数理解析研究所講究録
第68巻 1969年 59-74

Algebraic cycles
── 高次Jacobi, Picard 多様体 ──

東大理　諏訪立雄

1952年にA. Weil [10]は, 高次Jacobi多様体を定義し, それを中間次元の代数的サイクルの研究に用いることを提唱している. その後この方面の進歩は全くないと言って良かったが, 最近D. I. LiebermanはWeilの考えを発展させ又P. A. GriffithsはWeilのJacobianをmodifyしたものを用いることを試みている. 以下はLieberman [7][8], Griffiths [3]を中心としてまとめたものである.

§0 準備

Vを複素数体上の非特異射影的代数多様体(n次元)とし, $\mathfrak{Z}(V)$でV上の代数的サイクル(i.e. Vの既約部分多様体の整係数の形式和)全体の群を表わす. $\mathfrak{Z}(V)$は余次元又は次元で次数づけられた加群である. 以後余次元は上つき, 次元は下つきで表わす($\mathfrak{Z}_{\cdot} = \mathfrak{Z}^{n-\cdot}$). V, Tを非特異代数的多様体, $Z \in \mathfrak{Z}(T \times V)$とするとき,

$\{Z(t)=\pi_V(Z\cdot(t\times V))\mid t$ は $Z\cdot(t\times V)$ が定義される T の点$\}$

(ただし $\pi_V : T\times V \longrightarrow V$ は射影) を T でパラメタづけられた V のサイクルの代数的族という.

<u>定義1.</u> $X, Y\in\mathfrak{Z}(V)$ とするとき,

i) X と Y とが代数的に同値 $(X \underset{a}{\sim} Y)$

$\Leftrightarrow$ X, Y が同一の代数的族に属する,

ii) X と Y とが torsion 同値 $(X \underset{\tau}{\sim} Y)$

$\Leftrightarrow$ $\exists k\in\mathbb{Z},\ k\neq 0\quad kX \underset{a}{\sim} kY$,

iii) X と Y とが有理同値 $(X \sim_r Y)$

$\Leftrightarrow$ X, Y が射影直線 $\mathbb{P}^1$ でパラメタづけられた代数的族に属する.

$\sim_*$ を上のいずれかの同値関係とするとき, $\mathfrak{Z}_*(V)=\{Z\in\mathfrak{Z}(V)\mid Z\sim_* 0\}$, $\mathfrak{A}_*=\mathfrak{Z}/\mathfrak{Z}_*$ と書く. 代数的サイクルの交叉積から誘導された積により, $\mathfrak{A}^{\bullet}_*=\mathfrak{Z}^{\bullet}/\mathfrak{Z}^{\bullet}_*$ は次数づけられた環である. 特に $\mathfrak{A}^{\bullet}_r$ はいわゆる Chow 環 ([1] [9] 参照).

<u>定義2.</u> A を Abel 多様体, h を $\mathfrak{Z}_a(V)$ から A への準同型写像とする. 任意の $\mathfrak{Z}_a(V)$ に属するサイクルの代数的族 $Z(t)$ $(Z\in\mathfrak{Z}(T\times V))$ に対し, T から A への正則写像 φ がして, $Z(t)$ が定義される点 $t\in T$ で $\varphi(t)=h(Z(t))$ なる

ときhを解析的という.

hが解析的ならば明らかに $\ker h \supset \mathfrak{Z}_r(V)$.

§1. 種々の高次 Jacobi, Picard 多様体

まず実トーラス

(1) $H^{2g-1}(V, \mathbb{R}) / \mathrm{im}\, H^{2g-1}(V, \mathbb{Z})$

(ただし, $\mathrm{im}\, H^{2g-1}(V, \mathbb{Z})$ は自然な準同型写像 $H^{2g-1}(V, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^{2g-1}(V, \mathbb{R})$ の像.)

