_0 : B(K) \longrightarrow B(K') \\ \rho_1 : B(K, \mathcal{E}) \longrightarrow B(K'; \mathcal{E}) \end{array}\right\} \text{制限}$$

$\rho_* : \gamma_K(\mathcal{E}) \longrightarrow \gamma_{K'}(\mathcal{E})$: ρ_0 と ρ_1 から自然に def. される morphism (これがうまく定義され morphism になることは自明ではない)

$$\beta_{K'}(\mathcal{R}) : \gamma_1 (\subset \gamma_K(\mathcal{E})) \longrightarrow \gamma_{K'}(\mathcal{E})$$

$$\Longrightarrow \beta_{K'}(\mathcal{R}) = \rho_* | \gamma_1 \quad //$$

性質 2), 3) は prop. 8 の対応がおゝむね $\mathcal{F} \longmapsto \beta_K(\mathcal{F})$ なる対応の逆になっていることを示している。あとはだいたい以上の形式的性質を用いて "はりあわせ" を行ってゆくのみである。

§6. よろい (Cuirasse)

X : (有限次) 解析空間

$X \supset X' \xrightarrow{\varphi} U \subset \mathbb{C}^n$　Xの札

$K \subset U$　. 柱状集合

$\mathcal{F}$　: X上の解析的連接層.

Notation Kが$\mathcal{F}$-良性 $\iff$ Kが$\varphi_*\mathcal{F}$-良性

$B(K, \mathcal{F}) = B(K; \varphi_*\mathcal{F})$, $\gamma_K(\mathcal{F}) = \gamma_K(\varphi_*\mathcal{F})$
etc.

さて、前節で得られた局所的な対応定理を用いて、はじめにあげた問題をとくため、次の概念を用いる。

Def. 8 Xのよろい (cuirasse) M

$\iff M = ((\varphi_i)_{i\in I}, (K_i)_{i\in I}, (V_i)_{i\in I}, (\varphi_{ij})_{(i,j)\in I\times I},$
$(K_{ij\alpha})_{\alpha\in A_{ij}}, L)$

i) $(\varphi_i)_{i\in I}$: 有限コの札, $\varphi_i : X_i \longrightarrow U_i \subset \mathbb{C}^{n_i}$

ii) $K_i \subset U_i$ 柱状集合

iii) $V_i \subset \varphi_i^{-1}(\mathring{K}_i) \subset X_i$　V_i : compact集合

iv) $\varphi_{ij} : X_{ij} = X_i \cap X_j \longrightarrow U_{ij} \subset \mathbb{C}^{n_{ij}}$　札

v) $K_{ij\alpha} \subset U_{ij}$　有限コの柱状集合の族で

$$\varphi_i^{-1}(\mathring{K}_i) \cap \varphi_j^{-1}(\mathring{K}_j) \supset \bigcup_{\alpha\in A_{ij}} \varphi_{ij}^{-1}(\mathring{K}_{ij\alpha}) \supset V_i \cap V_j$$

vi) L: 閉集合　$L \cup \bigcup_{i\in I} \mathring{V}_i = X$

Def. ◦ Mが$\mathcal{F}$について準良性 $\iff$ $K_i, K_{ij\alpha}$が$\mathcal{F}$-良性

◦ Mが$\mathcal{F}$について良性 $\iff$ $K_i, K_{ij\alpha}$が$\mathcal{F}$-良性
かつ $\mathrm{Supp}\,\mathcal{F} \cap L = \phi$

Def. $\mathfrak{F}$が$\mathcal{E}$の連接的商層とする.

　Mが$(\mathcal{E}, \mathfrak{F})$-良性 $\Longleftrightarrow$ Mは$\mathcal{E}$-準良性かつ$\mathfrak{F}$-良性 //

次の命題が基本的である.

Prop. 9 $\mathfrak{F}$: $\mathcal{E}$の連接的商層で、台がコンパクトなもの。

　$\Longrightarrow$ $(\mathcal{E}, \mathfrak{F})$-良性なよろいが必ず存在する。//

Prop. 10　S : Banach解析空間

　　$\mathfrak{F}$: $\mathcal{E}_S$ (cf §5) の商層で、S-解平坦かつS-固有的.

