数理解析研究所講究録
第 68 巻 1969 年 100-114

解析空間の isolated singularity の代数性について
(広中の講義による)

名大 理　松村英之

§0.

先の講演者が紹介された M. Artin の論文"解析的方程式の解について"は，形式的解があれば解析的解があるということを主定理とするが，この定理のいくつかのヴァリエーションが可能であることを Artin みずからのべている．その中でも重要なのは次のものである：

I) k を体，$k\{x_1, \cdots, x_n\} = R_0$ を(収束巾級数環ではなくて)多項式環 $k[x_1, \cdots, x_n]$ の素イデアル $(x_1, \cdots, x_n)$ による局所環 $k[x]_{(x)}$ の Hensel 化とする．局所環 R_0 の完備化は形式的巾級数環 $k[[x_1, \cdots, x_n]]$ であり，R_0 は $k[[x]]$ の中で $k[x]$ 上に代数的な元の全体から成る部分環に外ならない．このとき，$F_\nu(Y) \in R_0[Y_1, \cdots, Y_m]$ ($\nu = 1, 2, \cdots, r$) による代数方程式 $F_\nu(Y)=0$ が形式解 $\bar{y} = (\bar{y}_1, \cdots \bar{y}_m)$, $\bar{y}_i \in k[[x]]$, をもてば R_0 の中で $\bar{y}$ にいくらでも近い解 y が存在する．

つまり，方程式が解析的方程式から代数方程式に制

限される代りに，解は収束巾級数よりも小さい R_0 の中で見出せると主張する．実はこの定理の完全な証明はまだ書かれていないようだが，k が標数 0 なら多分大丈夫と思われる．さてこれを認めると，次の問題が肯定的に解決される：

II) "X を複素解析空間，P を X の孤立特異点とすると，P の適当な近傍はある代数多様体の孤立特異点の近傍と同型ではないか？"

P が X の単純点なら P の近傍は affine space の開集合と同型だからもちろん代数的であり，また孤立特異点でなければ，局所的にも代数的にならぬ解析空間の例は容易に作れることも注意しておこう．さて近傍の同型は P の局所環 $\mathcal{O}_P$ によって定まる．更に $\mathcal{O}_P$ の完備化を $\hat{\mathcal{O}}_P$ とすれば $\hat{\mathcal{O}}_P$ の同型から $\mathcal{O}_P$ の同型が従う（前の講演）．従って $\hat{\mathcal{O}}_P$ が，ある代数多様体の局所環の完備化と同型であることを示せばよいわけである．$\hat{\mathcal{O}}_P$ は $\mathbb{C}[[x_1,\cdots,x_n]]/J$（$J$ はイデアル）の形をしているが，適当な変数変換ののちに J が $\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]$ 上代数的な元で生成されれば目的が達成される．

以下にのべるのは，1967年12月，M. Artin の結果がニュースとして伝った頃，Columbia 大学で広中氏が

セミナーで話されたことを，筆者のノートによってまとめたものであり，文責は筆者にあるが，理論は広中氏だけのものかArtinの考えも入っているのかたしかめなかった．内容はI)からII)が従うことの証明である．

§1. R_0をnoetherian local ring, M_0をその極大idealとし，H_0をR_0のideal, $R=$ the H_0-adic completion of R_0, $H=H_0R$, $M=M_0R$とおく．RはMを極大idealとするnoeth. local ringである．

$J=f_1R+\cdots+f_mR$をRのideal, $\mathcal{O}=R/J$とおく．問題：$\mathcal{O}$を代数化せよ．という意味は，R_0のideal J_0で$\mathcal{O}\approx R/J_0R$となる如きものを求めよということである．(しからば $R/J_0R=H_0$-adic completion of R_0/J_0 であるから．) この問題を考えるために，R加群としてのexact seq.