上に2通りの複素構造を考える. 自然な分解

$$H^p(V, \mathbb{C}) = \sum_{r+s=p} H^{r,s}(V)$$

において, $\varphi \in H^p(V, \mathbb{R})$ $(\subset H^p(V, \mathbb{C}))$ ならば, φ の (r, s) 成分は (s, r) 成分と互に複素共役であるから実ベクトル空間としての同型

$$H^{2g-1}(V, \mathbb{R}) \simeq \sum_{\substack{r+s=2g-1 \\ (r,s)\text{又は}(s,r)\\ \text{のうちの一方.}}} H^{r,s}(V)$$

を得る. 右辺は複素ベクトル空間であるから, この様な同型により $H^{2g-1}(V, \mathbb{R})$ 上の複素構造が定義できる.

<u>定義3.</u> i) $T^g(V)$ (Griffiths): 同型

(2) $$H^{2g-1}(V, \mathbb{R}) \simeq \sum_{\substack{r<s \\ r+s=2g-1}} H^{r,s}(V)$$

によって与えられる実トーラス(1)上の複素構造.

$J^g(V)$ (Weil)：同型

$H^{2g-1}(V, \mathbb{R}) \simeq \sum_{\substack{s \equiv g \pmod 2 \\ r+s=2g-1}} H^{r,s}$

よって与えられる実トーラス(1)上の複素構造.

<u>注意</u>. 1) $P_{r,s} : H^p(V, \mathbb{C}) \to H^{r,s}(V)$ $(r+s=p)$ を (r,s) 成分への射影とし, $C = \sum_{r,s} i^{r-s} P_{r,s}$ $(i = \sqrt{-1})$ とすると, $J^g(V)$ は $H^{2g-1}(V, \mathbb{R})$ 上の複素構造 $-C$ に対応する複素トーラスで, $T^g(V)$ は $H^{2g-1}(V, \mathbb{R})$ 上の複素構造 $\sum_{r+s=2g-1} i^{\frac{s-r}{|s-r|}} P_{r,s}$ に対応する複素トーラスである.

2) $J^g(V)$ は Abel 多様体であるが, $T^g(V)$ は一般にそうでない.

3) $T^1(V) = J^1(V) = H^{0,1}(V)/H^1(V, \mathbb{Z})$ は Picard 多様体, $T^n(V) = J^n(V) = H^{n-1,n}(V)/H^{2n-1}(V, \mathbb{Z})$ は Albanese 多様体である.

4) $T^g(V)$ は V に holomorphic によるが, $J^g(V)$ は一般にそうでない (§4 参照, 後者の反例は例えば Griffiths [2] I pp. 588−589 参照)

5) S を $\sum_{\substack{r<s \\ r+s=2g-1}} H^{r,s}(V)$ 又は $\sum_{\substack{s \equiv g\ (2) \\ r+s=2g-1}} H^{r,s}(V)$ の Poincaré dual 即ち $\sum_{\substack{r<s \\ r+s=2g-1}} H^{n-r,n-s}(V)$ 又は $\sum_{\substack{s \equiv g\ (2) \\ r+s=2g-1}} H^{n-r,n-s}(V)$

とする．さらに $\omega^1, \cdots, \omega^m$ を $S\ (\subset H^{2n-2g+1}(V, \mathbb{C}))$ の基底（を代表する形式）とし，$\gamma_1, \cdots, \gamma_{2m}$ を $H_{2n-2g+1}(V, \mathbb{Z})$ の Betti 基底とする．Γ を $\pi_\nu = \left(\int_{\gamma_\nu}\omega^1, \cdots, \int_{\gamma_\nu}\omega^m\right)$ $(\nu = 1, \cdots, 2m)$ で生成される $\mathbb{C}^m$ の部分群とすれば，これは $\mathbb{C}^m$ の格子で，T^g 又は J^g は複素トーラスとして $\mathbb{C}^m/\Gamma$ と同型（ただし，もちろん T^g のときは $S = \sum_{\substack{r<s \\ r+s=2g-1}} H^{n-r, n-s}$，$J^g$ のときは $S = \sum_{\substack{s \equiv g(2) \\ r+s=2g-1}} H^{n-r, n-s}$ とする．）

次に写像 $\varphi^g : \mathfrak{Z}_a^g(V) \longrightarrow J^g(V)$ 又は $T^g(V)$ を定義する．$Z \in \mathfrak{Z}_a^g$ は 0 に homologous であるから，$2n-2g+1$ チェイン C が存在して $\partial C = Z$．そこで S, ω^α $(\alpha = 1, \cdots, m)$ を注意 4) と同じとするとき，

$$\varphi^g(Z) = \left(\int_C \omega^1, \cdots, \int_C \omega^m\right) \pmod{\Gamma}$$ と定義する．