　　M : Xのよろい

　$\Longrightarrow$ $\{s \in S\,;\, M$は$(\mathcal{E}, \mathfrak{F}(s))$-良性$\}$ はSの開集合。//

これらはいずれも以前の命題から、容易にえられる。

§7. 空間 Θ

Mを$\mathcal{E}$-準良性なよろいとする。

$\mathcal{R}_i$を$\gamma_{K_i}(\mathcal{E}) \times \varphi_i^{-1}(\mathring{K}_i)$ 上定義される $\mathcal{E}_{\gamma_{K_i}(\mathcal{E})}$の一般的商層(Prop 8)

$$\gamma_i = \left\{ s \in \gamma_{K_i}(\mathcal{E}) \,;\, \begin{array}{l} \text{i) } \forall j \in I, \forall \alpha \in A_{ij} \quad K_{ij\alpha}\text{は}\mathcal{R}_i(s)\text{-良性} \\ \text{ii) } \mathrm{Supp}\, \mathcal{R}_i(s) \cap L \cap V_i = \phi \end{array} \right\}$$

　これは $\gamma_{K_i}(\mathcal{E})$ の open set

$$\gamma_{ij\alpha} = \gamma_{K_{ij\alpha}}(\mathcal{E})$$

$$\rho'_{ij\alpha} = \beta_{K_{ij\alpha}}(\mathcal{R}_i)|\gamma_i \quad : \gamma_i \longrightarrow \gamma_{ij\alpha}$$

$$\rho''_{ij\alpha} = \rho'_{ji\alpha}$$

とする。

$$\rho' : \prod \mathfrak{r}_i \longrightarrow \prod \mathfrak{r}_{ij\alpha}$$
$$(s_i) \longmapsto (s_{ij\alpha} = \rho'_{ij\alpha}(s_i))$$

$$\rho'' : \prod \mathfrak{r}_i \longrightarrow \prod \mathfrak{r}_{ij\alpha}$$
$$(s_i) \longmapsto (s_{ij\alpha} = \rho''_{ij\alpha}(s_j))$$ とする。

Def.9 $\Theta = \mathrm{Ker}((\rho', \rho'') : \prod \mathfrak{r}_i \rightrightarrows \prod \mathfrak{r}_{ij\alpha})$ //

$\mathcal{S}$: Banach 解析空間.

$\mathcal{F}$: $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}$ の $\mathcal{S}$-平坦かつ $\mathcal{S}$-固有的商層 ($\mathcal{S}$-ap. p. 層)

$\mathcal{S}_1 = \{ s \in \mathcal{S} ; M は (\mathcal{E}, \mathcal{F}(s))\text{-良性} \}$

このとき $\beta_{K_i}(\mathcal{F}) : \mathcal{S}_1 \longrightarrow \mathfrak{r}_i$ が定義される。($\beta_{K_i}(\mathcal{F})$ の値が $\mathfrak{r}_i$ に入ることは容易にわかる)

Def.10 $\beta_M(\mathcal{F}) = \prod \beta_{K_i}(\mathcal{F}) : \mathcal{S}_1 \longrightarrow \Theta$ //

(Θ に β_M の値が入ることは $\rho'_{ij\alpha} \circ \beta_{K_i}(\mathcal{F}) = \beta_{K_{ij\alpha}}(\mathcal{F})$ よりわかる)

この $\beta_M(\mathcal{F})$ は、函手性をもつ。つまり $\mathcal{S}' \xrightarrow{h} \mathcal{S}$ が morphism で、$\mathcal{F}' = (h \times 1_X)^* \mathcal{F}$ とすれば $\mathcal{S}'_1 = h^{-1}(\mathcal{S}_1)$ かつ

$$\beta_M(\mathcal{F}') = \beta_M(\mathcal{F}) \circ h : \mathcal{S}'_1 \longrightarrow \Theta$$

である。

さて、$p_i : \Theta \longrightarrow \mathfrak{r}_i$ 射影とする.

$$\tilde{\mathcal{R}}_i = (p_i \times I_{\varphi_i^{-1}(K_i)})^* \mathcal{R}_i \qquad 但し\ p_{ij\alpha} = \rho'_{ij\alpha} \circ p_i$$

とすれば $\tilde{\mathcal{R}}_i |_{\Theta \times \varphi_{ij}^{-1}(K_{ij\alpha})} = (p_{ij\alpha} \times I)^* \mathcal{R}_{ij\alpha}$.

