数理解析研究所講究録
第68巻 1969年 27-36

3次元コンパクト複素多様体について

立教大 理　河井壮一

小論では3次元コンパクト Kähler 多様体でその上に定数以外の有理型函数の存在しないものの構造について調べる。方法は Kodaira [2] の類似である。

上の複素多様体を M, その上の ν 次正則微分型式のなす線型空間の次元を $h^{\nu,0}$ とおく。

命題1. $h^{3,0} \leq 1$.

証明. $h^{3,0} \geq 2$ とし, ψ_1, ψ_2 を1次独立な3次型式とする。局所座標 (z^1, z^2, z^3) を用いて $\psi_i = f_i(z)\, dz^1 \wedge dz^2 \wedge dz^3$ と表わし, 函数 $F(z) = f_1(z)/f_2(z)$ を考えればこれは M 上の定数でない有理型函数となり仮定に反する。

命題2. $h^{1,0} \leq 3$.

証明. $h^{1,0} \geq 4$ とし, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ を1次独立な1次型式とする。命題1により $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$ と $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_4$ は1次従属である。故に $\alpha \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 + \beta \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_4 = 0$ となる共には0にならない定数 α, β が存在する。$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \neq 0$ ならば, $\alpha \varphi_3 + \beta \varphi_4 = f_1 \varphi_1 + f_2 \varphi_2$ となる有理型函数が

存在するはずであり，それらは定数ではあり得ないので仮定に反する。$\varphi_1\wedge\varphi_2=0$ ならば，$\varphi_2=f\varphi_1$ となる函数が存在することになり仮定に反する。

さて $h^{1,0}=g$ とおき，$\varphi_1,\cdots,\varphi_g$ を1次独立な正則1次型式とする。Mは Kähler 多様体であるから，1次元Betti 数は $2g$ である。1次元 Betti 群の基底を $\gamma_1,\cdots,\gamma_{2g}$ とする。$\omega_\alpha=(\int_{\gamma_\alpha}\varphi_1,\cdots,\int_{\gamma_\alpha}\varphi_g)$ とおき，$\mathbb{C}^g$ の離散部分群 $\Omega=\{n_1\omega_1+\cdots+n_{2g}\omega_{2g}\mid n_\alpha\in\mathbb{Z}\}$ を考える。Ω の階数は $2g$ であり，$T=\mathbb{C}^g/\Omega$ は g 次元複素円環体である。多様体Mの任意の1点 z_0 を固定し，写像

$$\varphi:M\ni z\longrightarrow\left(\int_{z_0}^{z}\varphi_1,\cdots,\int_{z_0}^{z}\varphi_g\right)\in T$$

を考える。明かに φ は一価正則写像である。

命題3. 写像 φ は上への写像である。

証明. まず $g=3$ とする. 点 z の局所座標を z^1,z^2,z^3 として，$\varphi_1\wedge\varphi_2\wedge\varphi_3=f(z^1,z^2,z^3)\,dz^1\wedge dz^2\wedge dz^3$ と表わす. 点 $\varphi(z)$ の局所座標に $\mathbb{C}^g$ の座標を用いることにすれば φ の点 z での函数行列式は $f(z^1,z^2,z^3)$ である. $f(z^1,z^2,z^3)\neq 0$ となる点があれば φ が上への写像であることがわかり，至るところ $f=0$ であれば $\varphi_1\wedge\varphi_2\wedge\varphi_3=0$ となり，命題2の証明と同様にして矛盾に導くことができる. $g\leqq 2$ の場合も同様である。