$\partial C' = \partial C = Z$ ならば $\int_C \omega^\alpha - \int_{C'} \omega^\alpha = \int_{C-C'} \omega^\alpha \in \Gamma$

であるからチェイン C のとり方にはよらないが，

$$\int_C \omega^\alpha + d\eta^\alpha = \int_C \omega^\alpha + \int_{\partial C} \eta^\alpha = \int_C \omega^\alpha + \int_Z \eta^\alpha$$

より分るように，コホモロジー類の代表 ω^α のとり方にはよってしまうが，T^g のときは，コホモロジー類だけできまる

ことが示される. なお φ^g は解析的である (§2 定理2参照)

最後に Picard 多様体の持つ universality に注目した Lieberman の高次 Picard 多様体について記す.

定義4. $\mathfrak{Z}_{reg}(V) = \{X \in \mathfrak{Z}_a(V) \mid$ すべての, $\mathfrak{Z}_a(V)$ から Abel 多様体への解析的準同型写像 h に対し $h(X) = 0\}$ とし, $X, Y \in \mathfrak{Z}(V)$ が regularly equivalent $(X \sim_{reg} Y)$

$\Leftrightarrow X - Y \in \mathfrak{Z}_{reg}(V)$

と定義する. $G(V) = \mathfrak{Z}_a(V)/\mathfrak{Z}_{reg}(V)$ を(全) Picard 群という. $\mathfrak{Z}_{reg}$ は $\mathfrak{Z}_a$ の次数つき部分群であるから, $G(V)$ は自然に次数づけられる. $G^g(V) = \mathfrak{Z}^g_a/\mathfrak{Z}^g_{reg}$ を g 次 Picard 群という.

定義5. 次の条件を満たす組 $(\mathrm{Pic}^g(V), \mathcal{Y})$ を V の g 次 Picard 多様体という:

i) $\mathrm{Pic}^g(V)$ は Abel 多様体,

ii) $\mathcal{Y} \in \mathfrak{A}^g_c(\mathrm{Pic}^g(V) \times V)$ (Poincaré 類という)

かつ
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Pic}^g(V) & \longrightarrow & G^g(V) \\ \Psi & & \Psi \\ t & \longmapsto & \mathcal{Y}(t) - \mathcal{Y}(0) \end{array}$$
が群としての同型写像

注意 g 次 Picard 多様体は一般に存在するかどうか分らない. $g = 1$ のときは $\mathfrak{Z}^1_{reg} = \mathfrak{Z}^1_r$ で, 古典的な Picard 多

様体（と Poincaré divisor の組）が 1 次 Picard 多様体である．（[5] p.720 以下および [6] p.114 参照）．$g=n$ のときは，V の Albanese 多様体 $Alb(V)$ の universality により，群として $Alb(V)\cong G^n(V)$ であるが，これが定義5の意味の n 次 Picard 多様体かどうかは一般に分らない．

<u>命題1.</u> $\mathfrak{Z}_a^g$ から Abel 多様体への解析的準同型写像に対し universal な解析的準同型写像

$$\Psi^g : \mathfrak{Z}_a^g(V) \longrightarrow Pic^g(V)$$

が存在する．

証明略．なお詳しいことは略すが $Pic^g(V)$ でパラメタづけられた V の $n-g$ サイクルの族 $\mathcal{Y}$（Poincaré family）は次の様な universality をも持つ：任意の代数多様体 T でパラメタづけられた V の $n-g$-サイクルの族は $\ker\Psi^g$ に属する族を無視すれば，Poincaré family を正則写像 $T\longrightarrow Pic^g(V)$ で引きもどして得られる。

以上のように $(Pic^g(V), \mathcal{Y})$ は2通りの universality を持つ．Pic^g と J^g，T^g の間の関係は後の節で述べる．