だから $\tilde{\mathcal{F}}_i$ ははりあわせることができて、$\Theta \times X$ の $\mathcal{E}_\Theta$ の商層 $\tilde{\mathcal{F}}$ をつくる。

Prop.11. $\mathcal{F}$: $\mathcal{E}_S$ の S-解平坦かつ S-固有的な商層 (S-ap.p層)

$\Longrightarrow$ $(\beta_M(\mathcal{F}) \times I_X)^* \tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F} | S_1 \times X$

(prop. 8 から あきらかであろう。)

§8. $H_M(\mathcal{E})$

上でつくった Θ は $\mathcal{F} \longmapsto \beta_M(\mathcal{F})$ なる "injective" な対応を与えることはわかった。しかし、逆をつくるには Θ はまだ少し広すぎるのである。そこで

Prop. 12 S と $\mathcal{F}$ は前節と同じとする

$\theta = \beta_M(\tilde{\mathcal{F}}) : \Theta_1 \longrightarrow \Theta$

とすれば $Im(\beta_M(\mathcal{F})) \subset \Theta_1$ であり

かつ $\theta \circ \beta_M(\mathcal{F}) = \beta_M(\mathcal{F})$ //

なる性質にみちびかれて、

Def. 11 $H_M(\mathcal{E}) = \mathrm{Ker}\{(I, \theta) : \Theta_1 \rightrightarrows \Theta\}$

$\iota : H_M(\mathcal{E}) \longrightarrow \Theta$ (自然な単射)

$\mathcal{F}_M = (\iota \times I_X)^* \tilde{\mathcal{F}}$: $\mathcal{E}_{H_M(\mathcal{E})}$ の商層 //

とすると、

Prop. 13 $\mathcal{F}$: S-ap.p 層で $S_1 = S$ とする

$\Rightarrow \exists_1 \; f : S \rightarrow H_M(\mathcal{E})$ s.t. $\mathcal{F} = (f \times 1_X)^* \mathcal{F}_M$ //

§ 89. 問題 D の肯定的解答

Theo. 3　X : 有限次元解析空間.

　　　$\mathcal{E}$: X 上の解析的連接層　　とする。

$\Longrightarrow$ $\exists_1$ $H(\mathcal{E})$: Banach 解析空間

　$\exists$ $\mathcal{R}$　: $\mathcal{E}_{H(\mathcal{E})}$ の商層

s.t. i) $\mathcal{R}$ は $H(\mathcal{E})$ 上の解平坦, $H(\mathcal{E})$-固有的層. ($H(\mathcal{E})$-ap.p層)

　ii) $\forall S \in (\mathrm{Ban.})$　$\forall \mathcal{F}$: $\mathcal{E}_S$ の S-ap.p 層

　$\Longrightarrow \exists_1 f : S \longrightarrow H(\mathcal{E})$　s.t. $\mathcal{F} = (f \times 1_X)^* \mathcal{R}$

　このfは函手的にきまる。//

証明は、すべてのよいMについて $H_M(\mathcal{E})$ をつくる。す ると集合としては $H_M(\mathcal{E}) = \{\mathcal{F} : M$ が $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$-良性$\}$ である。 すると容易にこれらは解析空間としてはりあわせることがで きることがわかり, $\mathcal{R}_M$ もはりあわせられることがわかる。 これがら $H(\mathcal{E})$ と $\mathcal{R}$ をつくると, これが所与の性質をみたす ことがわかる。(prop. 9. 11, 13 を用いよ)

Theo. 4　$H(\mathcal{E})$ は Hausdorff かつ有限次元。//

　これは prop. 8 での ρ_0 と ρ_1 がコンパクト写像となる (Montel の定理より) ことから得られるのだが, 詳しい証明は原論文を見られたい。