命題4. $q=3$ のとき，φ は殆どいたるところ1対1の写像である．即ち M は複素円環体と双有理型同値である。

証明. まず T 上には曲面は1つもないことを示す．実際 T 上に既約曲面 D があるとすれば，D を定義する *reduced theta function* を $\theta(x)$ として，$f(x) = \dfrac{\theta(x+a)\,\theta(x-a)}{\theta(x)^2}$ なる C^q 上の有理型函数を考える．$f(x)$ は Ω を周期とし，従って T 上の函数となり，定数 a を一般にすれば定数でない函数となり，それを φ により M 上に持上げれば，定数でない有理型函数が M 上に存在することになり仮定に反する。写像 φ の退化する点 $z \in M$ のなす集合を A とする。A は解析的集合であり，上の事から $\varphi(A)$ は高々1次元の解析的集合である。さて φ は M の基本群 $\pi_1(M)$ から T の基本群 $\pi_1(T)$ の上への準同型を引起すが，M の道は $M-A$ の道にホモトープであり，$\pi_1(T)$ と $\pi_1(T-\varphi(A))$ は同型であるから，φ の $M-A$ への制限は $\pi_1(M-A)$ から $\pi_1(T-\varphi(A))$ の上への準同型を引起す。ところが $M-A$ は $T-\varphi(A)$ の不分岐被覆になっているから，それらは同型である。

命題5. $q=2$ のとき，φ の一般の *fibre*，即ち $\varphi^{-1}(t)$, *for general* $t \in T$ は楕円曲線又は有理曲線である。

証明 まず fibre が連結であることを示す。解析写像 φ の Stein 分解を $\varphi : M \xrightarrow{\psi_1} T' \xrightarrow{\psi_2} T$ とする。ここで解析空間 T' は φ の fibre の各連結成分を1点に縮めて出来た空間である。従って $\psi_2 : T' \longrightarrow T$ は被覆写像であるが，M上に定数以外の函数がないことからT上には曲線は1つもなく，その被覆は不分岐である。連続写像 $\varphi = \psi_2 \circ \psi_1$ が基本群 $\pi_1(M)$ を基本群 $\pi_1(T)$ の上に写すことから，ψ_2 も基本群の全写を引起こすことがわかり，従って $\psi_2 : T' \longrightarrow T$ は同型である。よって fibre は連結である。

さて正則写像 φ の退化する点 $z \in M$ のなす集合を A とする。T上に曲線がないことから $\varphi(A)$ は有限箇の点 $\{a_\rho\}_{\rho=1}^{n}$ である。各点 $t \in T - \{a_\rho\}$ 上の fibre C_t は特異点のない既約曲線である。その種数 $g \geq 2$ と仮定して矛盾に導く。種数 g の代数曲線の moduli の空間をコンパクト化したものを R_g として，各点 $t \in T - \{a_\rho\}$ に曲線 C_t に対応する R_g の点を対応させれば，$T - \{a_\rho\}$ から R_g への正則写像が得られるが，R_g は代数多様体であるから，その写像はT全体からの有理型写像に拡張される。T上には定数以外の有理型函数はないのだから，その有理型写像は定値写像である。従って $M - A \longrightarrow T - \varphi(A)$ は解析的に fibre bundle である。その fibre を C とする。さて各 a_ρ の座標近傍の多重円板 E_ρ

をとり，$M|E_p = \varphi^{-1}(E_p)$ を $E_p \times C$ で置換えることを考える．明かに $M|(E_p - a_p)$ と $(E_p - a_p) \times C$ は同型であるが，その同型写像は $M|E_p$ と $E_p \times C$ の双有理型写像に拡張される。実際 $a_p \times C$ は $E_p \times C$ の余次元 2 の解析的集合であり，$(E_p - a_p) \times C$ 上の有理型函数は $E_p \times C$ 全体に解析接続されてしまうから，$M|E_p$ に十分多くの有理型函数があればよいが，そのことは次のようにしてわかる。多様体 M の canonical bundle を K とし，連接層 $\mathcal{O}(mK)$ を考える。Grauert の定理により $\varphi_x(\mathcal{O}(mK))$ は連接層であり，E_p は Stein 多様体であるから，正整数 m を十分大きくすれば，$\varphi_x(\mathcal{O}(mK))$ の E_p 上の切断 $f_0, \cdots, f_r$ があって，自然に定義できる写像

$$M|E_p \ni z \longrightarrow (\varphi(z), (f_0(z), \cdots, f_r(z))) \in E_p \times \mathbb{P}^r$$