(1.1) $$L_2 \xrightarrow{g} L_1 \xrightarrow{f} R \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{O} \longrightarrow 0$$

をひとつ選んでおく．但しこゝに$L_1=R^m$, $L_2=R^l$ (lは適当なinteger)でfは$f(\xi)=\sum_{i=1}^{m} f_i\xi_i$で与えられるものとし，$\varepsilon$は自然な準同型とする．これを用い

て，f と g とを"代数化"することにより $\mathcal{O}$ を代数化しようというのである．もちろん R にもっと条件をつけないとこの問題はとけない。

(1.1) から次の複体が得られる．

$$\mathrm{Hom}_R(L_2, \mathcal{O}) \xleftarrow{\ g^\circ\ } \mathrm{Hom}_R(L_1, \mathcal{O}) \xleftarrow{\ f^\circ\ } \mathrm{Hom}_R(R, \mathcal{O}).$$

容易に判るように f° は zero map，従って Ext の定義から $\mathrm{Ext}^1_R(\mathcal{O}, \mathcal{O}) = \mathrm{Ker}\, g^\circ$ を得る．

一方，exact sequence

$$0 \longrightarrow J \longrightarrow R \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow 0$$

から

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_R(R, \mathcal{O}) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{Hom}_R(J, \mathcal{O}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_R(\mathcal{O}, \mathcal{O}) \\ & 0 \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(R, \mathcal{O}) = (0)$$

なる exact seq. を得るから，canonical に

$$(1.2) \qquad \mathrm{Ext}^1_R(\mathcal{O}, \mathcal{O}) \approx \mathrm{Hom}_R(J, \mathcal{O})$$

この $\mathrm{Ext}^1_R(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ が，"R を固定しての $\mathcal{O}$ の *deformation* をつかさどる"，と漠然たる意味で言うことができる．それは次にのべるような事情からである．

Rの自分自身の中へのderivationsの有限生成R加群$\mathcal{D}$が与えられたとしよう. このとき, R-linear map

$$\lambda : \mathcal{D} \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(J, \mathcal{O})$$

を $\lambda(\delta)(j) = \delta(j) \bmod J \in \mathcal{O}$ $\quad(\delta \in \mathcal{D},\ j \in J)$ で定義する. (1.2)により, canonical homomorphism

$$\beta : \mathcal{D} \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(\mathcal{O}, \mathcal{O})$$

が得られたと言ってもよい. こゝで

$$(1.3) \qquad \nabla_R(\mathcal{O}, \mathcal{D}) \underset{\mathrm{def}}{=\!=} \mathrm{Coker}\,\beta$$

と定義する. $\nabla_R(\mathcal{O}, \mathcal{D})$はintrinsicに(即ちresolution (1.1)によらないで)得られたものだが, (1.1)を用いて表わすこともできる. それには

$$\mathrm{Ext}^1_R(\mathcal{O}, \mathcal{O}) = \text{Kernel of } g^\circ : \mathrm{Hom}_R(L_1, \mathcal{O}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(L_2, \mathcal{O})$$

を念頭において, R-linear map

$$\partial : \mathcal{D} \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(L_1, \mathcal{O})$$

を

$$\partial(\delta)(\xi) = \sum_{i=1}^{m} \xi_i\, \delta(f_i) \bmod J \qquad (\delta \in \mathcal{D},\ \xi \in L_1)$$

で定義すれば

LEMMA. $\operatorname{Im}(\partial) \subseteq \operatorname{Ker}(g^\circ)$, and

$$\nabla_R(\mathcal{O}, \mathcal{D}) \simeq \operatorname{Ker}(g^\circ) / \operatorname{Im}(\partial).$$

Proof.

$$L_2 \xrightarrow{g} L_1 \xrightarrow{f} J \longrightarrow 0$$

が exact であって，

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] \\
\mathcal{D} \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[dr, "\partial"'] & & \operatorname{Hom}_R(J, \mathcal{O}) \arrow[dl, "f^*"] \\
 & \operatorname{Hom}_R(L_1, \mathcal{O}) \arrow[d, "g^\circ"] & \\
 & {} &
\end{tikzcd}$$

が commutative diagram であり，この中の f^* が

$\operatorname{Hom}_R(J, \mathcal{O}) \approx \operatorname{Ker} g^\circ = \operatorname{Ext}^1_R(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ の同型を与える

ことを check すればよい。それは容易。

THEOREM. 上の $\mathcal{D}$ について次の2つの仮定をする：(A) $\delta \in H^i\mathcal{D}$ $(i > 0)$ なら，R の automorphism σ で $\sigma(u) \equiv u + \delta(u) \mod H^{2i}$ (for all $u \in R$) を満足するものが