§2. <u>Functorial な性質</u>，<u>Weil 写像の解析性</u>

$J_g(V)=J^{n-g}(V)$，$T_g(V)=T^{n-g}(V)$ とおく．以下 J^g について論ずるが，T^g についても同様である．

§6

V, W をそれぞれ n, m 次元の非特異射影的代数多様体とする. 正則写像 $f: V \to W$ が与えられれば, 自然な準同型写像

$$f^*: H^{2q-1}(W, \mathbb{R}) \longrightarrow H^{2q-1}(V, \mathbb{R}) \quad \text{および}$$

$$f_*: H_{2q+1}(V, \mathbb{R}) \longrightarrow H_{2q+1}(W, \mathbb{R})$$

を得るが, これらは integral class を integral class に写し, type を保つから, 準同型写像

$$f^*: J^q(W) \longrightarrow J^q(V) \quad \text{および}$$

$$f_*: J_q(V) \longrightarrow J_q(W)$$

を導く. $H^{2q-1}(V, \mathbb{R})$ は $H_{2q-1}(V, \mathbb{R})$ と互に dual であるから J^q と $J^{n-q+1} = J_{q-1}$ は互に dual な Abel 多様体で, $f^*: J^q(W) \longrightarrow J^q(V)$ は $f_*: J_{q-1}(V) \longrightarrow J_{q-1}(W)$ の転置写像である.

<u>命題2.</u> 次の図式は可換:

$$\begin{tikzcd}
J_q(V) \arrow[r, "f_*"] & J_q(W) \\
\mathfrak{Z}^a_q(V) \arrow[u, "\varphi_q"] \arrow[r, "f_*"] & \mathfrak{Z}^a_q(W) \arrow[u, "\varphi_q"']
\end{tikzcd}$$

これは後の定理1に含まれる (Z が f のグラフのとき).

以後, ホモロジー群とコホモロジー群は Poincaré 双対性 $H_\cdot \cong H^{2n-\cdot}$ により同一視し, 実(コ)ホモロジー環を単に

$H(V)$ と書く。さらに Künneth の定理により $H(V\times W)$ と $H(V)\otimes H(W)$ とは同一視し，$K_{p,q}: H(V\times W)\longrightarrow H^p(V)\otimes H^q(W)$ を p,q 成分への射影とする.

<u>定義6.</u> $\varphi\in H(V\times W)=H(V)\otimes H(W)$ に対し，準同型写像 $B(\varphi): H(V)\longrightarrow H(W)$ を $B(\varphi)[\lambda]=(\pi_W)_*((\lambda\otimes 1)\wedge\varphi)$ $(\lambda\in H(V))$ により定義する.

$J^q(V)=H^{2q-1}(V)/\mathrm{im}\,H^{2q-1}(V,\mathbb{Z})$ より，$\mathrm{Hom}(J_q(V), J^p(W))$ は $\mathrm{Hom}(H_{2q+1}(V), H^{2p-1}(W))$ の元のうち integral class を integral class に写し，かつ C と可換なもののなす部分群とみなせる. 一方 $\varphi\in H(V\times W)$ の Künneth type が $(2q+1, 2p-1)$ であれば

i) $B(\varphi)$ が integral class を integral class に写す $\Longleftrightarrow$ φ が integral,

ii) $B(\varphi)C=CB(\varphi)\Longleftrightarrow C\varphi=\varphi$

なる事がいえる. そこで $C\varphi=\varphi$ なる integral class $\varphi\in H(V\times W)$ が与えられた時，φ の $(2q+1, 2p-1)$ Künneth 成分に associate した $J_q(V)$ から $J^p(W)$ への解析的準同型写像を $B^{q,p}(\varphi)$ と書く.

$cl: \mathfrak{Z}_\cdot(V)\longrightarrow H_{2\cdot}(V)$ を自然な準同型写像とするとき，

<u>定理1</u> [7]　$Z \in \mathfrak{Z}(V \times W)$ に対し、次の図式は可換：

$$\begin{array}{ccc} J_q(V) & \xrightarrow{B^{q,p}(cl\,Z)} & J^p(W) \\ \varphi_q \uparrow & & \uparrow \varphi^q \\ \mathfrak{Z}^{a}_{q}(V) & \xrightarrow{Z(\ )} & \mathfrak{Z}^{p}_{a}(W) \end{array}$$

（可換性は $Z(\ )$ の定義域で考える）.