は，双有理型写像であって，$M|(E_p - a_p)$ の上で同型である．ここで $\mathbb{P}^r$ は r 次元射影空間である。よって $M|E_p$ の上には十分多くの有理型函数がある．各 a_p に対して $M|E_p$ を $E_p \times C$ で置換えて得られる fibre space を $\varphi^*: M^* \longrightarrow T$ とすればこれは fibre bundle であり，M^* は M と双有理型同値である．曲線 C の自己同型は有限箇しかないからそれらで不変な定数でない有理型函数が存在し，それは M^* の上の有理型函数を引起こす．これは M 上に定数でない有理型函数は存在しないことと矛盾する。

以上をまとめて

定理. 定数以外の有理型函数の存在しない3次元コンパクト Kähler 多様体は, i) 複素円環体, ii) 2次元複素円環体上の elliptic fibre space か projective line bundle, あるいは iii) regular manifold 即ちその irregularity $q=0$ なる多様体, と双有理型同値である.

証明. まず $t^{1,0}=1$ となる場合があり得ないことは, そのとき T は楕円曲線で常に定数でない有理型函数が存在しそれを φ により M 上に持上げて考えれば, 仮定に反するからである. ii) の場合 projective line bundle としてよいことは命題5の証明と同じである。

系. 上のような多様体の上には高々有限箇の既約曲面しか存在しない。

証明. i) の場合には命題4の証明から明かである。ii) の場合, $\varphi: M \longrightarrow T$ を elliptic fibre space とし, M上に無限箇の既約曲面が存在したとする。従つてM上に既約曲面 S で $\varphi(S)=T$ となるものが存在する。さて A, $\varphi(A)=\{a_p\}$ を命題5においてと同じ意味に用いることにすれば, T上に曲線が存在しないことから, $M-A \longrightarrow T-\varphi(A)$ は解析的に fibre bundle であることが容易にわかる。その fibre である楕円曲線をCとする。各 a_p に対して十分小さな単連結

近傍 U_p をとる. $M_p = M|U_p$, $S_p = S \cap M_p$, $U_p' = U_p - a_p$, $M_p' = M|U_p'$, $S_p' = S \cap M_p'$ とおく. 近傍 U_p が十分小さければ, S_p' の各連結成分は U_p' の不分岐被覆であるが, U_p' も単連結であるから, それらは U_p' と同型である。従って S_p の各既約成分は U_p と双有理型同値であり, U_p' から M_p' への正則な切断で, U_p からの有理型写像に拡張されるものがあることがわかる. よって M_p は $U_p \times C$ と双有理型同値であることが Kodaira [1] と同様にして示される. 各 M_p を $U_p \times C$ で置換えて得られる elliptic fibre space $\varphi^*: M^* \longrightarrow T$ は fibre bundle であり, M^* と M は双有理型同値である. S に対応する M^* の既約曲面を S^* とする。写像 $\psi^* = \varphi^*|S^*$ の Stein 分解を $\psi^*: S^* \longrightarrow T' \longrightarrow T$ とする. T' が T の不分岐被覆であることは容易にわかる. M^* を T' 上の fibre bundle に持上げて見れば, 正則な切断を持つことがわかり, 従って直積となるから, 定数以外の有理型函数が M 上にも存在することがわかる。残りの場合も同様にして示される。iii) の場合, M 上の正則函数の層を $\mathcal{O}$, 0 にならない正則函数の層を $\mathcal{O}^*$, 整数値定数函数の層を Z とすれば次の完全系列が成り立つ.

$$0 \longrightarrow Z \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}^* \longrightarrow 0.$$

これから得られる完全系列

$$H^1(M, \mathcal{O}) \longrightarrow H^1(M, \mathcal{O}^*) \longrightarrow H^2(M, Z)$$