存在する（これを δ による Taylor 展開と呼ぶ）.（たとえば $R = k[[x_1, \cdots, x_n]]$, $H = (x_1, \cdots, x_n)$ で $\mathcal{D} = \sum R \frac{\partial}{\partial x_i}$ ならばこの条件は成立つ. $u = \varphi(x) \in R$, $\delta = \sum h_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ に対し $\sigma(u) = \varphi(x_1 + h_1, \cdots, x_n + h_n)$ とおけばよい.）

(B) $H^\nu \nabla_R(\mathcal{O}, \mathcal{D}) = (0)$ for $\nu \gg 0$.

これらの条件の下に，次の性質(*)をもつ非負整数の組 (s, t, r) が存在する.

(*) L_1, L_2 は(1.1)の通りとし，以下の3条件を満足する任意の

$$L_2 \xrightarrow{g'} L_1 \xrightarrow{f'} R$$

を考える.

(i) $f'g' = 0$,

(ii) $g' \equiv g \mod H^s L_1$,

(iii) $f' \equiv f \mod H^\nu$ with some integer $\nu \geq t$.

このとき，R の automorphism σ で

$$\sigma \equiv id_R \mod H^{\nu - r}, \quad \sigma(\mathrm{Im}\, f') = J$$

を満足するものが存在する.

略言すれば，f, g に十分近い f', g' で $f'g' = 0$ が成立てば，$J = \mathrm{Im}\, f$ と $J' = \mathrm{Im}\, f'$ とは R の autom. で

互に移り得て, $\mathcal{O}=R/J \approx R'/J'$ が得られるというのである.

定理の証明は §2 にまわして, これを用いて I) ⇒ II) の証明ができることを示そう.

I) ⇒ II). k を(標数0の)体, J を formal power series ring $k[[x_1,\cdots,x_n]]$ の ideal とし, local ring $\mathcal{O}=k[[x]]/J$ を考える. 上の記号に合わせれば $R_0=k\{x\}$ ($=$ Henselization of $k[x]_{(x)}$), ~~R~~ $R=k[[x]]$, $\mathfrak{D}=\sum R\frac{\partial}{\partial x_i}$ とする. $H=(x_1,\cdots,x_n)$ とする.

$J=(f_1,\cdots,f_m)$ とし $L_2 \xrightarrow{g} L_1=R^m \xrightarrow{f} R \rightarrow 0$ を前のように取る. もし定理の仮定(B): $H^\nu \nabla_R(\mathcal{O},\mathfrak{D})=(0)$ for $\nu\gg 0$ も成立つとすれば, 定理に言う如き (s,t,r) が存在する. さて $g=(g_{ij})$, $f=(f_j)$; $g_{ij}, f_j \in k[[x]]$ であり $fg=(f_j)(g_{jk})=(\sum_j f_j g_{jk})=0$ である. Artin の定理 I) ~~を~~ を, (連立)方程式

$$\sum_{j=1}^{m} Y_{ij} Z_j = 0 \quad (i=1,\cdots,l)$$

に適用すれば, f, g に十分近くてしかも成分が $k\{x\}$ に入る行列 f', g' が存在して $f'g'=0$ をみたすことが判る. すると $L_2 \xrightarrow{g'} L_1 \xrightarrow{f'} R \longrightarrow 0$ は (i)(ii)(iii) をみたすから, 定理により

$$\mathcal{O} \approx \text{completion of } k\{x_1, \cdots, x_n\}/(f_1', \cdots, f_m')$$

が得られる. 各 f_i' は $k\{X\}$ の元であるから $k[X]$ 上に代数的, 従って $\mathcal{O}$ は代数多様体の local ring の完備化と同型 ~~を~~ である. それが II) であった. しかし仮定(B): $H^\nu \nabla_R(\mathcal{O}, \mathcal{D}) = (0)$ for $\nu \gg 0$ を示すにはどうしたらよいか? そのために $\mathcal{O}$ が孤立特異点であるという仮定が必要になるのである.