この定理の証明は略すが、以下興味ある系を記す.

$C^{q,p}(V, W) = \{\varphi \in H(V \times W) \mid C\varphi = \varphi,\ \varphi$ は integral かつ Künneth type が $(2q+1, 2p-1)\}$，　$C^p = C^{0,p}$，$B^p = B^{0,p}$ とする.

<u>命題3.</u>　$B^p : C^p(V, W) \simeq \mathrm{Hom}(Alb(V), J^p(W))$

$(J_0(V) = J^n(V) = Alb(V))$.

$\Phi^p(V)$ を $C^p(J^p(V), V)$ の元で、上の同型で $Alb(J^p(V))$ $(\simeq J^p(V)) \longrightarrow J^p(V)$ の恒等写像に対応するものを表わす.

また、class $\varphi \in H(V)$ に対し、$X \in \mathfrak{Z}(V)$，$r \in \mathbb{Z}\ (r \neq 0)$ が存在して $cl\,X = r\varphi$ となるとき、φ は代数的であるという.

<u>補題1.</u>　S を Abel 多様体、$\varphi \in H(S \times V)$ を Künneth Type $(1, 2p-1)$ の class とすると、集合 $\{R \mid R$ は S の部分 Abel 多様体で $\varphi|R \times V$ が代数的$\}$ には極大元が一意的に存在する.

<u>定義2.</u>　$J^q_a(V)$ を、$\{R \mid R$ は $J^q(V)$ の部分 Abel 多様体で

$\Phi^g | R \times V$ が代数的$\}$の極大元とし，$\Phi^g_a = \Phi^g | J^g_a \times V$ とする．さらに，$k^{(g)}$ を $K_{1,2g-1}(cl\,\mathcal{Y}) = k^{(g)} \Phi^g_a$ なる class $\mathcal{Y}$ $\in \mathfrak{A}_\tau(J^g_a(V) \times V)$ が存在するような正整数の最小のものとする．また，このような class $\mathcal{Y}$ を quasi-Poincaré class という．定理1より次の定理2を得る：

<u>定理2</u> [7]　i) Weil 写像 φ^g は解析的，

ii) $\mathcal{Y} \in \mathfrak{A}^g_\tau(J^g_a(V) \times V)$ が quasi-Poincaré class ならば $t \in J^g_a(V)$ に対し，$\varphi^g(\mathcal{Y}(t) - \mathcal{Y}(0)) = k^{(g)} t$

iii) $\mathrm{Im}\,\varphi^g = J^g_a(V)$.

証明　i) $Z(t)$ $(t \in T,\ Z \in \mathfrak{Z}^g(T \times V))$ を $\mathfrak{Z}^g_a$ に属するサイクルの代数的族とし，$Z(t_0)$ が定義されている点 $t_0 \in T$ を一つとって固定しておく．写像 $g : T \longrightarrow \mathfrak{Z}^a_0(T)$ を $g(t) = t - t_0$ で定義すると，合成写像 $\varphi_0 \circ g : T \longrightarrow J_0(T) = Alb(T)$ は標準的写像．写像 $\chi : T \longrightarrow J^g(V)$ を $\chi = B^g(cl\,Z) \circ \varphi_0 \circ g + \varphi^g(Z(t_0))$ により定義すれば，これは明らかに正則．一方定理1により次の図式は可換．従って $Z(t)$ が定義されている点で $\varphi^g(Z(t)) = \chi(t)$ 故に φ^g は解析的．

$$\begin{tikzcd}
J_0(T) \arrow[r, "B^g(cl\,Z)"] & J^g(V) \\
\mathfrak{Z}^a_0(T) \arrow[u, "\varphi_0"] \arrow[r, "Z(\,)"] & \mathfrak{Z}^g_a(V) \arrow[u, "\varphi^g"']
\end{tikzcd}$$

ii), iii) 省略．

定理2 i) は Weil [10] に open problem として書かれており, Griffiths [2] II でも証明されているそうである. ii) および iii) より, $J_a^g(V)$ は quasi-Poincaré family をパラメタづけるといえる. 即ち, 任意の T でパラメタづけられた V の $n-g$ サイクルの代数的族 $\{Z(t)\}$ が与えられた時, 族 $\{k^{(g)}Z(t)\}$ は, $\ker\varphi^g$ に属する族を無視すれば, quasi-Poincaré family $\mathcal{Y}$ から正則写像 $T \longrightarrow J_a^g(V)$ で引きもどして得られる.