において，仮定から $H^1(M, \mathcal{O})=0$．従って M 上に既約曲面の無限列 $S_1, S_2, \cdots, S_i, \cdots, S_i \neq S_j$ for $i \neq j$ があるとすれば，十分大きな k に対して整数 $n_1, \cdots, n_k$ が存在して因子 $\sum_{i=1}^{k} n_i S_i$ は 0 に一次同値である。これは M 上に定数でない有理型函数が存在することになって仮定に反する。

最後に定理の ii) の場合の例のために次の命題を証明する。

命題　その上に既約曲線が1つも存在しないような K3 曲面 S 上の projective line bundle $\varphi: M \longrightarrow S$ は，M 上に定数でない有理型函数が存在すれば，直積である。

証明　M 上に定数でない有理型函数が存在したとする。従って M 上には無限箇の既約曲面が存在し，$\varphi(S_\nu)=S$ となる曲面 S_ν の数も無限である。各 S_ν は S と同型であり，異なる S_ν は互に交わらないことを示そう。このことが示されれば，M に互に交わらない3つの切断が存在するので，それが直積であることは明かである。さて S_ν の特異点と，単点であってそこで φ の S_ν への制限が退化する点のなす集合を A とする。像 $\varphi(A)$ は仮定から高々有限箇の点である。曲面 S は単連結であるから，$S-\varphi(A)$ も単連結であり，従って不分岐被覆 $S_\nu - A \longrightarrow S-\varphi(A)$ は同型である。よって逆写像 $s_\nu' : S-\varphi(A) \longrightarrow S_\nu - A$ が存在する。正則写像 s_ν' が

S全体からの有理型写像 S_ν に拡張されることは明かであるが，S_ν はさらに正則写像であることが示される．実際 $a_p \in \varphi(A)$ として，$S_\nu(a_p)$ が点ならばそこで S_ν は正則であり，点でなければそれは射影直線であるから，a_p の近傍 U_p を十分小さくとれば，$S_\nu | U_p = S_\nu \cap \varphi^{-1}(U_p)$ は U_p の2次変換になっている．従って $\mathbb{P}^1$ を射影直線として $M | U_p$ と $U_p \times \mathbb{P}^1$ を同一視するとき，U_p の点 a_p を中心とする座標系 (x, y) を適当に選べば $S_\nu | U_p$ は $\lambda^1 x - \lambda^0 y = 0$ で定義される曲面である。ここで (λ^0, λ^1) は $\mathbb{P}^1$ の同次座標．ところで $\mu \neq \nu$ に対して $S_\mu \cap S_\nu$ は曲線で，$\varphi(S_\mu \cap S_\nu)$ は有限箇の点から成り，点 a_p を含む．従って $S_\mu | U_p$ も，点 a_p を中心とする適当な座標系 (x_1, y_1) を選べば，$\lambda^1 x_1 - \lambda^0 y_1 = 0$ で定義される．よって $\varphi(S_\mu \cap S_\nu)$ は $x y_1 - x_1 y = 0$ で定義される曲線を含むことになり矛盾である。この証明からさらに $S_\mu \cap S_\nu = \phi$ なることも示され，命題は証明された。

注意．直積とならない projective line bundle の存在は次のようにしてわかる．完全系列

$$(1) \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow GL(2) \longrightarrow PGL(1) \longrightarrow (1)$$

から，S上の cohomology の完全系列

$$H^1(S, \mathbb{C}^*) \longrightarrow H^1(S, GL(2)) \xrightarrow{\rho} H^1(S, PGL(1))$$

が得られるが，Kodaira [2] から一般の K3 曲面に対しては

$H^1(S, \mathbb{C}^*) = 0$ であるから，S の tangent bundle τ_S をとり，$p(\tau_S)$ を考えれば，これから得られる projective line bundle $\varphi: M \longrightarrow S$ は直積ではない．S を Kähler であるように選べば M も Kähler であり，また M の1次元 Betti 数が 0 であることも容易にわかる．

文献

Kodaira [1], "On compact analytic surfaces, II," Ann. of Math. vol. 77. (1963).

〃 [2], "On the structure of compact complex analytic surfaces, I," Amer. J. of Math. vol. 86 (1964).