$\mathcal{O}$ が孤立特異点, すなわち極大 ideal を除くすべての ($\mathcal{O}$ の) ~~[illegible]~~ prime ideal $\mathfrak{p}$ に対し $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ は regular local ring であると仮定しよう. $\mathfrak{p}$ に対応する $R = k[[X]]$ の prime ideal を $\mathfrak{P}$ とする: $\mathfrak{P}/J = \mathfrak{p}$. しからば $\mathcal{O}_\mathfrak{p} = R_\mathfrak{P}/J_\mathfrak{P}$ で, $R_\mathfrak{P}$ も $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ も regular だから, $d = \dim R_\mathfrak{P} - \dim \mathcal{O}_\mathfrak{p}$ とおけば $J_\mathfrak{P} = (f_1, \cdots, f_d)$ と書ける. この f_i による Koszul complex

$$\prod^{\binom{d}{2}} R_\mathfrak{P} \xrightarrow{\ g\ } \prod^{d} R_\mathfrak{P} \xrightarrow{f=(f_1, \cdots, f_d)} R_\mathfrak{P}$$

を考える. (Koszul complex の定義を思い出すならば, $\prod^{\binom{d}{2}} R_\mathfrak{P}$ の canonical basis を $(e_{ij})_{i<j\leq d}$ と表わし

$g(e_{ij}) = f_i e_j - f_j e_i$, $f(e_i) = f_i$ で $\underbrace{\ }_{g,\, f\text{ を}}$ 定義する.)

これから

$$
\begin{tikzcd}
 & \prod^{d} \mathcal{O}_{\mathfrak{g}} \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] \\
\mathrm{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}\left(\prod^{\binom{d}{2}} R_{\mathfrak{p}},\ \mathcal{O}_{\mathfrak{g}}\right) & \mathrm{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}\left(\prod^{d} R_{\mathfrak{p}},\ \mathcal{O}_{\mathfrak{g}}\right) \arrow[l, "g^{\circ}"'] \\
 & \mathcal{D}_{\mathfrak{p}} = \sum R_{\mathfrak{p}} \frac{\partial}{\partial x_i} \arrow[u, "\partial"']
\end{tikzcd}
$$

を考えれば, g の定義から $g^{\circ} =$ zero map, そして map ∂ は行列 $\partial(f_1, \cdots, f_d)/\partial(x_1, \cdots, x_n)$ $\underbrace{\text{で}}_{\bmod J}$ 与えられる. $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$ の正則性の Jacobian criterion によれば この Jacobian matrix は mod $\mathfrak{g}$ で rank d をもつから, ∂ は surjective である. よって 前の Lemma により

$$\nabla_{R_{\mathfrak{p}}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}, \mathcal{D}_{\mathfrak{p}}) = (0).$$

局所化はたいていの作用と commute するから, この左辺が $\nabla_R(\mathcal{O}, \mathcal{D})$ の $\mathfrak{g}$ における局所化 $(\nabla_R(\mathcal{O}, \mathcal{D}))_{\mathfrak{g}}$ に等しいことはすぐたしかめられる.☆ しかし $(\nabla_R)_{\mathfrak{g}} = (0)$ ($\mathfrak{g} \neq \mathfrak{m} =$ max. ideal) は $\mathrm{Supp}(\nabla_R) \subseteq \{\mathfrak{m}\}$ を意味し, $\nabla_R = \nabla_R(\mathcal{O}, \mathcal{D})$ は有限生成の $\mathcal{O}$ 加群だから $\mathfrak{m}^{\nu} \nabla_R = (0)$ なる ν が存在する. (いま H は R の極大 ideal である). それが証明すべきことであった.

(☆ ∇ の $\underbrace{\text{定義}}_{(1.3)}$ が intrinsic であることに注意.)

§2 定理の証明

正整数 a, b, c, s' を次のように定める.