$\mathfrak{Z}_\varphi^g$ を解析的準同型写像 $\varphi^g : \mathfrak{Z}_a^g(V) \longrightarrow J_a^g(V) \subset J^g(V)$ の核とすると, 定義により $\mathfrak{Z}_{reg}(V) \subset \mathfrak{Z}_\varphi(V)$. 従って $J_a^g(V)$ が g 次 Picard 多様体であることをいうには次の2つを示さねばならない: i) $\mathfrak{Z}_{reg}^g(V) \supset \mathfrak{Z}_\varphi^g(V)$, ii) $k^{(g)} = 1$. i) は例えば, $cl : \mathfrak{A}_\tau^g \longrightarrow H^{2g}$ が単射, 即ち代数的サイクルについて torsion equivalence と homological equivalence が一致すればいえる.

最後に, $g=1$ のときは $\Phi^1(V) = K_{1,1}(cl\,\mathcal{P})$ ($\mathcal{P}$ は Poincaré divisor) より, Φ^1 が代数的であることに注意して,

<u>命題4.</u> $J_a^1(V) = J^1(V)$, $J_0^a(V) = J_0(V)$.

§3. $T_{\ell g}^{g}$

この節では，Weil 写像の像の特徴づけについて考える．まず，X を $J_a^g(V) \subset J^g(V) = H^{2g-1}(V, \mathbb{R}) / \mathrm{im}\, H^{2g-1}(V, \mathbb{Z})$ 上にある $H^{2g-1}(V, \mathbb{R})$ の部分空間とすると，$(r, s) \neq (g, g-1)$ 又は $(g-1, g)$ ならば $P_{r,s}(X) = 0$．従って同型 §1(3) において，$J_a^g(V)$ の原点における接空間は $H^{g-1,g}(V)$ に含まれ，J_a^g は T^g の複素部分トーラスであることが分る．

__定義8__ 同型 §1(2) によって，原点における接空間が $H^{g-1,g}(V)$ に含まれるような $T^g(V)$ の複素部分トーラスのうち最大のものを $T_{\ell g}^g(V)$ と書く．

V 上の Hodge 構造を一つ定め，$\underline{u} \in H^2(V, \mathbb{Q})$ を基本類とする．周知のように，$H^{2g-1}(V, \mathbb{R})$ 上には非退化歪対称実双一次形式

$$A(\underline{a}, \underline{b}) = \sum_r (-1)^{g+r} \int_V \underline{u}^{2n-2(g+r)+1} \wedge \underline{a_r} \wedge \underline{b_r}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{ただし，} \underline{a},\ \underline{b} \in H^{2g-1}(V, \mathbb{R}),\ \underline{a} = \sum_r \underline{u}^r \underline{a_r},\ \underline{b} = \sum_r \underline{u}^r \underline{b_r} \\ a_r,\ b_r \text{ は原始的形式．} \end{array}\right)$$

が存在する．

__定理3__ [8] i) W が $T_{\ell g}^g$ の複素部分トーラスならば，A を W（の原点における接空間）に制限したものは非退化．
ii) W を T^g の実部分トーラスで $A|W$ が非退化ならば，

$j(T^g)=W$ であるような自然な準同型写像 $f:T^g\to T^g$ が存在する。さらに，f が正則であるためには，W が複素部分トーラスであることが必要十分．

次に，$H_1(T^g)$ と $H^{2g-1}(V)$ とを同一視したとき，同型

$$H^1(T^g)\otimes H^{2g-1}(V)\simeq \mathrm{Hom}(H_1(T^g),H^{2g-1}(V))$$

により，右辺の恒等写像に対応する $H^1(T^g)\otimes H^{2g-1}(V)=H^{2g}(T^g(V)\times V,\mathbb{R})$ の元を Φ^g とする。これは §2 の Φ^g とは微分同型 $T^g\simeq J^g$ で対応する．

<u>定義9</u>. W を $T^g(V)$ の実部分トーラスで $A|W$ が非退化なものとし，f を定理3 ii) の写像とするとき，$\Phi_W\in H^{2g}(T^g(V)\times V)$ を $\Phi_W=(f\times 1)^*\Phi_g$ により定義する．

<u>定理4</u> [8] W を定義9と同じとするとき，W が $T^g_{eg}(V)$ の複素部分トーラスになるための必要十分条件は Φ_W の型が (g,g) であること．

上の定理4により，T^g_{eg} は "$\{W\subset T^g \mid \Phi_W$ の型が$(g,g)\}$ の最大元" と特徴づけられる．一方 J^g_a は $\{W\subset T^g \mid \Phi_W$ が代数的$\}$ の極大元 であったから，$T^g_{eg}\supset J^g_a$ で，さらに Hodge 予想を仮定すれば $J^g_a=T^g_{eg}$．

§4. Moduli.

$J^g(V)$ は一般に V に holomorphic に依らない，即ち複素解析族 $\{V_t\}$ に対し，$\{J^g(V_t)\}$ は複素解析族をなさない．$T^g(V)$ は，次の補題により，V に holomorphic に依る：

補題2 [4]　$\mathcal{V} \longrightarrow \Delta$ を非特異代数多様体の複素解析族，Δ は一次元円板とする．さらに $t \in \Delta$ 上のファイバーは V_t で表わし，$\dim V_t = n$ とする．このとき，$\omega^1, \ldots, \omega^{2m}$ を $H^{2n-2g+1}(\mathcal{V}, \mathbb{C}) \cong H^{2n-2g+1}(V_t, \mathbb{C})$ の基底を代表する $\mathcal{V}$ 上の C^∞ $2n-2g+1$ 形式とすると，Δ 上の正則函数 $\xi_{\alpha j}(t)$ $(1 \leq \alpha \leq m,\ 1 \leq j \leq 2m)$ で，$2n-2g+1$ 形式 $\varphi_\alpha = \sum_{j=1}^{2m} \xi_{\alpha j}\, \omega^j$ $(\alpha = 1, \ldots, m)$ を各 V_t に制限したものが $\sum_{\substack{r<s \\ r+s=2g-1}} H^{n-r,n-s}(V_t) = \sum_{\substack{r>s \\ r+s=2n-2g+1}} H^{r,s}(V_t)$ の基底（を代表する形式）となるようなものが存在する．

次の2つの定理は Lieberman [8] による：

定理5　B を単連結複素多様体，V_t $(t \in B)$ を代数多様体の複素解析族，W を $T^g(V_0)$ の実部分トーラスとすると，$S = \{t \in B \mid W$ は $T^g_{Rg}(V_t)$ の複素部分トーラスを定義する$\}$ は B の閉解析的集合で，W 上の Abel 多様体の構造は $t \in S$ に holomorphic に依る．

7.

<u>定理6</u>　Bを任意の複素多様体, V_t $(t\in B)$ を代数多様体の複素解析族とするとき, $\dim T^{g}_{hg}(V_t)$ が t によらなければ, $T^{g}_{hg}(V_t)$ $(t\in B)$ は複素解析族をなす.

<u>例</u>　$B=\{Z\in M_3(\mathbb{C})\mid {}^tZ=Z,\ \mathrm{Im}\,Z>0\}$ を6次元 Siegel 上半平面, V_t $(t\in B)$ を3次元偏極 Abel 多様体の族とする. §2命題4により $T^1_{hg}(V_t)=T^1(V_t)$, $T^3_{hg}(V_t)=T^3(V_t)\simeq V_t$. 次に $T^2(V_t)$ を考えると, $\dim H^3(V_t,\mathbb{R})=20$, $h^{2,1}(V_t)=9$ より $\dim T^2(V_t)=10$, $\dim T^2_{hg}(V_t)\leq 9$. 実際, $d(t)=\dim T^2_{hg}(V_t)$ とすると, 可算個のBの4次元解析的集合を除けば $d(t)=3$ であることが証明される. さらに各次元 4, 3, 2, 1, 0 の可算個の解析的集合があって, その上では $d(t)$ の最小値が, それぞれ 5, 6, 7, 8, 9 であることが分る.