1) $H^a \cdot \nabla_R(\mathcal{O}, R) = (0)$,

2) $H^\mu \cap J \subseteq H^{\mu-b} J$ for all $\mu \geq b$,

3) $H^\nu \cdot \mathrm{Hom}_R(L_1, \mathcal{O}) \cap \mathrm{Ker}\, g^\circ \subseteq H^{\nu-c}\, \mathrm{Ker}\, g^\circ$
for all $\nu \geq c$,

4) $H^\mu \cdot \mathrm{Hom}_R(L_2, \mathcal{O}) \cap \mathrm{Im}\, g^\circ \subseteq H^{\mu-s'}\, \mathrm{Im}\, g^\circ$
for all $\mu \geq s'$.

2), 3), 4) には Artin-Rees の定理を用いるのである. そして $s = s'+1$, $t = 2(a+b+c+s)$, $r = a + c$ とおく. この (s, t, r) が定理の条件をみたす. 証明すべきことは

(*) $L_2 \xrightarrow{g'} L_1 \xrightarrow{f'} R$ が条件

(i) $f'g' = 0$,

(ii) $g' \equiv g \mod H^s L_1$,

(iii) $f' \equiv f \mod H^\nu$ with $\nu \geq t$

をみたすならば, R の autom. σ で

$$\sigma \equiv id_R \ (H^{\nu-r}), \quad \sigma(\mathrm{Im}\, f') = J$$

を満足するものが存在する

いま $f'=f+\xi,\quad g'=g+\eta$ とおけば $f'g'=0$ より $f\eta+\xi g+\xi\eta=0$, 一方 $\xi\equiv 0\ (H^{\nu})$, $\eta\equiv 0\ (H^{s})$, $J=\mathrm{Im}(f)$, よって

$$\xi g \equiv 0 \quad (J+H^{\nu+s}).$$

$\bar{\xi}=\xi \bmod J \in \mathrm{Hom}_R(L_1,\mathcal{O})$ とおけば $g^{0}(\bar{\xi})\equiv 0\ (H^{\nu+s}\mathcal{O})$. よって 4) により

$$g^{0}(\bar{\xi}) \in H^{\nu+s}\cdot \mathrm{Hom}_R(L_2,\mathcal{O}) \cap \mathrm{Im}(g^{0})$$

$$\subseteq H^{\nu+1}\mathrm{Im}(g^{0}) = g^{0}(H^{\nu}\cdot \mathrm{Hom}_R(L_1,\mathcal{O}))$$

それゆえ

$$\bar{\xi}'' \in H^{\nu+1}\cdot\mathrm{Hom}_R(L_1,\mathcal{O}), \quad g^{0}(\bar{\xi}'')=g^{0}(\bar{\xi})$$

なる $\bar{\xi}''$ が存在する. $\bar{\xi}''$ を induce する $\xi''\in H^{\nu+1}\cdot\mathrm{Hom}_R(L_1,R)$ をとり $\xi'=\xi-\xi''$ とおけ. しからば

$$g^{0}(\bar{\xi}')=g^{0}(\bar{\xi})-g^{0}(\bar{\xi}'')=0,$$

i.e. $\quad \xi' g \equiv 0 \quad (J).$

$\xi\equiv 0\ (H^{\nu})$, $\xi''\equiv 0\ (H^{\nu+1})$ だから $\xi'\equiv 0\ (H^{\nu})$,

$$\bar{\xi}' \in H^{\nu}\cdot \mathrm{Hom}_R(L_1,\mathcal{O}) \cap \mathrm{Ker}\, g^{0}$$

$$\subseteq H^{\nu-c}\ \mathrm{Ker}\, g^{0}.$$

一方 $\nabla_R(\mathcal{O},R)=\mathrm{Ker}\, g^{0}/\partial(\mathfrak{D})$ だから 1) により $H^{a}\cdot\mathrm{Ker}\, g^{0}\subseteq\partial(\mathfrak{D})$, また $\nu-c\geqq t-c>a$ だから

$H^{\nu-c}\ \mathrm{Ker}\, g^{\circ} \subseteq H^{\nu-c-a}\ \partial(\mathfrak{D}) = \partial(H^{\nu-c-a}\mathfrak{D})$. よって

$\xi' = \partial(\delta)$ となるような $\delta \in H^{\nu-c-a}\mathfrak{D}$ が存在する.

仮定 (A) により, R の autom. τ で

$$\tau(u) \equiv u + \delta(u) \qquad (H^{2(\nu-c-a)}) \quad \text{for all } u \in R$$

となるものが存在する.

$$\begin{aligned} f' - \tau(f) &\equiv f' - f - \delta(f) && (H^{2(\nu-c-a)}) \\ &\equiv \xi - \xi' && (J) \\ &= \xi'' \equiv 0 && (H^{\nu+1}) \end{aligned}$$

$(2\nu-2c-2a)-(\nu+1) = \nu - 2(a+c) - 1 > 0$ だから, $\tau \equiv id\ (H^{\nu-c-a})$
によって

$$f' - \tau(f) \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ (J + H^{\nu+1}) \cap H^{\nu-c-a})$$

また $\begin{aligned}[t] (J + H^{\nu+1}) \cap H^{\nu-c-a} &= (J \cap H^{\nu-c-a}) + H^{\nu+1} \\ &\subseteq H^{\nu-c-a-b} J + H^{\nu+1}. \end{aligned}$

よって

$$\lambda_0 \in H^{\nu-a-b-c}\ \mathrm{Hom}_R(L_1, L_2),$$

$$f' - \tau(f) - f \circ \lambda_0 \equiv 0 \quad (H^{\nu+1})$$

なる λ_0 が存在する. $\lambda = \tau^{-1}(\lambda_0)$ とおけば (ここで

τ を $L_1 = R^m$ の autom. に拡張して同じ文字で表わした),

$\tau \equiv id\ (H^{\nu-a-c})$ より $\lambda \equiv 0\ (H^{\nu-a-b-c})$.

また　$f \equiv \tau(f) \pmod{H^{\nu-a-c}}$ から

$$f\cdot\lambda_0 = f\cdot\tau(\lambda) \equiv \tau(f\lambda) \pmod{H^{2\nu-2a-b-2c}}$$

$2\nu-2a-b-2c > \nu+1$　により

$$f' - \tau(f) - \tau(f\lambda) \equiv 0 \quad (H^{\nu+1})$$

さて，$1+\lambda$ は Σ_1 の autom. である（何故なら $\det(1+\lambda) \equiv 1 \bmod H$ で $H \subseteq \mathrm{rad}(R)$ だから $\det(1+\lambda)$ は R の unit).

これから

$$\tau^{-1}\cdot(f')\cdot(1+\lambda)^{-1} \equiv f \quad (H^{\nu+1}).$$

こゝで

$$f'' = \tau^{-1} f' (1+\lambda)^{-1}, \quad g'' = (1+\lambda)\tau^{-1} g'$$

とおく．すると f'', g'' は (*) の条件 (i) (ii) (iii) を，ν の代りに $\nu+1$ を入れても満足する．実際 (ii) は

$$g'' = (1+\lambda)\tau^{-1} g', \quad \tau \equiv id \quad (H^{\nu-c-a}),$$

$$1+\lambda \equiv id \quad (H^{\nu-a-b-c}),$$

$$\nu-a-b-c \geqq t-a-b-c > s,$$

$$\therefore \quad g \equiv g' \equiv g'' \quad (H^s).$$

また (iii) $f'' \equiv f \quad (H^{\nu+1})$ はすでに証明されている．

この手続きを無限に繰返す．すると R の autom. $\tau_1, \tau_2, \cdots\cdots$ で $\tau_i \equiv id \quad (H^{\nu+i-1-r})$ なるもの，および

11 i

L_1 の autom. $1+\lambda_1$, $1+\lambda_2$, $\cdots$ で $\lambda_i \equiv 0$ ($H^{\nu+i-1-a-b-c}$) をみたすものが得られ, R の完備性から無限積 $\cdots \tau_2^{-1}\tau_1^{-1}$, $(1+\lambda_1)^{-1}(1+\lambda_2)^{-1}\cdots$ は夫々収束する. これらを σ $(\in \mathrm{Aut}(R))$, Λ $(\in \mathrm{Aut}_R(L_1))$ で表わせば

$$\boxed{\sigma \cdot f' \cdot \Lambda = f}$$

従って $\sigma(\mathrm{Im}\, f') = \mathrm{Im}\, f = J$, また $\sigma \equiv id \ (H^{\nu-r})$.

Q.E.D.